L. Kralj, D. Glasnović Gracin, Z. Ćurković, M. Stepić, S. Banić

PETICA+ 7

udžbenik i zbirka zadataka za 7. razred osnovne škole

DRUGI SVEZAK

1. izdanje

Zagreb, 2010.

Autorice: Lidija Kralj, Dubravka Glasnović Gracin, Zlata Ćurković, Minja Stepić, Sonja Banić

Urednik: Vinkoslav Galešev

Recenzentice: Ines Kniewald, Maja Ljubičić

Lektura: Han Jasmina

Ilustracija naslovnice: Ivan Marušić

Ostale ilustracije: Ivan Marušić, Antonija Jelić, Helena Povijač

Priprema za tisak: Ivana Biluš, Robert Braun, Mirta Kovač, Josip Marić

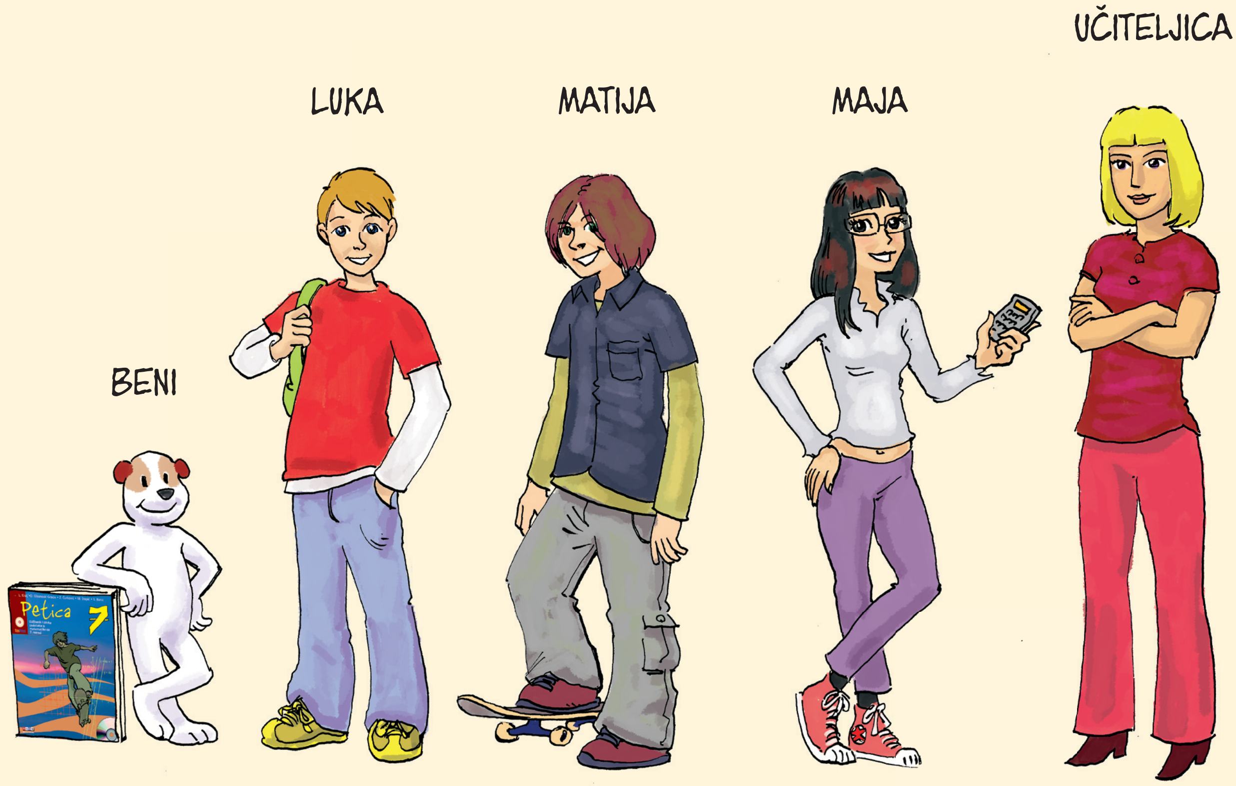
Tisak: Gradska tiskara Osijek

Za nakladnika: Robert Šipek

Nakladnik: SysPrint d.o.o.
XIV. trokut 8a, p.p. 84, 10020 Zagreb, Hrvatska
tel: (01) 655 8740, fax: (01) 655 8741
e-mail: udzbenici@sysprint.hr, web: www.sysprint.hr/udzbenici

Sadržaj

Upoznajte likove s kojima ćete se družiti kroz gradivo udžbenika Petica!



Luka je odličan učenik. Iako se kod njega nikad ne zna hoće li imati 4 ili 5, matematika mu je jedan od najdražih predmeta. Kada mu nešto nije jasno, ne srami se pitati učiteljicu da mu pojasni gradivo.

Matija voli playstation i svoj skateboard mnogo više od matematike. No, pravi je stručnjak za računala svih vrsta, pa tako i za džepna. Otkad je učiteljica dozvolila njihovo korištenje, pomaže cijelom razredu u svladavanju gradiva.

Maja ima sve petice i najbolja je učenica u razredu. Voli matematiku i redovito piše zadaće. Često se prepire s Lukom i Matijom oko točnih rješenja zadataka. Naravno, smatra da je baš ona uvijek u pravu!

Beni je Lukin pas. Voli dobro jelo, voli spavati, ali voli i prisluškivati kada Luka kod kuće priča o školi. Beni naročito voli matematiku i voli na šaljiv način komentirati matematičke probleme.

Učiteljica na zanimljiv način približava učenicima i najteže gradivo iz matematike. Uvijek je tu ako treba nešto dodatno objasniti i strpljivo odgovara na njihova brojna pitanja.

Dragi čitatelji,

pred vama je **drugi svezak** udžbenika sa zbirkom zadataka iz matematike za 7. razred osnovne škole, koji je u potpunosti usklađen sa stručnim i metodičkim zahtjevima Hrvatskog nacionalnog obrazovnog standarda (HNOS). Uz objedinjeni udžbenik sa zbirkom zadataka i rješenjima, u udžbenički komplet ubraja se još i **CD za učenike** koji će vam približiti gradivo matematike i učiniti ga zanimljivim, pa i zabavnim.

U ovom drugom svesku gradivo započinjemo sa geometrijskim dijelom gdje ćete upoznati mnogokute te kružnicu i krug. Osim toga naučiti ćete kako rješavati sustave linearnih jednadžbi te kako primijeniti znanje o linearnoj funkciji i jednadžbi pravca.

Svaki naslov u udžbeniku započinje problemom koji će vas kroz zanimljiv zadatak iz života uvesti u novo gradivo. Zatim slijede riješeni primjeri, putem kojih ćete stjecati nova znanja iz matematike. Znanje ćete utvrditi pomoću raznovrsnih zadataka koji se nalaze iza primjera. Zadaci su složeni po težini od lakših prema težima. Ako neku vrstu zadataka poželite još više uvježbati, na CD-u ćete naći dodatne i dopunske zadatke te druge obrazovne materijale i igre vezane uz matematiku.

Kroz gradivo matematike voditi će vas simpatični likovi: Luka, Maja, Matija, učiteljica, Beni i ostali, koji će se, baš kao i vi, uhvatiti u koštac s gradivom matematike. Svojim razgovorima i savjetima olakšat će vam svladavanje početnih teškoća.

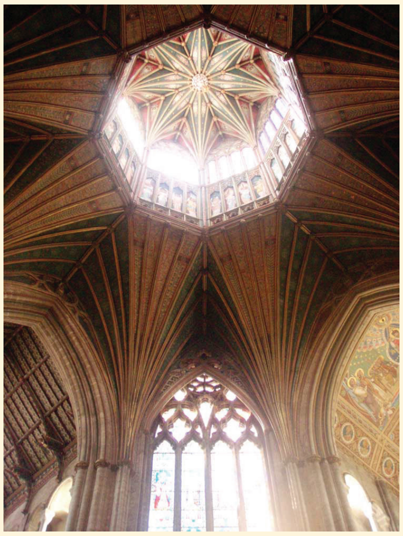
Kako bi vaš uspjeh iz matematike bio još bolji, na kraju svake nastavne teme nalaze se pitanja za ponavljanje i uvježbavanje gradiva. U udžbeniku su posebno označeni dijelovi gradiva koji nisu dio obaveznog programa, ali su namijenjeni učenicima koji žele znati više. Osim toga, i drugi dijelovi građe istaknuti su posebnim okvirima. U tablici su dani njihovi opisi i značenja:

Oblik	Značenje
Zadatak 4.	Lakši zadatak (redni broj zadataka obojan svijetlo-plavom bojom)
Zadatak 5.	Složeniji zadatak i zadaci za nadarene (redni broj zadatka obojan narančastom bojom)
	Važan dio gradiva kojeg treba dobro naučiti
	Dio teksta za lakše praćenje i pamćenje gradiva
	Formula
	Gradivo za radoznalce

Ako se u nekom zadatku traži crtanje ili upisivanje rješenja u udžbenik, riješite zadatak u svojoj bilježnici. Udžbenik trebaju koristiti i generacije iza vas.

Puno uspjeha u radu žele vam autorice udžbenika!

6. Mnogokuti



Mnogokuti se često pojavljuju u arhitekturi, svakodnevnim uporabnim predmetima itd.
Iako rijetko, mnogokute ponekad nalazimo i u prirodi.

Važni pojmovi

mnogokut ili n-terokut
dijagonale mnogokuta
kutovi mnogokuta
pravilni mnogokuti
karakteristični trokut mnogokuta
konstrukcija pravilnog mnogokuta
opseg i površina mnogokuta

Trokute i četverokute dobro smo upoznali. U našoj svakodnevnici osim trokuta i četverokuta viđamo i druge mnogokute: peterokut, šesterokut, sedmerokut, osmerokut itd.
Primjerice u arhitekturi. Zidovi, krovovi, ukrasni detalji imaju oblike raznih mnogokuta. Stoga je prirodno prijeći na proučavanje i ostalih mnogokuta.
U pčelinjoj košnici saće su u obliku šesterokuta.

Matematičarima je konstrukcija pravilnih mnogokuta uvijek bila velik izazov. Njemački matematičar J. Hermes konstruirao je pravilan mnogokut koji ima 65 537 kutova.

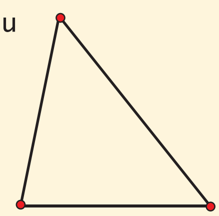
U ovom ćete poglavlju naučiti:

- Koliko dijagonala ima mnogokut koji ima 65 537 kutova;
- Koliki je zbroj svih unutarnjih kutova mnogokuta;
- Kakvi su to pravilni mnogokuti;
- Konstruirati neke pravilne mnogokute i crtati im dijagonale;
- Izračunati opseg i površinu mnogokuta;

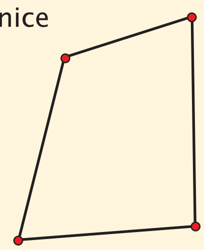
I još mnogo toga.

Brzinski zadaci za ponavljanje:

1. Nabrojite neke skupove točaka u ravnini koje ste dosad učili.
2. Što je trokut?
3. Pravilno označi vrhove, stranice i kutove trokuta na slici.



4. Koliko vrhova, stranica i kutova ima svaki trokut?
5. Što je četverokut?
6. Pravilno označi vrhove, stranice i kutove četverokuta na slici.



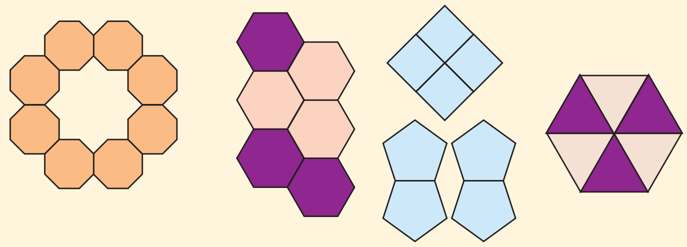
7. Koliko vrhova, stranica i kutova ima svaki četverokut?
8. Koje vrste trokuta poznaješ? A četverokuta?
9. Koliki je zbroj unutarnjih kutova trokuta? A četverokuta?
10. Što je opseg nekog geometrijskog lika?

6.1. Osnovno o mnogokutima

Pločice

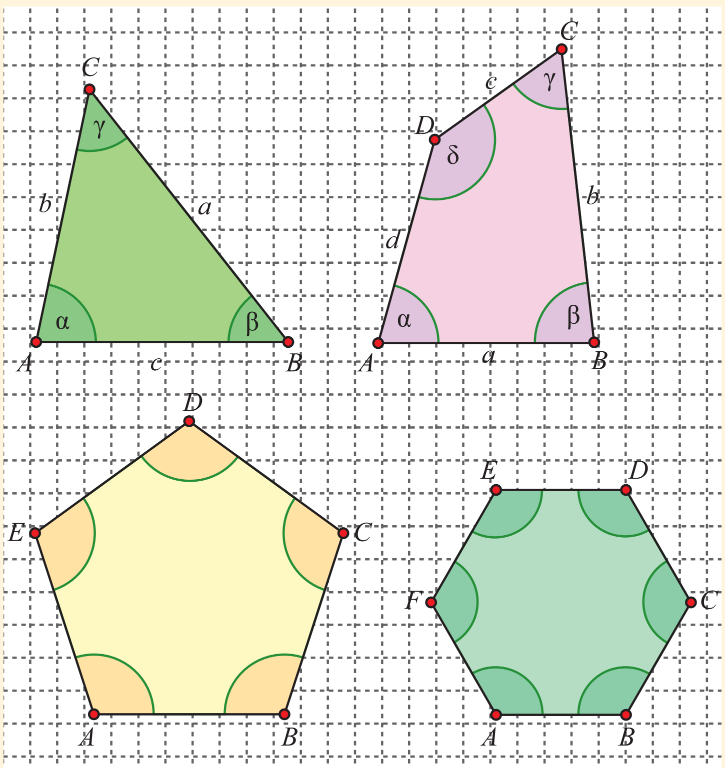
Majina mama želi promijeniti pločice u kupaonici. U trgovini je našla pločice u obliku različitih geometrijskih likova.

Koje geometrijske likove prepoznaješ na slici?



Primjer 1.
Likovi koji imaju mnogo kutova

a) Zašto se trokut zove trokut? A zašto se četverokut zove četverokut?



b) Kako se zove geometrijski lik na slici koji ima pet kutova? A onaj koji ima šest kutova?

Rješenje:

a) Trokut se zove trokut jer ima tri kuta, a četverokut se zove četverokut jer ima četiri kuta.

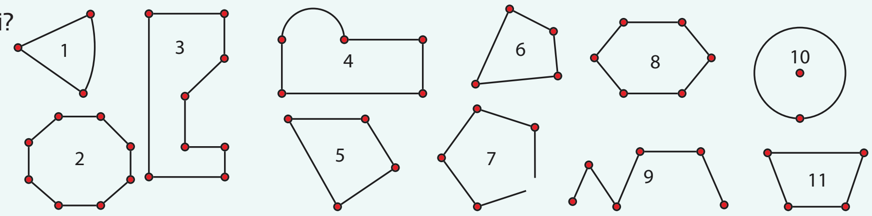
b) Geometrijski lik na slici koji ima pet kutova zove se peterokut, a geometrijski lik koji ima šest kutova šesterokut. Nastavimo li ovako nabrajati dobit ćemo imena geometrijskih likova koji imaju tri, četiri, pet, šest i više kutova. Njihovo zajedničko ime je **mnogokut**.

Važno

Mnogokut je dio ravnine omeđen dužinama koje imaju zajedničke krajnje točke.

Zadaci

1. Koji su likovi na slici mnogokuti?
   Koji nisu? Zašto?



Primjer 2:

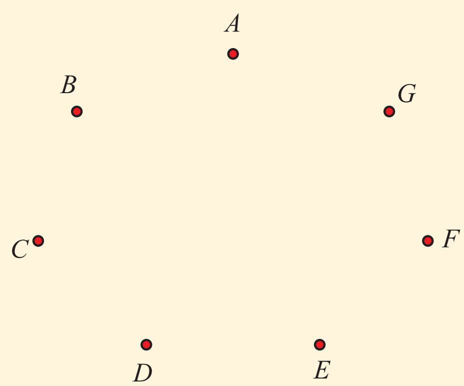
Primijetimo da trokut osim tri kuta ima tri vrha i tri stranice. Četverokut ima četiri kuta, četiri vrha i četiri stranice. Isto tako i peterokut ima pet kutova, pet vrhova i pet stranica. Broj stranica, vrhova, odnosno kutova nekog mnogokuta općenito označavamo slovom n. Za trokut je $n = 3$; za četverokut je $n = 4$; za peterokut je $n = 5$ itd. Zato često, umjesto mnogokut, kažemo n-terokut (čitamo "enterokut").

mnogokut
ili n-terokut

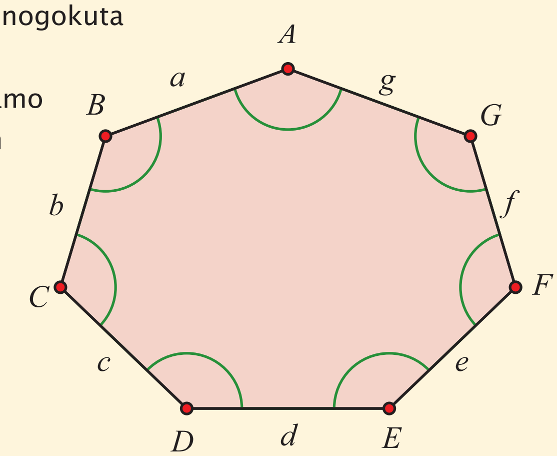
Broj kutova, vrhova ili stranica	Naziv mnogokuta
3	trokut
4	četverokut
5	peterokut
6	šesterokut
7	sedmerokut
8	osmerokut
9	deveterokut
…	…
n	enterokut

Želimo li nacrtati neki mnogokut, primjerice sedmerokut, prvo nacrtamo sedam točaka tako da nikoje tri ne leže na istom pravcu.

Te će točke biti vrhovi našeg sedmerokuta.



Vrhovi mnogokuta su točke. Označavamo ih velikim tiskanim slovima abecede.



Ako dužinama spojimo vrhove mnogokuta, i to abecednim redom, dobit ćemo **stranice mnogokuta**. Primjerice, stranice sedmerokuta sa slike su dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}, \overline{FG}$ i $\overline{GA}$.

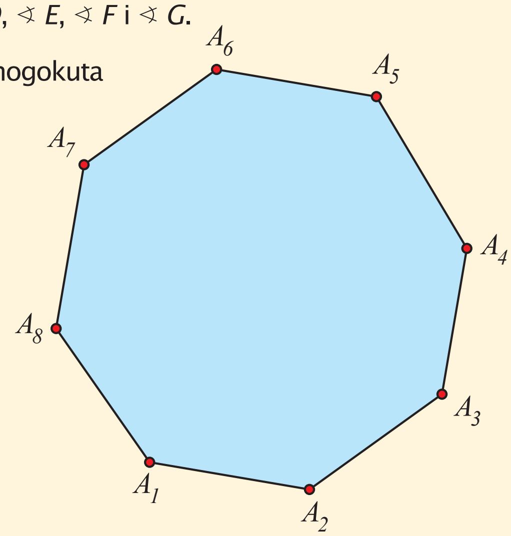
Duljine stranica označavamo uobičajeno: $|AB|, |BC|, |CD|, |DE|, |EF|, \ldots$ ili malim slovima abecede $a, b, c, d, e, \ldots$.

Unutarnji kutovi mnogokuta sa slike su:

$\sphericalangle GAB$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCD$, $\sphericalangle CDE$, $\sphericalangle DEF$ i $\sphericalangle EFG$ ili kraće $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$, $\sphericalangle E$, $\sphericalangle F$ i $\sphericalangle G$.

Ponekad vrhove mnogokuta možemo označiti ovako: A_1, A_2, A_3, A_4, …

Tako bez brojenja (prema indeksu) možemo zaključiti koliko vrhova ima mnogokut.



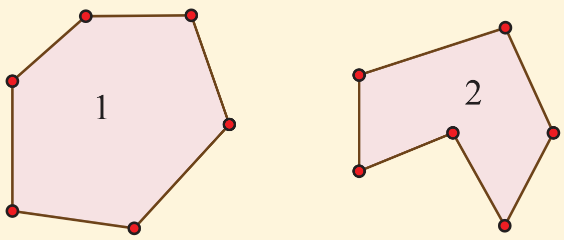
Zadaci

2. Nacrtaj ti neki mnogokut koji ima više od četiri vrha.
   Označi i napiši njegove vrhove, stranice i unutarnje kutove.

3. Nacrtaj u bilježnicu 7 točaka pa ih spoji dužinama. Jesi li nacrtao mnogokut? Kako se naziva taj lik? Označi mu vrhove, stranice i kutove.

Primjer 3:
Konveksni mnogokuti

Luka i Matija nacrtali su šesterokute. Matijinu šesterokutu jedan je unutarnji kut izbočen. Pogledaj sliku i prepoznaj Matijin šesterokut. Oboji taj kut nekom bojom.

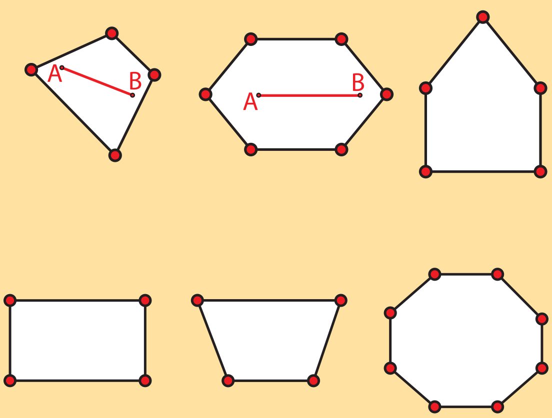


Rješenje:

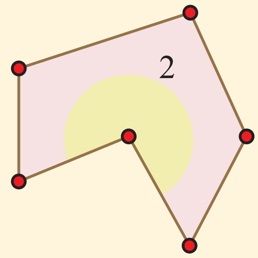
Sjetimo se da je veličina izbočenih kutova veća od 180°. Šesterokut broj 1 nema nijedan unutarnji kut veći od 180°.

Konveksan je mnogokut onaj koji sadrži sve dužine koje povezuju bilo koje dvije njegove točke.

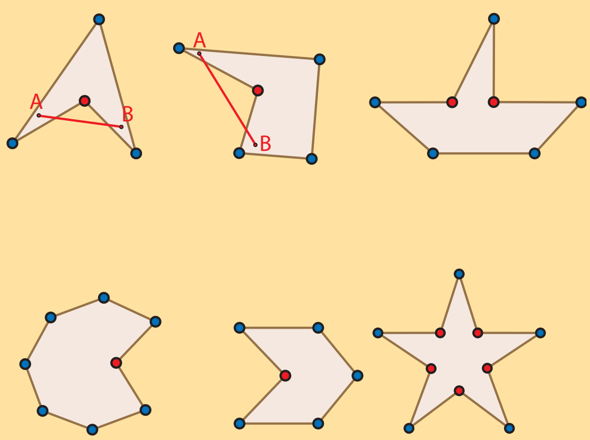
Možemo primijetiti da mu je svaki **unutarnji kut manji od 180°.**



Matija je nacrtao mnogokut broj 2. Taj mnogokut ima jedan izbočen kut.



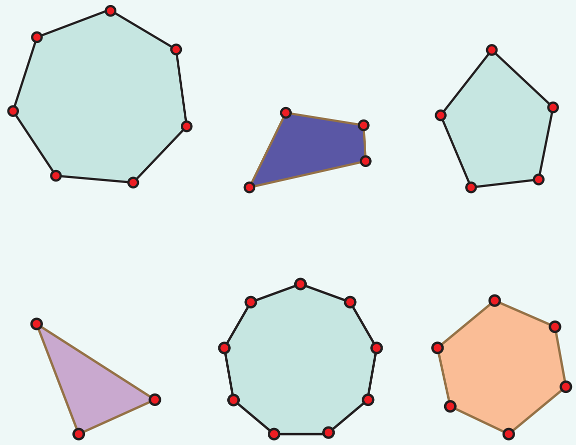
Mnogokut **nije konveksan** ako neka dužina između njegovih dviju točaka ne pripada mnogokutu. Za takav mnogokut još kažemo da je konkavan ili nekonveksan.



Mi ćemo proučavati konveksne mnogokute. Stoga ako piše mnogokut, misli se na konveksni mnogokut.

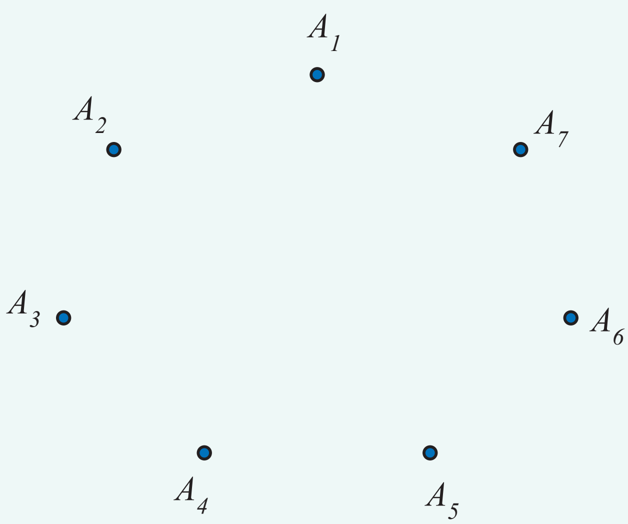
Zadaci

4. Imenuj mnogokute na slici i označi im vrhove.



5. U obliku kojeg je mnogokuta pčelinje saće?

6. Precrtajte u bilježnicu, pa spojite dužinama zadane točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 *i* A_7, i to redom: A_1 s A_2, A_2 s A_3, ... , A_7 s A_1.



Prepiši pa dopuni rečenice:

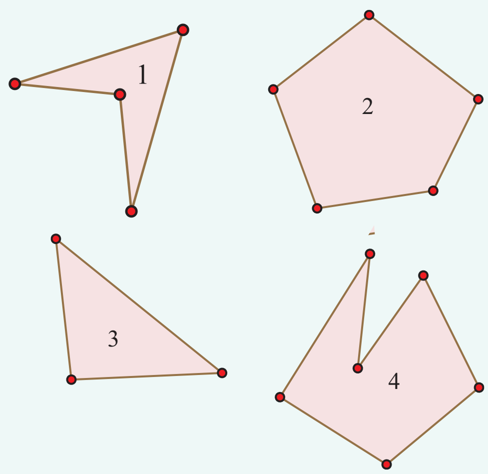
a) Ovaj se mnogokut zove ______________________

b) Vrhovi ovog mnogokuta su ______________________

c) Stranice ovog mnogokuta su ______________________

d) Unutarnji kutovi ovog mnogokuta su ______________________

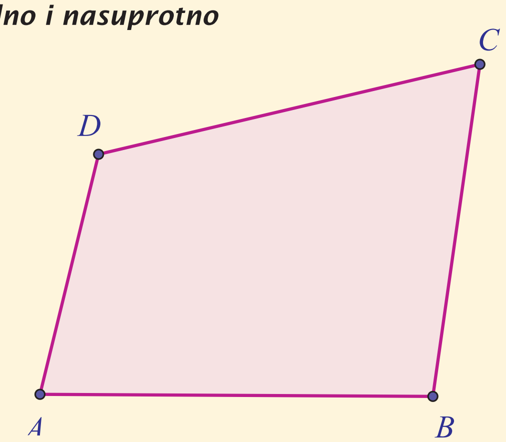
7. Kako se zove mnogokut koji ima:
   a) pet vrhova;
   b) šest stranica;
   c) tri kuta;
   d) sedam stranica;
8. Kako još nazivamo mnogokut?
9. Kako se zove n-terokut kojemu je:
   a) $n = 3$; b) $n = 5$;
   c) $n = 10$; d) $n = 6$;
10. Nacrtaj i označi vrhove mnogokutu koji ima:
    a) četiri vrha;
    b) pet stranica;
    c) osam kutova.
11. Koji od mnogokuta na slici nisu konveksni?



12. Nacrtaj pet mnogokuta koji nisu konveksni.
13. Nacrtaj po jedan:
    a) šesterokut;
    b) osmerokut;
    c) jedanaesterokut;
    d) petnaesterokut.

6.2. Dijagonale mnogokuta

Susjedno i nasuprotno



Prepiši, pa dopuni:

a) Koje su stranice susjedne stranici $\overline{BC}$? ________________________

b) Koja je stranica nasuprotna stranici $\overline{BC}$? ________________________

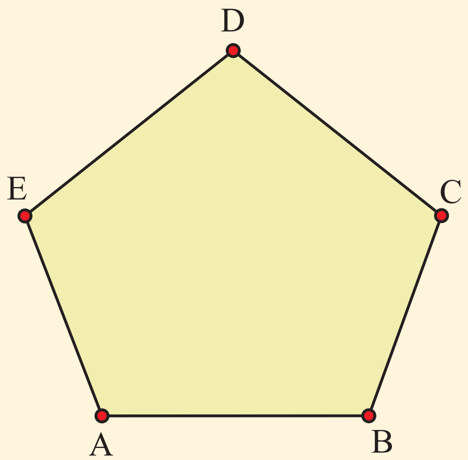
c) Koji su vrhovi susjedni vrhu C? ________________________

d) Koji je vrh nasuprotan vrhu C? ________________________

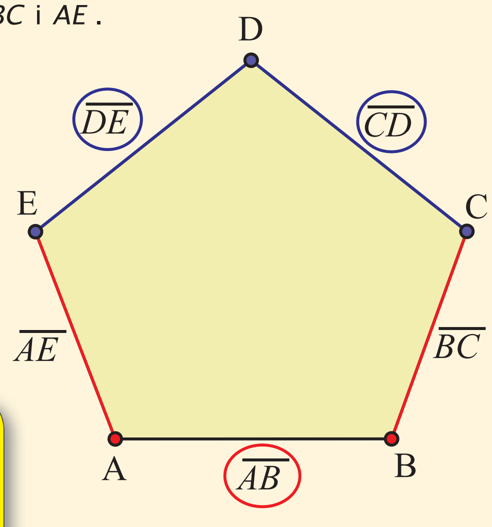
S pojmovima susjednih i nasuprotnih stranica te susjednih i nasuprotnih vrhova već ste se susreli.

Primjer 1.
Dijagonala mnogokuta

Mnogokutu $ABCDE$ treba odrediti
a) susjedne i nesusjedne stranice;
b) susjedne i nesusjedne vrhove.



a) **Susjedne stranice** nekog mnogokuta su njegove stranice koje imaju jedan zajednički vrh. Stranici $\overline{AB}$ mnogokuta na slici susjedne su stranice $\overline{BC}$ i $\overline{AE}$.

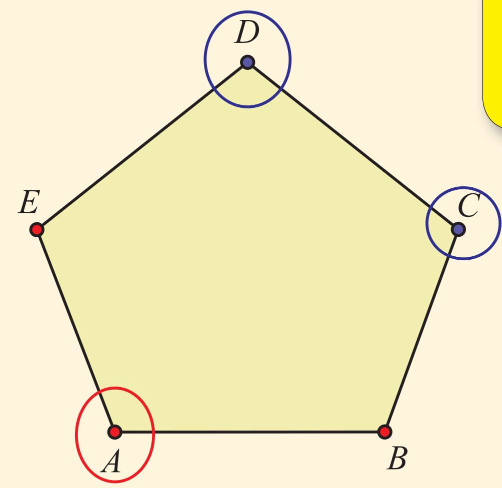


susjedne i nesusjedne stranice

Nesusjedne stranice nekog mnogokuta su stranice koje nemaju zajedničkih točaka. Stranici $\overline{AB}$ mnogokuta na slici nesusjedne su stranice $\overline{DE}$ i $\overline{CD}$.

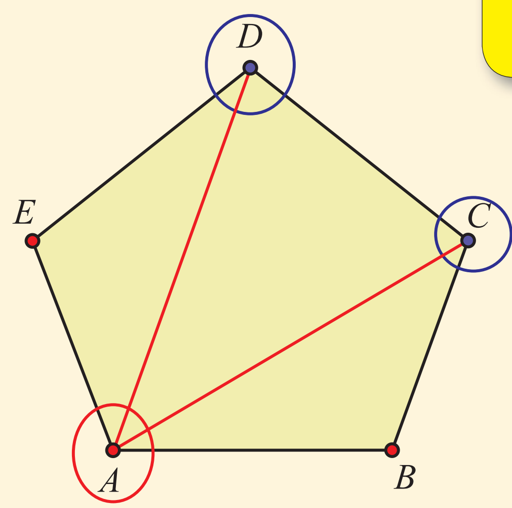
b) **Susjedni vrhovi** nekog mnogokuta su vrhovi koji pripadaju istoj stranici.
Vrhovi koji ne pripadaju istoj stranici su **nesusjedni vrhovi** mnogokuta.

susjedni i nesusjedni vrhovi



Stoga su vrhu A mnogokuta na slici susjedni vrhovi B i E, a nesusjedni vrhovi D i C.
Nacrtajmo dužine koje spajaju vrh A s njegovim nesusjednim vrhovima D i C.

dijagonala mnogokuta

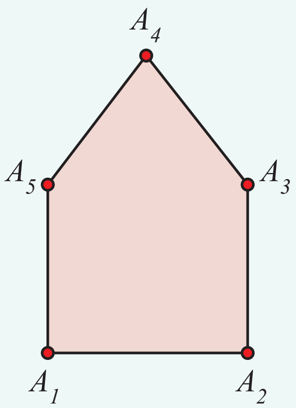


Važno

Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta.

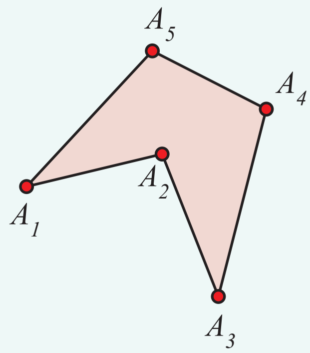
Zadaci

1.



a) Koje su stranice susjedne stranici $\overline{A_1A_2}$?
b) Koje su stranice nesusjedne stranici $\overline{A_1A_2}$?
c) Koji su vrhovi susjedni vrhu A_1?
d) Koji su vrhovi nesusjedni vrhu A_1?
e) Koje su stranice susjedne stranici $\overline{A_2A_3}$?
f) Koje su stranice nesusjedne stranici $\overline{A_2A_3}$?
g) Koji su vrhovi susjedni vrhu A_2?
h) Koji su vrhovi nesusjedni vrhu A_2?

2.



a) Koje su stranice susjedne stranici $\overline{A_3A_4}$?
b) Koje su stranice nesusjedne stranici $\overline{A_3A_4}$?
c) Koji su vrhovi susjedni vrhu A_3?
d) Koji su vrhovi nesusjedni vrhu A_3?
e) Koje su stranice susjedne stranici $\overline{A_4A_5}$?
f) Koje su stranice nesusjedne stranici $\overline{A_4A_5}$?
g) Koji su vrhovi susjedni vrhu A_4?
h) Koji su vrhovi nesusjedni vrhu A_4?

3. Nacrtaj trokut ΔABC .
a) Ima li trokut nesusjedne vrhove?
b) Ima li trokut dijagonalu?

4. a) Koliko dijagonala ima četverokut?
b) Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati četverokutu iz jednog vrha?

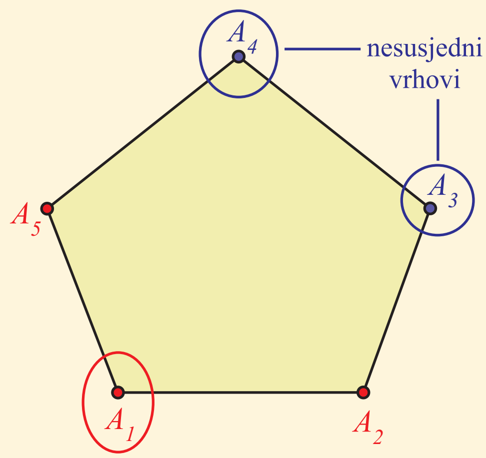
Primjer 2. Broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta

a) Koliko nesusjednih vrhova ima svaki vrh nekog mnogokuta?
b) Koliko se dijagonala može nacrtati iz jednog vrha mnogokuta?

Rješenje:

a) Već smo naučili da se mnogokut još naziva n-terokutom i da broj n označava broj kutova, stranica, odnosno vrhova zadanog mnogokuta. Nekom, bilo kojem vrhu n-terokuta, nesusjedni vrh ne može biti taj isti vrh, a ni dva susjedna vrha – jedan s jedne i drugi s druge njegove strane. Dakle od n vrhova, tri mu vrha ne mogu biti nesusjedni.

Pogledajmo peterokut na slici.



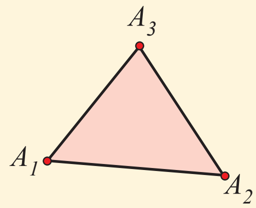
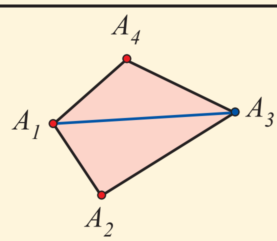
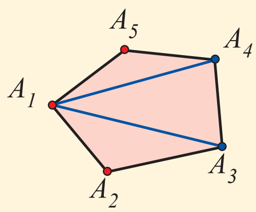
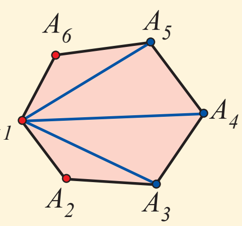
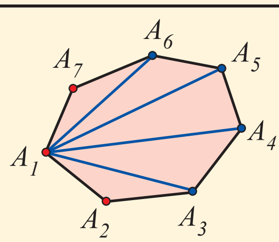
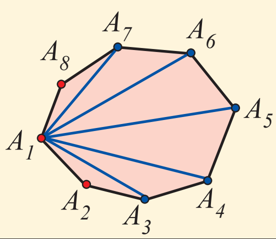
Peterokutu je $n = 5$. Vrh A_1 ima $5 - 3 = 2$ nesusjedna vrha.

Stoga svaki vrh mnogokuta sa n vrhova ima $n - 3$ nesusjedna vrha.

broj dijagonala iz jednog vrha - d

b) Kako je dijagonala dužina koja spaja dva nesusjedna vrha mnogokuta, zaključujemo da se iz jednog vrha mogu nacrtati $n - 3$ dijagonale.

Iz jednog vrha mnogokuta sa n vrhova može se nacrtati $d = n - 3$ dijagonala.

mnogokut (n-terokut)	broj vrhova	slika	broj nesusjednih vrhova	broj dijagonala iz jednog vrha
TROKUT	$n = 3$		$n - 3 = 3 - 3 = 0$ *trokut nema nesusjednih vrhova*	$d = 0$
ČETVEROKUT	$n = 4$		$n - 3 = 4 - 3 = 1$	$d = 1$
PETEROKUT	$n = 5$		$n - 3 = 5 - 3 = 2$	$d = 2$
ŠESTEROKUT	$n = 6$		$n - 3 = 6 - 3 = 3$	$d = 3$
SEDMEROKUT	$n = 7$		$n - 3 = 7 - 3 = 4$	$d = 4$
OSMEROKUT	$n = 8$		$n - 3 = 8 - 3 = 5$	$d = 5$

Zadaci

5. Koliko susjednih vrhova ima neki vrh šesterokuta? A koliko nesusjednih vrhova ima taj vrh šesterokuta?
6. Koliko nesusjednih vrhova ima neki vrh
   a) četverokuta;
   b) peterokuta;
   c) deseterokuta;
   d) jeanaesterokuta?
7. Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha
   a) peterokuta;
   b) četverokuta;
   c) sedmerokuta;
   d) deseterokuta;
   e) deveterokuta;
   f) dvadeseterokuta;
   g) petnaesterokuta;
   h) osmerokuta?
8. Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha mnogokuta koji ima
   a) 17 kutova;
   b) 24 vrha;
   c) 30 stranica?
9. Nacrtaj neki deveterokut $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$. Nacrtaj sve njegove dijagonale koje možeš povući iz vrha A_3.

Primjer 3.
Poznat je broj dijagonala iz jednog vrha mnogokuta

Iz jednog vrha mnogokuta može se nacrtati ukupno 12 dijagonala.
Koliko vrhova ima taj mnogokut? Kako se zove takav mnogokut?

Rješenje:

Iz jednog vrha mnogokuta može se nacrtati ukupno $n - 3$ dijagonale. To znači da je $n - 3 = 12$. Sada je lako zaključiti da je $n = 15$. Taj mnogokut ima 15 vrhova i zove se petnaesterokut.

Zadaci

10. Koliko vrhova ima mnogokut ako se iz jednog njegova vrha može nacrtati ukupno
    a) 10 dijagonala;
    b) 16 dijagonala;
    c) 24 dijagonale?
11. Koliko stranica ima mnogokut ako znaš da se iz jednog njegova vrha može nacrtati najviše
    a) 17 dijagonala;
    b) 12 dijagonala;
    c) 18 dijagonala?
12. Koliko kutova ima n-terokut ako znaš da se iz jednog njegova vrha može nacrtati najviše
    a) 6 dijagonala;
    b) 11 dijagonala?
13. Koji mnogokut ima četiri puta više stranica nego dijagonala povučenih iz jednog njegova vrha?
14. Koji mnogokut ima dva puta više stranica nego dijagonala povučenih iz jednog vrha mnogokuta?
15. Luka je nacrtao mnogokut i sve njegove dijagonale iz vrha A_1. Koji je mnogokut nacrtao ako je povukao ukupno 27 dužina?
16. Popuni tablice.

a)

n	6	12	5	26	123	48	99	201
d								

b)

n								
d	5	11	37	62	41	100	29	1001

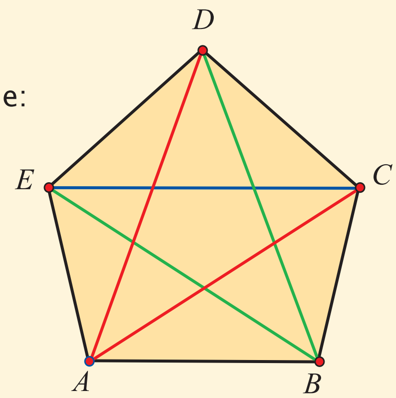
Primjer 4.
Ukupan broj dijagonala mnogokuta

Rješenje:

Maja je dva puta brojila svaku dijagonalu. Naime, ako iz vrha A nacrtamo dijagonale $\overline{AC}$ i $\overline{AD}$, onda ih više ne trebamo crtati iz vrhova C i D jer su već nacrtane.

Na slici se vidi da je:

$\overline{AC} = \overline{CA}$
$\overline{AD} = \overline{DA}$
$\overline{BE} = \overline{EB}$
$\overline{BD} = \overline{DB}$
$\overline{CE} = \overline{EC}$



Stoga peterokut nema 10 dijagonala, nego 5, tj. upola manje.

Na isti način možemo izračunati ukupan broj dijagonala za sve ostale mnogokute.

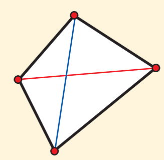
Označimo sa D_n ukupan broj dijagonala mnogokuta koji ima n vrhova.

ukupan broj dijagonala – D_n

Četverokut

Iz svakog vrha polazi 4 – 3 = 1 dijagonala.

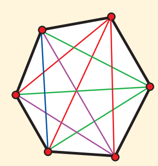
Četverokut ima ukupno $\frac{4 \cdot 1}{2} = 2$ dijagonale



Šesterokut

Iz svakog vrha polazi 6 – 3 = 3 dijagonale.

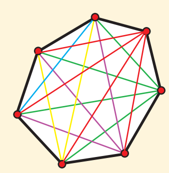
Četverokut ima ukupno $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ dijagonala



Sedmerokut

Iz svakog vrha polazi 7 – 3 = 4 dijagonale.

Četverokut ima ukupno $\frac{7 \cdot 4}{2} = 14$ dijagonala



Važno

Mnogokut s n vrhova ukupno ima

$D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ dijagonala.

Z a d a c i

17. Nacrtaj šesterokut $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ i sve njegove dijagonale. Koliki je ukupan broj dijagonala?

18. Koliko ukupno dijagonala ima
   a) deseterokut; b) jedanaesterokut;
   c) dvanaesterokut; d) trinaesterokut;
   e) četrnaesterokut; f) petnaesterokut?

19. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu koji ima
   a) 38 kutova; b) 27 vrhova;
   c) 30 stranica?

20. Koliko dužina moramo povući da bismo nacrtali stranice osmerokuta i sve njegove dijagonale?

Primjer 5.
Odredi koji mnogokut ima zadan broj dijagonala

a) Koji mnogokut ima ukupno 14 dijagonala?

b) Postoji li mnogokut koji ima ukupno 4 dijagonale?

Rješenje:

a) Podatak da je broj dijagonala $D_n = 14$ uvrstimo u formulu za izračunavanje broja dijagonala $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$. Tako dobijemo jednakost $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 14$; tj. jednakost $n \cdot (n-3) = 28$.

Vidimo da se faktori n i $(n - 3)$ razlikuju za 3. Stoga treba naći takva dva prirodna broja koja se razlikuju za 3, a čiji je umnožak jednak 28. Kako je $7 \cdot 4 = 28$, zaključujemo da je $n \cdot (n-3) = 7 \cdot 4$.

Dakle $n = 7$.

Sedemerokut ima ukupno 14 dijagonala.

b) $D_n = 4$, tj. $\frac{n \cdot (n-3)}{2} = 4$, a umnožak $n \cdot (n-3) = 8$.

Takva dva prirodna broja koja se razlikuju za tri i umnožak im iznosi 8 ne postoje, pa zaključujemo da ne postoji ni mnogokut koji ima 4 dijagonale.

Z a d a c i

21. Postoji li mnogokut koji ima
   a) 44 dijagonale; b) 27 dijagonala;
   c) 29 dijagonala; d) 65 dijagonala?

22. Prepiši, pa popuni tablicu do kraja:

n-terokut	broj dijagonala iz jednog vrha *n*-terokuta	ukupan broj svih dijagonala *n*-terokuta
$n = 8$		
	$d = 7$	
		$D_n = 9$
$n = 26$		
	$d = 19$	
		$D_n = 90$

23. Nacrtaj neki peterokut *ABCDE*. Koliko dužina možeš nacrtati tako da su im vrhovi peterokuta rubne točke?

24. Koji mnogokut ima broj stranica jednak ukupnom broju dijagonala?

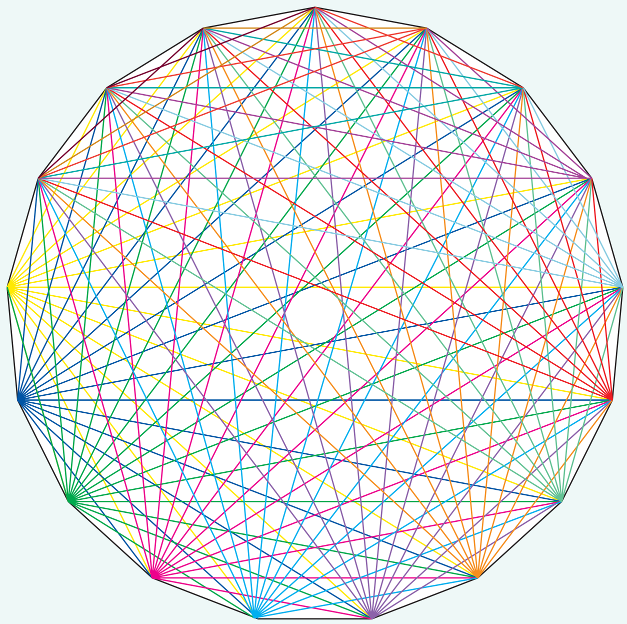
25. Koji mnogokut ima šest puta više dijagonala nego stranica?

26. Izračunaj ukupan broj dijagonala za mnogokut koji ima ovoliko stranica:
   a) 12; b) 8; c) 16;
   d) 24; e) 350.

broj dijagonala iz jednog vrha $d = n - 3$

ukupan broj dijagonala $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$

27. Koliko dijagonala ima mnogokut sa slike?



28. Maja je crtala dijagonale mnogokuta. Željela je povećati broj dijagonala pa je nacrtala mnogokut koji ima tri stranice više. Novom mnogokutu mogla je nacrtati 15 dijagonala više.
Koji je mnogokut Maja prvo nacrtala? A koji je poslije nacrtala?

29. Izračunaj broj stranica mnogokuta kojemu je ukupan broj dijagonala:
a) 54; b) 9; c) 44; d) 14; e) 5150.

30. Izračunaj broj dijagonala iz jednog vrha i ukupan broj dijagonala ako mnogokut ima ovoliko kutova:
a) 22; b) 32; c) 16; d) 51; e) 10; f) 43.

Vježbalica

1. Koliko susjednih vrhova ima neki vrh sedmerokuta? A koliko nasuprotnih vrhova ima taj vrh sedmerokuta?

2. Koliko susjednih, a koliko nasuprotnih vrhova ima neki vrh
a) 13-kuta;
b) 17-kuta;
c) 24-kuta;
d) 45-kuta ?

3. Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha mnogokuta koji ima
a) 32 kutova;
b) 43 vrha;
c) 14 stranica?

4. Koliko vrhova ima mnogokut ako se iz jednog njegovog vrha može nacrtati ukupno
a) 15 dijagonala;
b) 33 dijagonala;
c) 36 dijagonale?

5. Koliko stranica ima mnogokut ako znaš da se iz jednog njegovog vrha može nacrtati najviše
a) 18 dijagonala;
b) 10 dijagonala;
c) 54 dijagonale.

6. Koliko kutova ima n-terokut ako znaš da se iz jednog njegovog vrha može nacrtati najviše
a) 55 dijagonala;
b) 100 dijagonala?

7. Koji mnogokut ima 4 puta više stranica nego dijagonala povučenih iz jednog vrha mnogokuta?

8. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu koji ima
a) 7 kutova;
b) 18 vrhova;
c) 15 stranica?

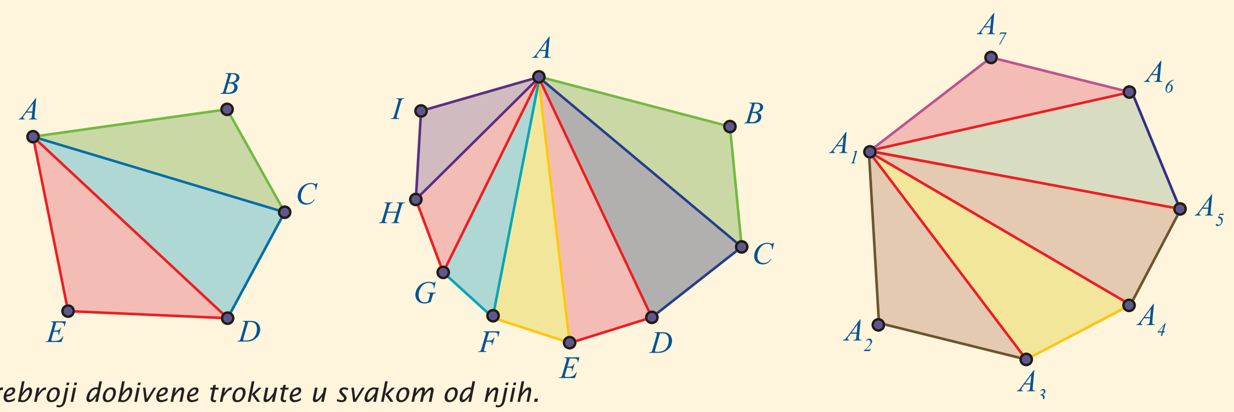
9. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu koji ima
a) 24 kuta;
b) 12 vrhova;
c) 35 stranica?

10. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu kojemu se može povući 24 dijagonale iz jednog vrha?
11. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu kojemu se može povući 11 dijagonala iz jednog vrha?
12. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu kojemu se može povući 17 dijagonala iz jednog vrha?
13. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu kojemu se može povući 21 dijagonala iz jednog vrha?
14. Koliko dužina moramo povući da bi nacrtali stranice dvanaestrokuta i sve njegove dijagonale.
15. Koliko dužina moramo povući da bi nacrtali stranice 19-kuta i sve njegove dijagonale.
16. Koliko dužina moramo povući da bi nacrtali stranice 15-kuta i sve njegove dijagonale.
17. Koji mnogokut ima šest puta više dijagonala nego stranica?
18. Koji mnogokut ima 5 puta više dijagonala nego stranica?
19. Koji mnogokut ima 8 puta više dijagonala nego stranica?
20. Koji mnogokut ima 10 puta više dijagonala nego stranica?
21. Postoji li mnogokut koji ima
    a) 44 dijagonale;
    b) 54 dijagonala;
    c) 90 dijagonala;
    d) 135 dijagonala?
22. Postoji li mnogokut koji ima
    a) 189 dijagonale;
    b) 50 dijagonala;
    c) 14 dijagonala;
    d) 25 dijagonala?

6.3. Kutovi mnogokuta

Podjela mnogokuta na trokute

Mnogokutima na slici sve su dijagonale nacrtane iz jednog vrha.



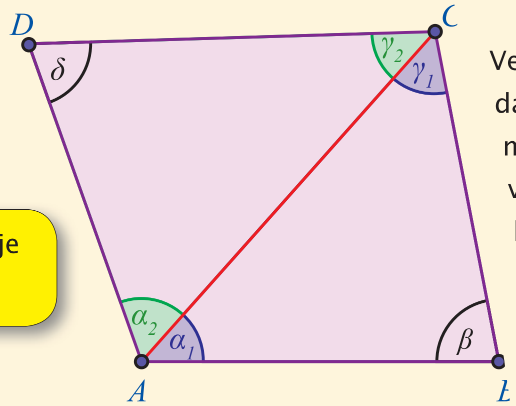
Prebroji dobivene trokute u svakom od njih.
Koliki je zbroj kutova u trokutu?
Koliki je zbroj kutova u svakom od ovih mnogokuta na slici?

U šestom smo razredu naučili da je zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu 180°. Također, zaključili smo da je zbroj unutarnjih kutova u četverokutu 360°. Sjetimo se kako smo do toga zaključka došli.
Nacrtamo li jednu dijagonalu, primjerice $\overline{AC}$, podijelit ćemo četverokut na dva trokuta.

Za trokut ΔABC vrijedi $\alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180°$, a za trokut ΔACD $\alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180°$

Za četverokut $ABCD$ tada vrijedi:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta = (\alpha_1 + \beta + \gamma_1) + (\alpha_2 + \gamma_2 + \delta) = 180° + 180° = 360°$$



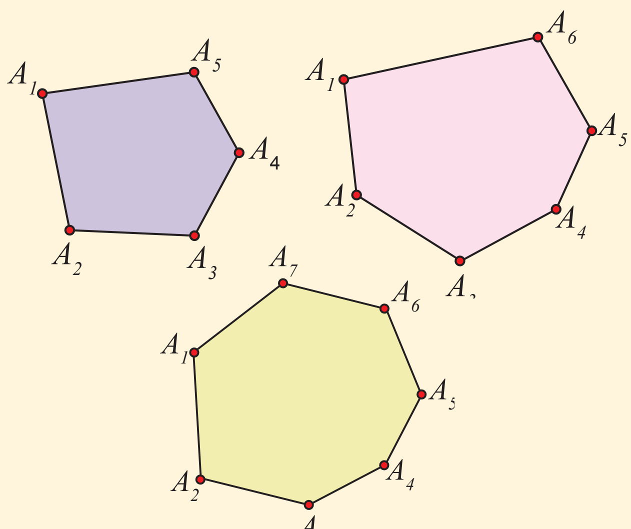
Već iz uvodnog primjera naslućujemo da možemo na isti način, dijeljenjem mnogokuta na trokute, odrediti zbroj veličina unutarnjih kutova bilo kojega drugog mnogokuta. U sljedećem primjeru to ćemo pokazati.

zbroj kutova u četverokutu je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Primjer 1.

Kako izračunati zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta

Na slici su peterokut, šesterokut i sedmerokut.



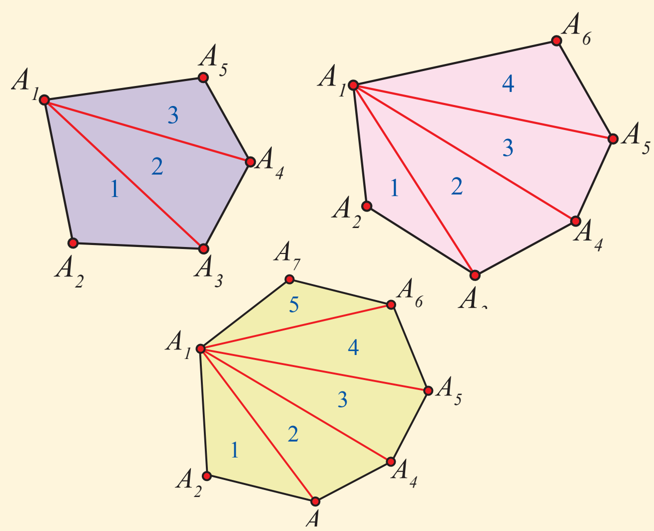
a) Svakom od zadanih mnogokuta nacrtaj iz jednog vrha sve dijagonale pa prebroji na koliko će trokuta svaki od njih biti podijeljen.

b) Koliki je zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta na slici?

Rješenje:

Zadanim mnogokutima nacrtajmo iz vrha A_1 sve dijagonale.

Tako smo peterokut podijelili na tri trokuta, šesterokut na četiri, a sedmerokut na pet trokuta. Pogledajmo vezu između broja vrhova n i broja dobivenih trokuta za svaki od njih.



Peterokutu $n = 5$, a broj trokuta 3; šesterokutu $n = 6$, broj trokuta 4; sedmerokutu $n = 7$, a broj trokuta 5. Lako je uočiti da je svakom od zadanih mnogokuta broj dobivenih trokuta za 2 manji od broja vrhova n. Nacrtamo li i sami još neke primjere, doći ćemo do istoga zaključka.

Crtanjem svih dijagonala iz jednog vrha mnogokuta mnogokut se podijeli na $n - 2$ trokuta.

b) Odredimo zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta.

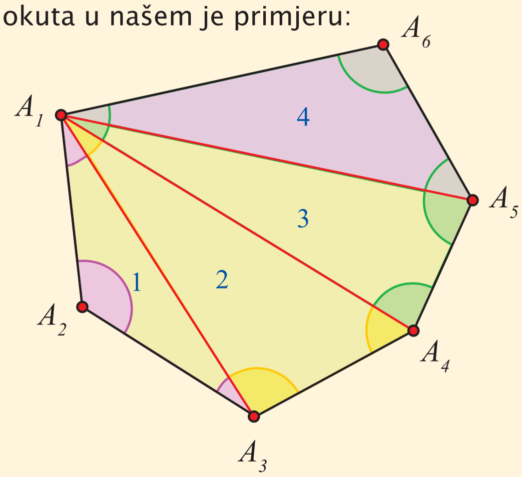
Zbroj veličina unutarnjih kutova svakog trokuta je 180°. Budući da se svaki n-terokut crtanjem svih dijagonala iz jednog vrha podijeli na n – 2 trokuta, onda je zbroj veličina unutarnjih kutova n-terokuta jednak $(n-2)\cdot 180°$.

zbroj veličina unutarnjih kutova - K_n

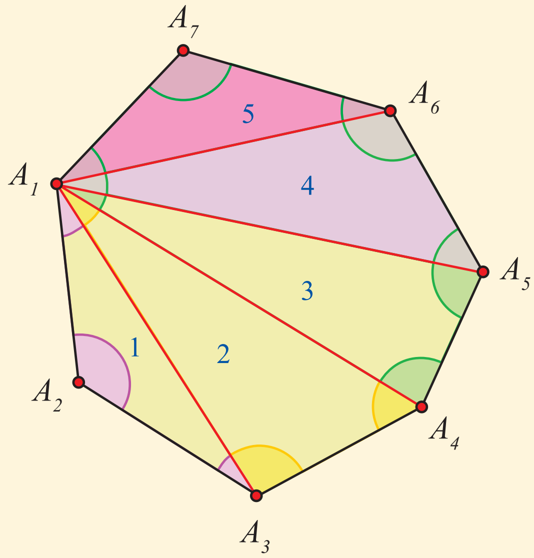
Važno

Zbroj veličina unutarnjih kutova n-terokuta računamo po formuli $K_n = (n-2)\cdot 180°$

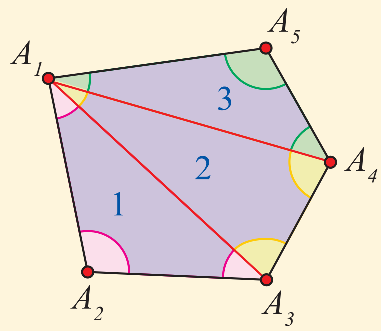
Prema tome zbroj veličina unutarnjih kutova mnogokuta u našem je primjeru:



$K_6 = (n-2)\cdot 180° = (6-2)\cdot 180° = 4\cdot 180° = 720°$



$K_7 = (n-2)\cdot 180° = (7-2)\cdot 180° = 5\cdot 180° = 900°$



$K_5 = (n-2)\cdot 180° = (5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°$

Zadaci

1. Na koliko se trokuta podijeli n-terokut crtanjem svih dijagonala iz jednog njegova vrha ako mu je broj vrhova:
   a) n = 8; b) n = 9;
   c) n = 10; d) n = 15;
   e) n = 28; f) n = 35?

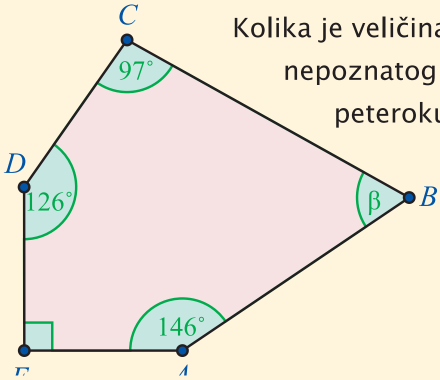
2. Koliko je zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta ako mu je broj vrhova:
   a) n = 8; b) n = 9; c) n = 10;
   d) n = 11; e) n = 12; f) n = 13?
   g) n = 24; h) n = 3; i) n = 4;
   j) n = 102; k) n = 52; l) n = 28?

3. Koliki je zbroj svih unutarnjih kutova u
   a) četrnaesterokutu;
   b) petnaesterokutu;
   c) šesnaesterokutu;
   d) sedamnaesterokutu?

4. Za koliko se razlikuje zbroj svih unutarnjih kutova deseterokuta i jedanaesterokuta? A deseterokuta i dvanesterokuta?

5. Nacrtaj tri šesterokuta.
   a) Izmjeri veličine njihovih unutarnjih kutova;
   b) Izračunaj zbroj tih kutova i usporedi ga s točnom vrijednošću.

Primjer 2.
Izračunaj nepoznati kut



Kolika je veličina nepoznatog kuta u peterokutu na slici?

Rješenje:

Prvo izračunamo koliko stupnjeva iznosi zbroj svih unutarnjih kutova peterokuta. Peterokutu je $n = 5$ pa taj podatak uvrstimo u formulu $K_n = (n-2)\cdot 180°$ i dobijemo:

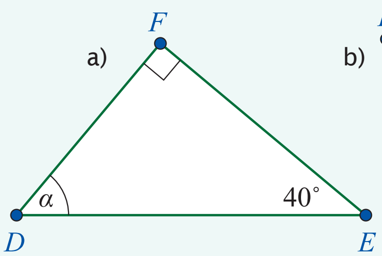
$$K_5 = (5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°.$$

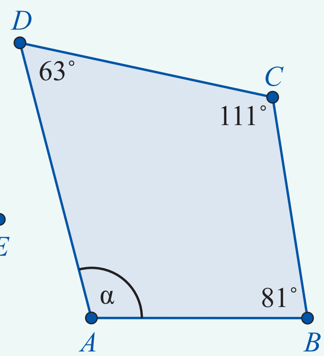
Veličinu kuta δ dobit ćemo tako da od 540° oduzmemo zbroj veličina ostala četiri kuta peterokuta:

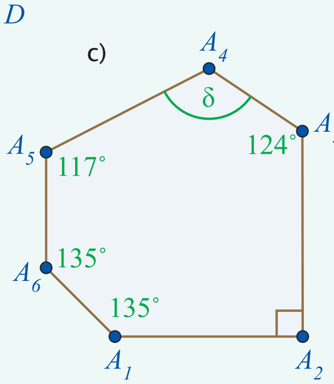
$$\delta = 540° - (146° + 97° + 126° + 90°) = 81°.$$

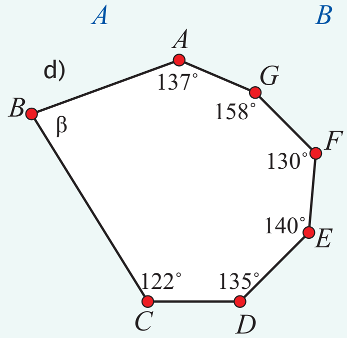
Z a d a c i

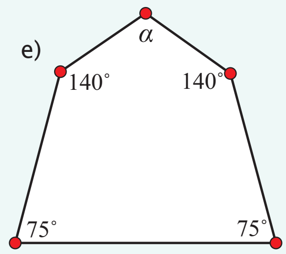
6. U mnogokutima na slici jednom je kutu veličina nepoznata. Izračunaj veličinu toga kuta.

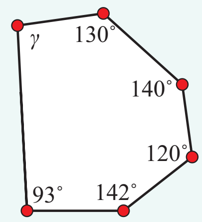
a)


b)


c)


d)


e)


f)


7. Odredi sve kutove peterokuta ako je zadano:
   a) Kut β je za 25° veći od kuta α, kut γ je za 25° manji od kuta α, kut δ je za 40° veći od kuta α, a kut $\varepsilon = 100°$?
   b) Kut α je dvostruko veći od kuta β, kut γ je trostruko veći od kuta β, kut δ četverostruko je veći od kuta β, a kut ε peterostruko je veći od kuta β.
   c) Kut α je za 25° veći od kuta β, kut β je za 25° veći od kuta γ, kut γ je za 25° veći od kuta δ, a kut δ je za 25° veći od kuta ε.

ε - epsilon

Primjer 3.
Odredi koji mnogokut ima zadani zbroj unutarnjih kutova

Koliko vrhova, stranica i kutova ima mnogokut kojemu je zbroj unutarnjih kutova jednak 2160°?

Rješenje:

Podatak da je zbroj svih kutova u mnogokutu 2160° uvrstimo u formulu $K_n = (n-2)\cdot 180°$ i dobijemo jednakost: $(n-2)\cdot 180° = 2160°$.

Iz ove jednakosti izračunamo broj n.

$(n-2) = 2160° : 180°$

$n - 2 = 12$

Zaključujemo da je $n = 14$. Zadani mnogokut ima 14 vrhova, 14 stranica i 14 kutova.

Zadaci

8. Koliko vrhova, stranica i kutova ima mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova
   a) 2340°; b) 3600°; c) 2880°;
   d) 5220°; e) 3960°; f) 3060°?

9. Prepiši, pa ispuni tablicu.

n	26		32	
K_n		4860°		6480°
D_n				

vanjski kutovi trokuta

U šestom smo razredu naučili da susjedni kut nekog unutarnjeg kuta trokuta nazivamo **vanjskim kutom** toga trokuta. Vanjski kutovi na slici su α', β' i γ'.

Vanjske kutove crtamo tako da redom produžimo stranice trokuta.

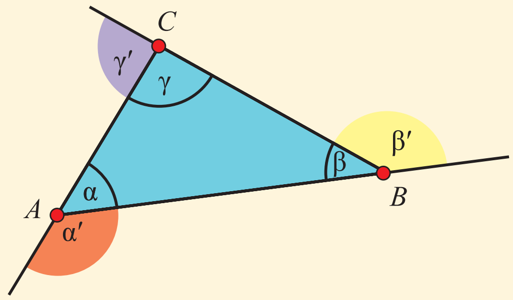
Unutarnji i pripadni vanjski kut zajedno čine ispruženi kut. To znači da je njihov zbroj 180°.

$\alpha + \alpha' = 180°$,

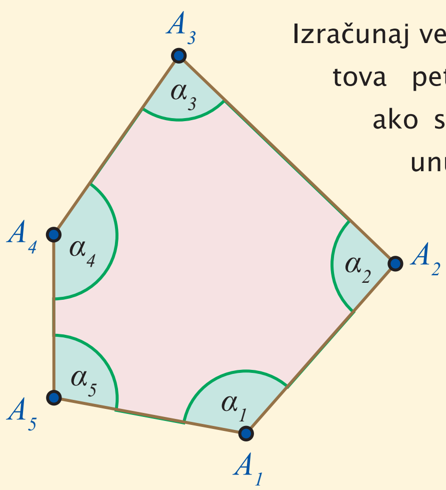
$\beta + \beta' = 180°$,

$\gamma + \gamma' = 180°$.

Zbrajanjem ovih jednakosti zaključili smo da je zbroj veličina vanjskih kutova trokuta 360°.



Primjer 4.
Vanjski kutovi mnogokuta



Izračunaj veličine vanjskih kutova peterokuta na slici ako su zadane veličine unutarnjih kutova:

$\alpha_1 = 117°$, $\alpha_2 = 100°$,
$\alpha_4 = 133°$ i $\alpha_5 = 108°$.

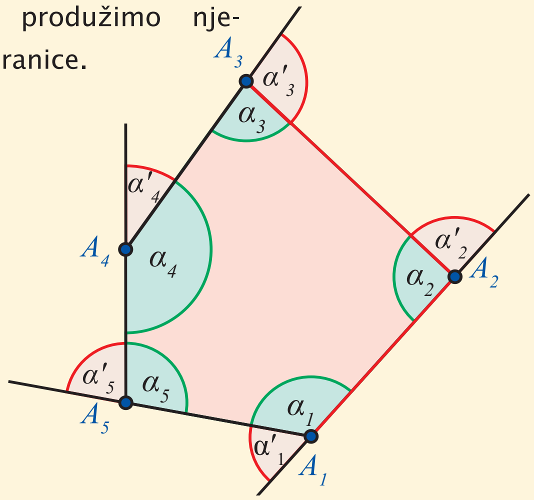
Rješenje:

Nacrtajmo vanjske kutove peterokutu tako da redom produžimo njegove stranice.

vanjski kutovi mnogokuta

Susjedni kut nekog unutarnjeg kuta mnogokuta nazivamo **vanjskim kutom** tog mnogokuta.

Nacrtajmo vanjske kutove peterokutu tako da redom produžimo njegove stranice.



$\alpha_1 + \alpha'_1 = 180°$, $\alpha_2 + \alpha'_2 = 180°$, $\alpha_3 + \alpha'_3 = 180°$,
$\alpha_4 + \alpha'_4 = 180°$ i $\alpha_5 + \alpha'_5 = 180°$

Unutarnji i pripadni vanjski kut zajedno čine ispruženi kut, tj. njihov je zbroj 180°.

Kako su nam poznate veličine unutarnjih kutova, nije teško naći odgovarajuće veličine vanjskih kutova:

$\alpha'_1 = 180° - 117° = 63°$; $\alpha'_2 = 180° - 100° = 80°$;

$\alpha'_4 = 180° - 133° = 47°$ i $\alpha'_5 = 180° - 108° = 72°$

Da bismo izračunali vanjski kut α'_3, najprije

moramo izračunati njemu pripadni unutarnji kut α_3. Kako je zbroj svih unutarnjih kutova peterokuta $K_5 = (5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°$, onda je $\alpha_3 = 540° - (117° + 100° + 133° + 108°) = 82°$
Sada možemo izračunati kut α'_3:
$\alpha'_3 = 180° - 82° = 98°$.
Zbrojimo li sve vanjske kutove ovog peterokuta dobit ćemo da on iznosi 360°.
$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 + \alpha'_4 + \alpha'_5 = 63° + 80° + 98° + 47° + 72° = 360°$

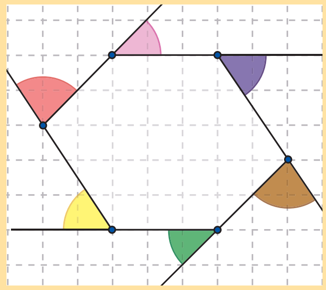
Općenito za sve mnogokute vrijedi:

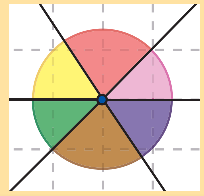
Važno

Zbroj veličina svih vanjskih kutova *n*-terokuta je 360°.

Papirnati dokaz

1. Nacrtaj neki mnogokut, koji god želiš.
2. Nacrtaj mu vanjske kutove i oboji svaki drugom bojom.
3. Izreži svaki vanjski kut
4. Spoji ih vrhovima i vidjet ćeš da čine puni kut.

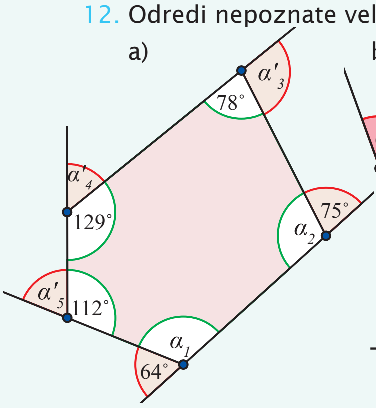




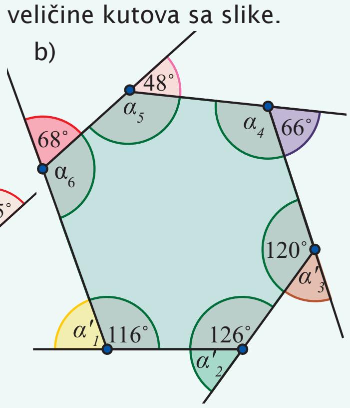
zbroj vanjskih kutova mnogokuta

Z a d a c i

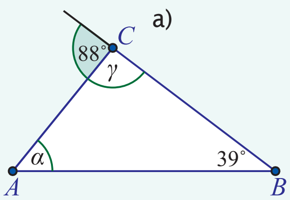
10. Koliki je zbroj svih vanjskih kutova
    a) trokuta; b) četverokuta;
    c) peterokuta; d) šesterokuta;
    e) pedeseterokuta; f) bilo kojeg *n*-terokuta?
11. Kojem je mnogokutu zbroj svih vanjskih kutova petnaest puta veći od broja *n* njegovih vrhova?
12. Odredi nepoznate veličine kutova sa slike.
    a)



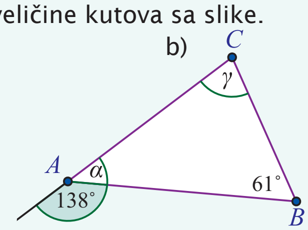
b)



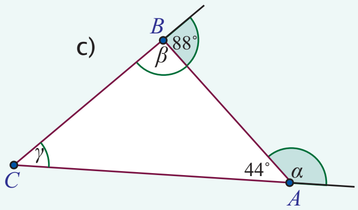
13. Odredi nepoznate veličine kutova sa slike.
    a)



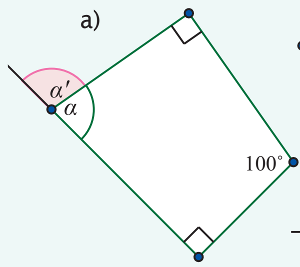
b)



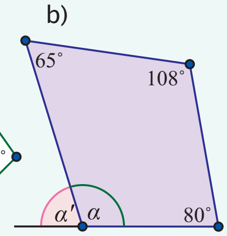
c)



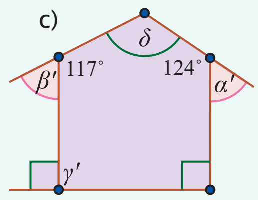
14. Odredi nepoznate veličine kutova sa slike.
    a)



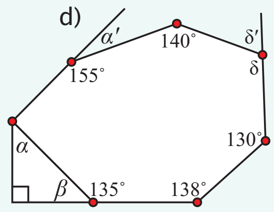
b)



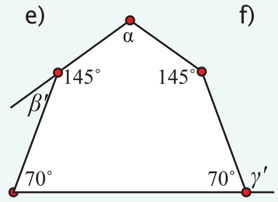
c)



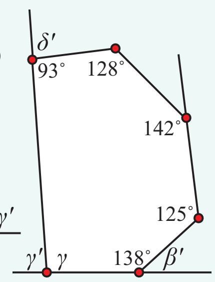
d)



e)



f)



15. Koji mnogokut ima zbroj svih unutarnjih kutova 12 puta veći od zbroja svih vanjskih kutova?
16. Razlika između zbroja svih unutarnjih i zbroja svih vanjskih kutova nekog mnogokuta je 720°. Koliko kutova ima taj mnogokut?
17. Površina stola je u obliku mnogokuta. Koliko stranica ima površina stola ako zbroj svih njegovih unutarnjih kutova iznosi dvadeset pravih kutova?
18. Ako se nekom mnogokutu broj stranica poveća za 3, zbroj unutarnjih kutova poveća se dva puta. Koliko stranica ima taj mnogokut?

Vježbalica

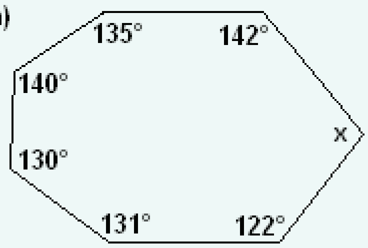
1. Koliko je zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta ako mu je broj vrhova:

   a) $n = 7$; b) $n = 19$; c) $n = 22$;

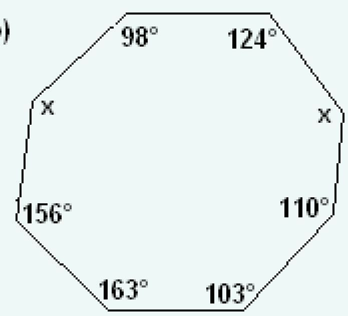
   d) $n = 43$; e) $n = 41$; f) $n = 27$?

2. U mnogokutima na slici nekim je kutovima veličina nepoznata. Izračunaj veličine tih kutova.

a)



b)



3. Koliko vrhova, stranica i kutova ima mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova

   a) 4140°; b) 4500°; c) 2520°;

   d) 3780°; e) 2880°; f) 2700°?

4. Postoji li mnogokut kome je zbroj svih unutarnjih kutova

   a) 2800°; b) 5580°; c) 2300°; d) 2500°.

5. Koliko je zbroj svih unutarnjih kutova n-terokuta ako mu je broj dijagonala iz jednog vrha:

   a) 7 dijagonala,

   b) 11 dijagonala,

   c) 34 dijagonale,

   d) 42 dijagonale?

6. Koliko ukupno dijagonala ima mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova

   a) 1620°; b) 1260°; c) 3420°;

   d) 3960°?

7. Koliki je zbroj svih vanjskih kutova

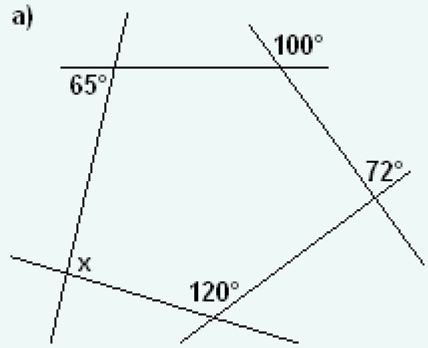
   a) osmerokuta;

   b) petnaesterokuta;

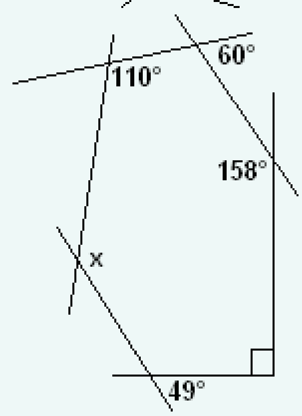
   c) dvadeseterokuta?

8. Odredi nepoznate veličine kutova sa slike.

a)



b)



9. Koji mnogokut ima zbroj svih unutarnjih kutova 11 puta veći od zbroja svih vanjskih kutova?

10. Koji mnogokut ima zbroj svih unutarnjih kutova 21 puta veći od zbroja svih vanjskih kutova?

11. Koji mnogokut ima zbroj svih unutarnjih kutova 15 puta veći od zbroja svih vanjskih kutova?

12. Ako se nekom mnogokutu poveća broj stranica za 8 zbroj unutarnjih kutova poveća se 3 puta. Koliko stranica ima taj mnogokut?

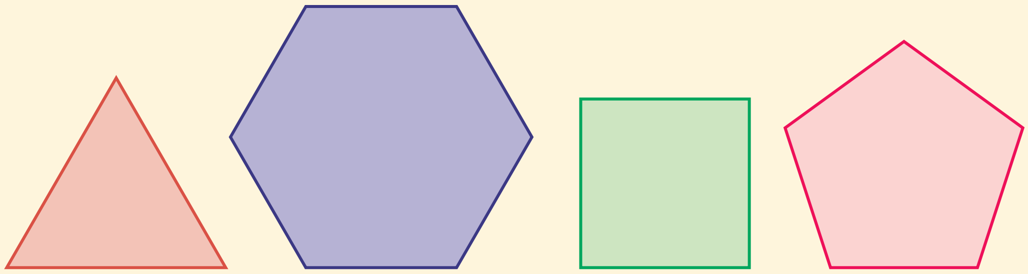
13. Ako se nekom mnogokutu poveća broj stranica za 8 zbroj unutarnjih kutova poveća se 5 puta. Koliko stranica ima taj mnogokut?

14. Ako se nekom mnogokutu poveća broj stranica za 12 zbroj unutarnjih kutova poveća se 4 puta. Koliko stranica ima taj mnogokut?

6.4. Pravilni mnogokuti

Stranice i kutovi mnogokuta

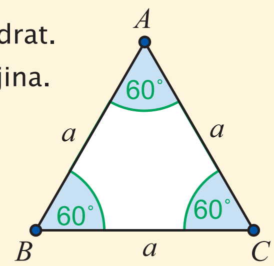
Izmjeri stranice i kutove svakom od mnogokuta na slici.

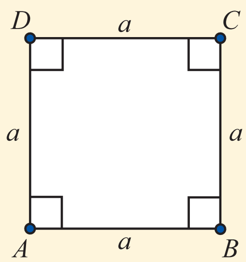


Što primjećuješ?

Među svim mnogokutima svojim skladom se naročito ističu **pravilni mnogokuti.**

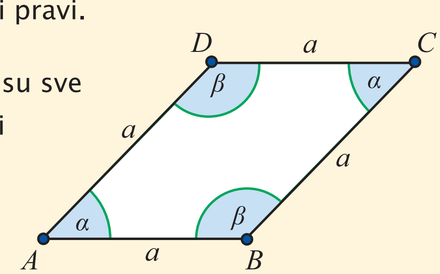
Najjednostavniji pravilni mnogokuti su jednakostraničan trokut i kvadrat. Jednakostraničan trokut je trokut kojem su sve stranice jednakih duljina. Također znamo da su svi kutovi jednakostraničnog trokuta jednake veličine i iznose 60°.





Kvadrat je četverokut kojem su sve stranice jednakih duljina, a svi su mu kutovi pravi.

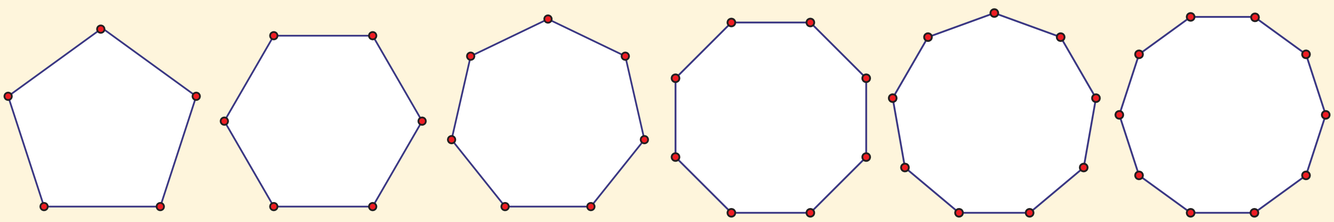
Romb je također četverokut kojem su sve stranice jednakih duljina. No kutovi romba nisu jednake veličine. Zato romb nije pravilni četverokut.



Važno

Mnogokut kojem su sve **stranice jednakih duljina** i svi **kutovi jednakih veličina** zove se pravilni mnogokut.

Na slici su pravilni



peterokut   šesterokut   sedmerokut   osmerokut   deveterokut   deseterokut

Primjer 1. Unutarnji kutovi pravilnih mnogokuta

Koliku veličinu mora imati svaki unutarnji kut pravilnog
a) peterokuta; b) šesterokuta?

Rješenje:

1. način
Zbroj svih unutarnjih kutova peterokuta je $K_5 = (5-2)\cdot 180° = 3\cdot 180° = 540°$.
Kako pravilni peterokut mora imati sve unutarnje kutove jednakih veličina, podijelit ćemo 540° s pet i dobiti veličinu unutarnjeg kuta peterokuta:
$\alpha_5 = 540° : 5 = 108°$.

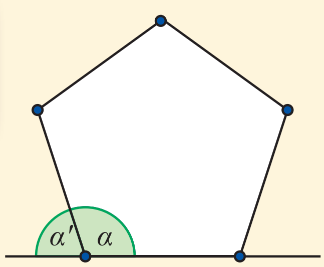
Isto tako, podijelimo li zbroj svih unutarnjih kutova šesterokuta sa šest, dobit ćemo unutarnji kut pravilnog šesterokuta:

$$\alpha_6 = \frac{K_6}{6} = \frac{4\cdot 180°}{6} = 120°$$

Unutarnji kut pravilnog mnogokuta

2. način
Već smo naučili da je zbroj unutarnjeg i pripadnog vanjskog kuta u svakom mnogokutu 180°. Kako su pravilnim mnogokutima svi unutarnji kutovi po veličini jednaki, onda im i svi vanjski kutovi moraju biti jednaki po veličini.

Vanjski kut pravilnog mnogokuta

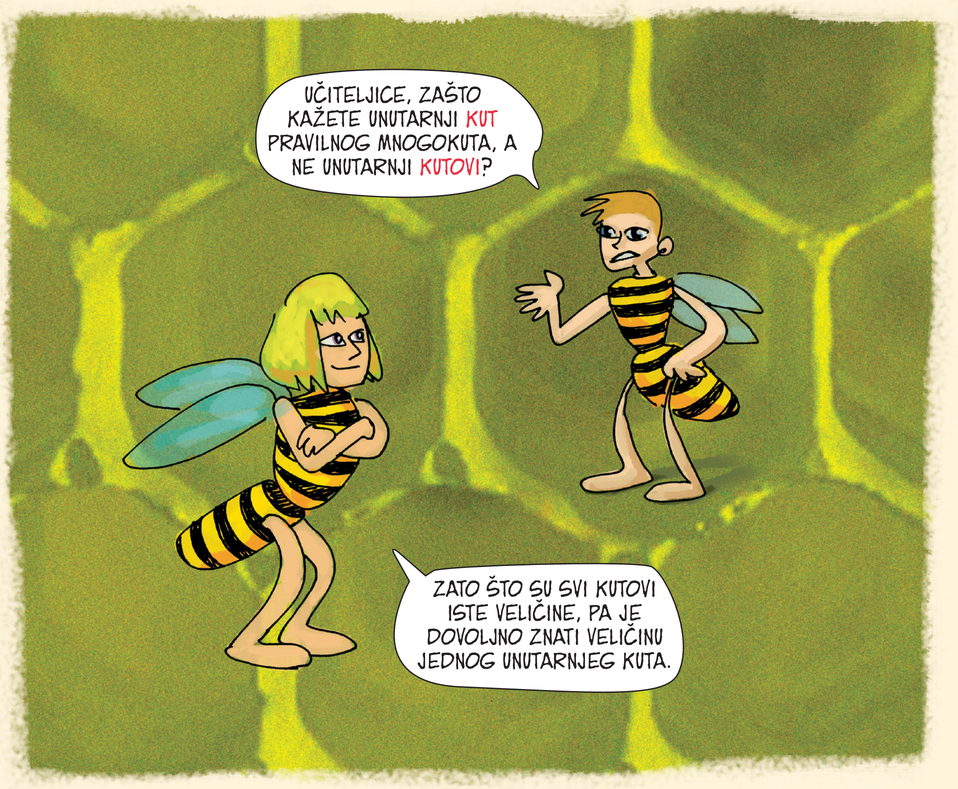


Veličinu unutarnjeg kuta pravilnog mnogokuta računamo po formuli

$$\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$$

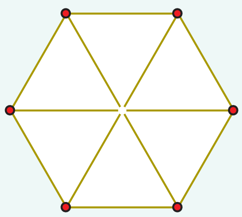
Veličinu jednog vanjskog kuta pravilnog mnogokuta izračunat ćemo ako zbroj svih vanjskih kutova, koji iznosi 360°, podijelimo s brojem njegovih vrhova n. Tako vanjski kut pravilnog peterokuta iznosi $\alpha'_5 = 360° : 5 = 72°$, a unutarnji kut $\alpha_5 = 180° - 72° = 108°$.

Na isti način može se izračunati vanjski kut pravilnog šesterokuta:
$\alpha'_6 = 360° : 6 = 60°$, a unutarnji kut
$\alpha_6 = 180° - 60° = 120°$.



Z a d a c i

1. Složite šibice kao na slici. Ako maknete šest unutarnjih šibica, koji ćete mnogokut dobiti? Je li on pravilan? Obrazloži odgovor!



2. Koliko iznosi unutarnji, a koliko vanjski kut pravilnog
   a) osmerokuta; b) deveterokuta; c) deseterokuta?
3. Ako je vanjski kut pravilnog mnogokuta 18°, koliki je unutarnji kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
4. Koliko iznosi vanjski kut pravilnog petnaesterokuta? A unutarnji kut?
5. Izračunaj veličinu unutarnjeg i vanjskog kuta pravlilnog
   a) sedmerokuta;
   b) jedanaesterokuta;
   c) trinaesterokuta.
6. Ako je unutarnji kut nekog pravilnog mnogokuta 157.5°, koliki je vanjski kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
7. Koji pravilni mnogokut ima unutarnji kut 160°?
8. Postoji li pravilan mnogokut kojemu je vanjski kut 35°? Obrazloži odgovor!
9. Koliki je unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako mu se iz jednog vrha može nacrtati 17 dijagonala?
10. Koliki je vanjski kut pravilnog mnogokuta koji ima 35 dijagonala?

Zapisivanje decimalnog broja u obliku stupnjeva, minuta i sekundi

Prilikom računanja s veličinama kutova džepno računalo rezultate zapisuje u obliku decimalnog broja. Nakon toga je potrebno taj decimalni broj zapisati u obliku stupnjeva, minuta i sekundi.

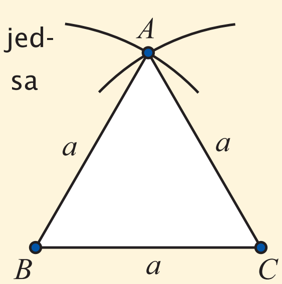
1. Za dobivanje zapisa u stupnjevima, minutama i sekundama pritisnite tipku ° ' ''
2. Pritiskom na strelicu ◄ pomaknite pokazivač jedno mjesto ulijevo na **>DMS**
3. Pritisnite tipku ENTER. U prvom retku zaslona bit će napisano ***Ans*** **> DMS**
4. Pritisnite tipku ENTER.

Primjer 2.
Kružnicaopisanajednakostraničnom trokutu

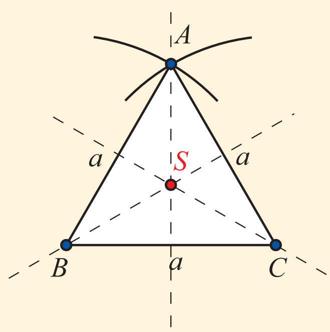
Konstruiraj jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ i opiši mu kružnicu.

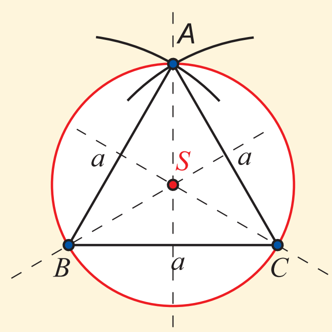
Rješenje:

Konstruirajmo neki jednakostranični trokut sa stranicom duljine *a*.

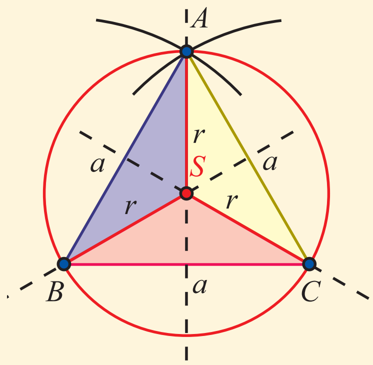


Već smo naučili da **trokutu opisana kružnica** prolazi kroz sva tri vrha trokuta. To znači da je središte te kružnice jednako udaljeno od vrhova trokuta. Sjetimo se svojstva simetrale dužine: svaka točka simetrale jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine. Kako su stranice trokuta dužine, zaključili smo da se središte opisane kružnice nalazi u sjecištu simetrala stranica trokuta.





Konstruirajmo simetrale stranica jednakostraničnog trokuta $\triangle ABC$. Ako smo dobro radili, one će se presjeći u jednoj točki S koja je središte trokutu $\triangle ABC$ opisane kružnice.

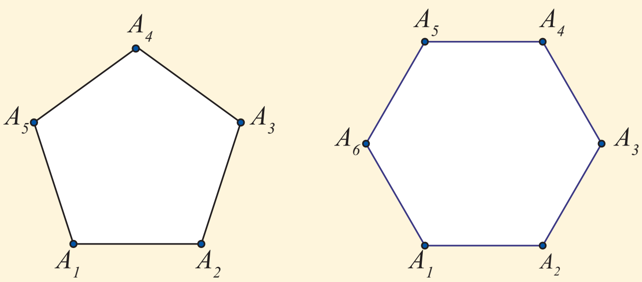


Spojimo li dužinama vrhove trokuta $\triangle ABC$ s točkom S, dobit ćemo tri jednakokračna trokuta: $\triangle ABS, \triangle BCS$ i $\triangle CAS$.

Na taj je način jednakostraničan trokut $\triangle ABC$ podijeljen na tri međusobno sukladna trokuta (prema poučku o sukladnosti trokuta stranica – stranica – stranica).

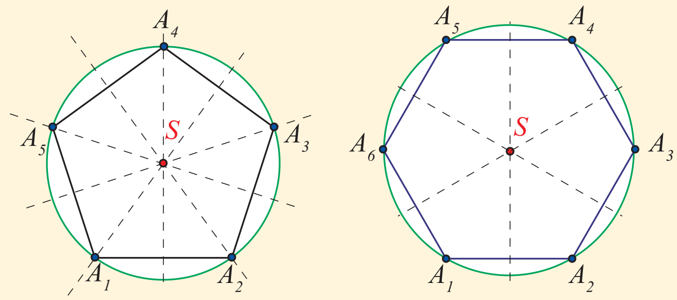
Primjer 3: Kružnicaopisanapravilnommnogokutu

Na slici su pravilni peterokut i šesterokut. Pogledajmo što možemo zaključiti iz simetrala stranica pravilnih mnogokuta.



Rješenje:

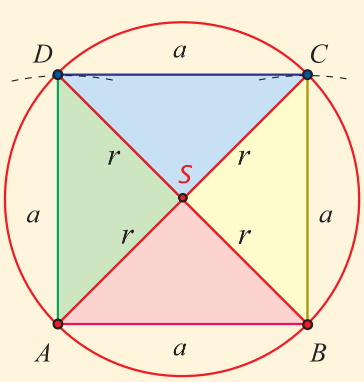
Pogledajmo simetrale stranica ovih mnogokuta, i njihova sjecišta. Neka se dvije simetrale sijeku u točki S.

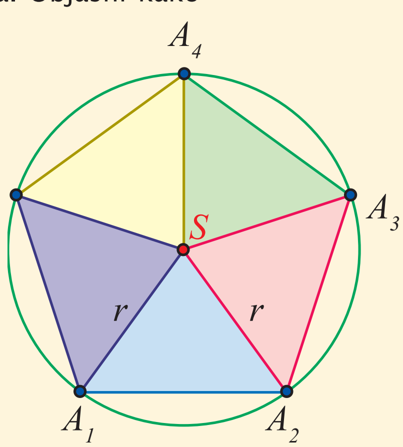


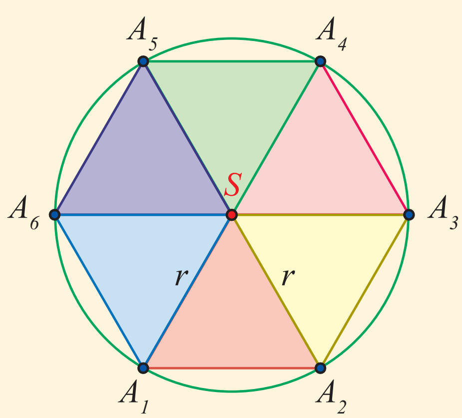
Primjećujemo da se simetrale svih stranica sijeku u jednoj točki S koja se zove središte **mnogokutu opisane kružnice.** Primijetimo da je na gornjoj slici $|SA_1|=|SA_2|$, a isto tako $|SA_2|=|SA_3|$ pa možemo zaključiti da je $|SA_1|=|SA_3|$, a isto vrijedi i za udaljenosti ostalih vrhova od točke S. Dužine koje spajaju središte S kružnice i vrhove mnogokuta su polumjeri tom mnogokutu opisane kružnice.

Primjer 4: Karakteristični trokut

Pogledaj mnogokute na slikama. Objasni kako su podijeljeni na trokute.







Spojimo li dužinama vrhove peterokuta s točkom S, peterokut će biti podijeljen na pet jednakokračnih trokuta koji su međusobno sukladni prema poučku stranica – stranica – stranica. Isto tako spojimo li dužinama vrhove šesterokuta s točkom S, šesterokut će biti podijeljen na šest jednakostraničnih, međusobno sukladnih trokuta. Pokušaj zaključiti zašto su ovi trokuti kod pravilnog šesterokuta jednakostranični?

Svakom pravilnom mnogokutu može se opisati kružnica.

Spojimo li dužinama vrhove mnogokuta sa središtem S kružnice, mnogokut će biti podijeljen na n jednakokračnih trokuta koji su međusobno sukladni (S-S-S).

karakteristični trokut

Ti trokuti zovu se **karakteristični trokuti** pravilnog n-terokuta.

Trokut kojemu su dva vrha susjedni vrhovi pravilnog mnogokuta, a treći središte kružnice opisane tom mnogokutu zove se **karakteristični trokut** pravilnog mnogokuta.

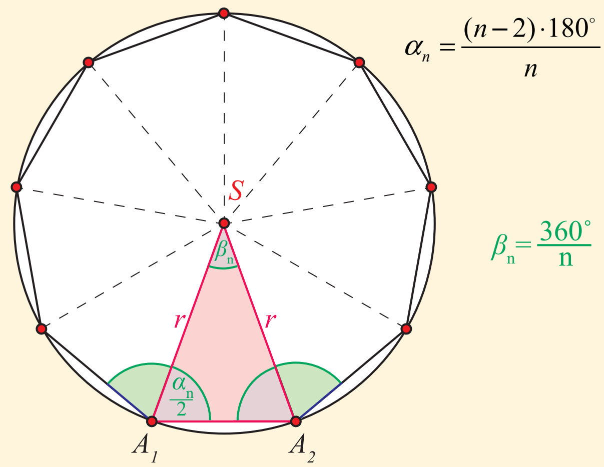
Duljina kraka karakterističnog trokuta jednaka je polumjeru r kružnice opisane pravilnom mnogokutu.

Pogledajmo kutove karakterističnog trokuta. Budući da su ovi trokuti sukladni, onda su im kutovi pri vrhu S jednake veličine, a svi oni zajedno čine puni kut, tj. kut od 360°. Stoga je kut pri vrhu svakog karakterističnog trokuta:

$$\beta_n = \frac{360°}{n}.$$

Taj kut zove se **središnji kut pravilnog** mnogokuta.

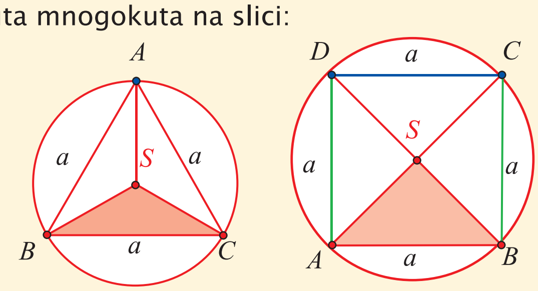
središnji kut pravilnog mnogokuta $\beta_n = \frac{360°}{n}$

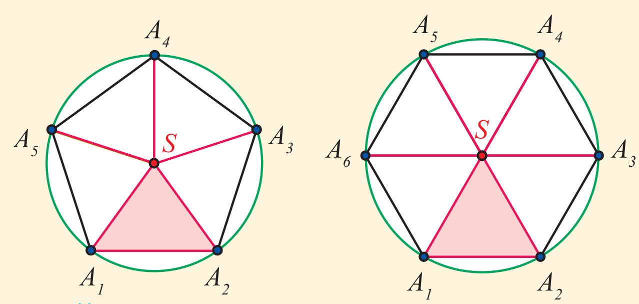


Isto tako iz međusobne sukladnosti karakterističnih trokuta zaključujemo da su im kutovi pri osnovici sukladni. Pogledajte kut što ga čine kut pri osnovici jednoga karakterističnog trokuta s kutom pri osnovici drugoga njemu susjednoga karakterističnog trokuta. Lijepo se vidi da je njihov zbroj jednak unutarnjem kutu pravilnog mnogokuta. Stoga su kutovi uz osnovicu karakterističnoga trokuta $\frac{\alpha_n}{2}$.

Primjer 5. Izračunavanje kutova karakterističnoga trokuta

Izračunaj veličine kutova karakterističnoga trokuta mnogokuta na slici:





Rješenje:

Već smo rekli da se kut pri vrhu karakterističnoga trokuta zove središnji kut pravilnog mnogokuta.

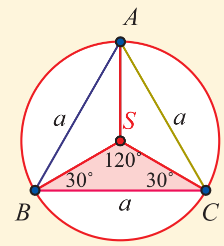
a) Jednakostraničnom trokutu je $n = 3$ pa je središnji kut $\beta_3 = \dfrac{360°}{3} = 120°$.
Kako je zbroj kutova u trokutu 180°, onda je veličina kuta pri osnovici karakterističnoga trokuta jednaka polovini razlike $180° - 120° = 60°$. Dakle kutovi pri osnovici su po 30°.

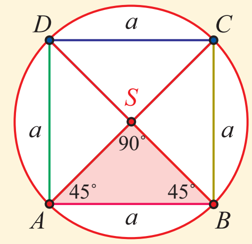
b) Kvadratu je $n = 4$ pa je središnji kut $\beta_4 = \dfrac{360°}{4} = 90°$. Kutovi pri osnovici su po 45°.

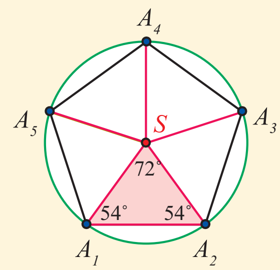
c) Središnji kut pravilnoga peterokuta $\beta_5 = \dfrac{360°}{5} = 72°$, a kutovi pri osnovici su po 54°.

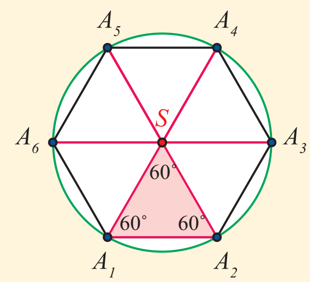
d) Pravilnom šesterokutu središnji je kut $\beta_6 = \dfrac{360°}{6} = 60^\circ$, a i kutovi pri osnovici su po 60°.

pravilnom šesterokutu $a_6 = r$







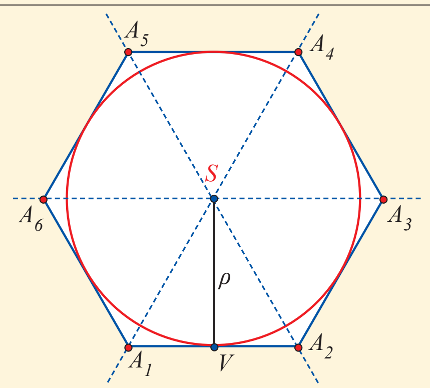


Vidimo da su sva tri kuta karakterističnoga trokuta pravilnoga šesterokuta jednake veličine. Znači da su mu i stranice jednake duljine. Dakle duljina stranice pravilnoga šesterokuta jednaka je polumjeru opisane mu kružnice.

Primjer 5. Upisana kružnica

Svakom pravilnom mnogokutu možemo na sličan način i upisati kružnicu. Središte upisane kružnice je sjecište simetrala unutarnjih kutova, a kod pravilnih mnogokuta to središte poklapa se sa središtem opisane kružnice.

Polumjer upisane kružnice ujedno je i visina karakterističnog trokuta.



Z a d a c i

11. Što je karakteristični trokut pravilnog mnogokuta?
12. Kakav je karakteristični trokut svakog mnogokuta s obzirom na stranice?
13. Što su kraci, a što osnovica karakterističnom trokutu?
14. Kojem je pravilnom mnogokutu karakteristični trokut jednakostraničan?
15. Od koliko se karakterističnih trokuta sastoji pravilni
    a) trokut; b) četverokut; c) peterokut;
    d) šesterokut; e) sedmerokut; f) osmerokut;
    g) deveterokut; h) n-terokut?
16. Kolika je veličina središnjih kutova pravilnih mnogokuta iz prethodnog zadatka?
17. Koliki kut zatvaraju dijagonale kvadrata?
18. Lukina mama želi napraviti stolnjak u obliku pravilnog osmerokuta. Luka joj savjetuje da nacrta osam karakterističnih trokuta pravilnog osmerokuta. Ana tvrdi da je dovoljno nacrtati samo jedan karakteristični trokut ako se platno mudro presavije.
    a) Je li Ana u pravu? Isprobajte to na modelu od papira formata A-4 pa obrazložite svoj odgovor.
    b) Napravite stolnjak od papira u obliku osmerokuta.

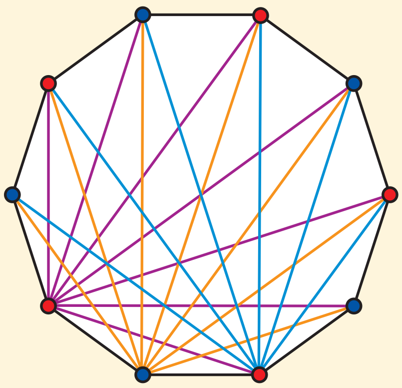
19. Izračunaj središnji i unutarnji kut pravilnog:
    a) šesterokuta; b) osmerokuta; c) deseterokuta;
    d) dvanaesterokuta; e) četrnaesterokuta;
    f) deveterokuta; g) jedanaesterokuta;
    h) trinaesterokuta; i) petnaesterokuta;
    j) sedamnaesterokuta.

20. Konstruiraj upisanu i opisanu kružnicu trokutu koji je:
    a) jednakostraničan;
    b) raznostraničan šiljastokutan;
    c) pravokutan; d) tupokutan.

21. Izračunaj tražene veličine za pravilne mnogokute.

broj stranica	4	5	7	18	24	20
K_n						
α_n						
β_n						
D_n						

6.5. Konstrukcije pravilnih mnogokuta



Vez

Mnogokutu na slici nacrtane su samo neke dijagonale. Nacrtaj preostale dijagonale raznim bojama.

Već smo naučili da je geometrijska konstrukcija geometrijski crtež koji smo nacrtali upotrebom samo ravnala i šestara. U šestom smo razredu naučili ravnalom i šestarom crtati kutove veličine 60°, 120°, 30°, 90° i 45°, ali isto tako i simetrale tih kutova, te simetrale dužina. Također, naučili smo osnovne konstrukcije trokuta. To će nam znanje trebati pri geometrijskoj konstrukciji pravilnih mnogokuta.

Ako ste zaboravili geometrijske konstrukcije kutova i osnovne konstrukcije trokuta, potražite ih na CD-u uz Peticu 7.

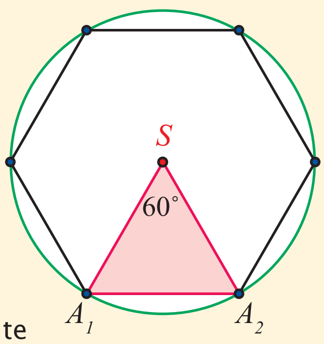
U sljedećim primjerima ćemo naučiti kako provesti geometrijsku konstrukciju nekih pravilnih mnogokuta ako im je zadan polumjer opisane kružnice. Iskoristit ćemo znanje o središnjem kutu pravilnog mnogokuta i osnovnu konstrukciju trokuta stranica - kut - stranica.

Primjer 1. Geometrijske konstrukcije pravilnog šesterokuta i jednakostraničnog trokuta

a) Konstruiraj pravilan šesterokut ako mu je polumjer opisane kružnice r = 1.5 cm.

b) Konstruiraj jednakostraničan trokut ako mu je polumjer opisane kružnice r = 2.5 cm.

Rješenje:



U prethodnom poglavlju uvjerili smo se da je središnji kut pravilnoga šesterokuta

$$\beta_6 = \frac{360°}{6} = 60°.$$

1. Nacrtamo točku S te konstruiramo kružnicu $k(S, 1.5 \text{ cm})$ na kojoj istaknemo jednu njezinu točku, primjerice A_1;

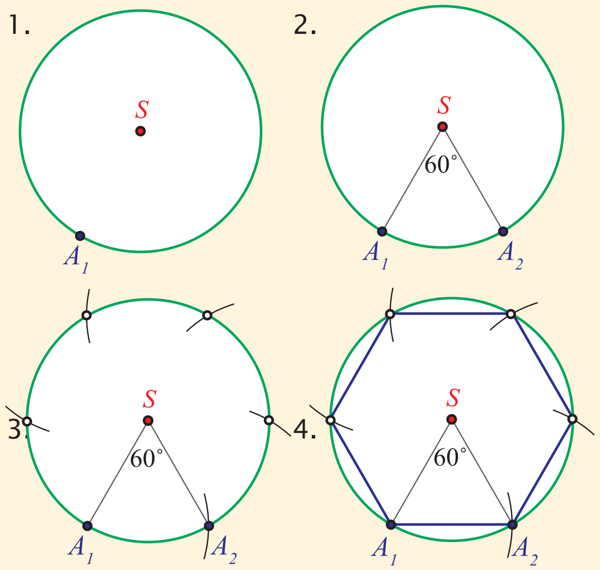
2. ne mijenjajući otvor šestara, iz točke A_1

presiječemo kružnicu k – dobili smo $\angle A_1SA_2 = 60°$.

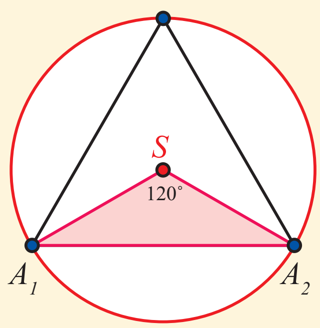
3. nastavimo prenositi zadani polumjer po kružnici i tako dobivamo preostale vrhove šesterokuta;

konstrukcija pravilnoga šesterokuta

4. dužinama spojimo točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 i A_6. Dobili smo pravilan šesterokut.



b) Središnji kut jednakostraničnoga trokuta $\beta_3 = \dfrac{360°}{3} = 120°$.



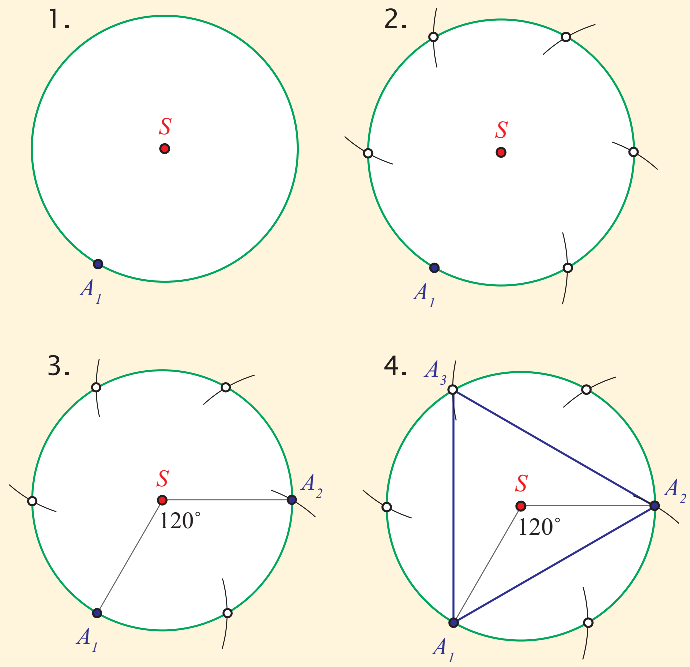
1. Nacrtamo točku S te konstruiramo kružnicu $k(S,\ 2.5\ \text{cm})$ na kojoj istaknemo jednu njezinu točku, primjerice A_1;

2. iz točke A_1 šestarom prenosimo zadani polumjer po kružnici;

3. kut $\angle A_1SA_2$ je kut od 120°;

4. dužinama spojimo svaku drugu točku. Dobili smo jednakostraničan trokut $\Delta A_1A_2A_3$.

jednakostraničan trokut upisan u kružnicu



Primjer 2. Geometrijska konstrukcija pravilnog dvanaesterokuta

Konstruiraj pravilan dvanaesterokut ako mu je polumjer opisane kružnice $r = 2$ cm.

Rješenje:

Središnji kut pravilnog dvanaesterokuta $\beta_8 = \dfrac{360°}{8} = 30°$, a to je polovina kuta od 60°.

Zato ćemo najprije konstruirati središnje kutove šesterokuta. Zatim ćemo ih prepoloviti simetralama kutova. Tako ćemo dobiti središnje kutove pravilnog dvanaesterokuta.

1. Nacrtamo točku S te konstruiramo kružnicu $k(S,\ 2.5\text{ cm})$ na kojoj istaknemo jednu njezinu točku, primjerice A_1;

2. iz točke A_1 šestarom prenosimo zadani polumjer po kružnici – dobili smo središnje kutove od 60°;

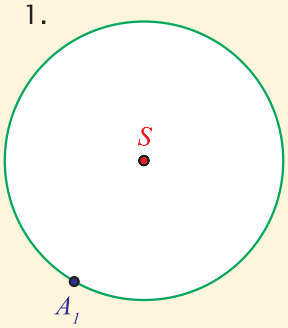
3. ovim kutovima konstruiramo simetrale i dobivamo središnje kutove od 30°;

4. simetrale kutova sijeku kružnicu k u preostalim vrhovima pravilnog dvanaesterokuta.

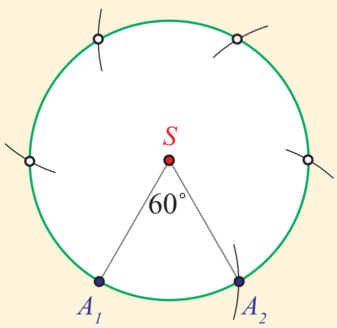
5. Spojimo dužinama točke A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11} i A_{12} i dobili smo pravilni dvanaesterokut.

konstrukcija pravilnog dvanaesterokuta

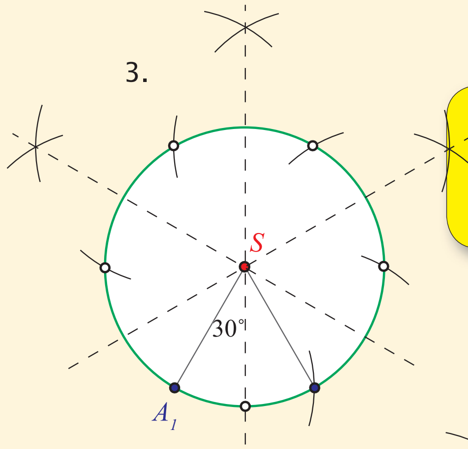
1.



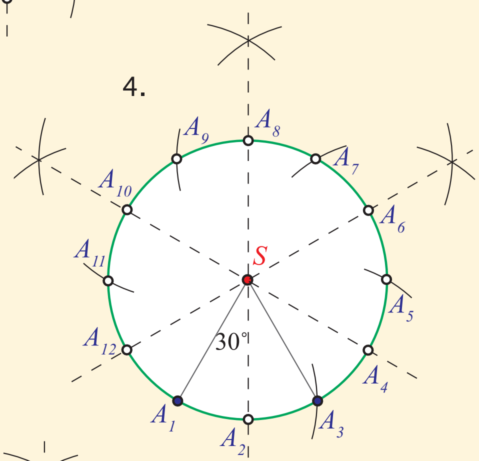
2.



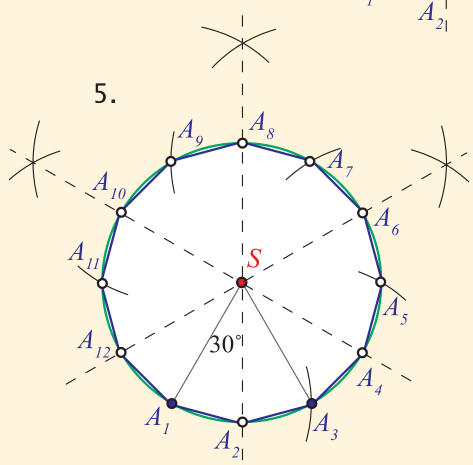
3.



4.



5.



Z a d a c i

1. Konstruiraj pravilan šesterokut ako mu je polumjer opisane kružnice
   a) $r = 2$ cm; b) $r = 3$ cm; c) $r = 3.5$ cm.
2. Konstruiraj jednakostraničan trokut ako mu je polumjer opisane kružnice
   a) $r = 3$ cm; b) $r = 3.5$ cm; c)) $r = 4$ cm.
3. U kružnicu promjera 6 cm upiši šesterokut i nacrtaj sve njegove dijagonale.
4. U kružnicu polumjera 4 cm upiši pravilan dvanaesterokut. Nacrtaj sve njegove dijagonale.
5. Na kružnici promjera 9 cm konstruiraj vrhove pravilnog dvanaesterokuta. Simetralom kutova podijeli središnje kutove pravilnog dvanaesterokuta.

   a) Kojem je pravilnom mnogokutu dobiveni kut središnji kut?

   b) Nacrtaj stranice i povuci sve dijagonale pravilnom mnogokutu koji si dobio.

Primjer 3. Geometrijska konstrukcija pravilnoga četverokuta i pravilnog osmerokuta

a) Konstruiraj kvadrat upisan u kružnicu polumjera r = 2 cm.

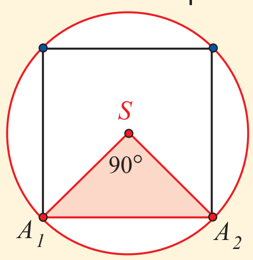
b) Konstruiraj osmerokut upisan u kružnicu polumjera r = 2 cm.

Rješenje:

a) Treba konstruirati kvadrat ako mu je zadan polumjer opisane kružnice.

Središnji kut kvadrata $\beta_4 = \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

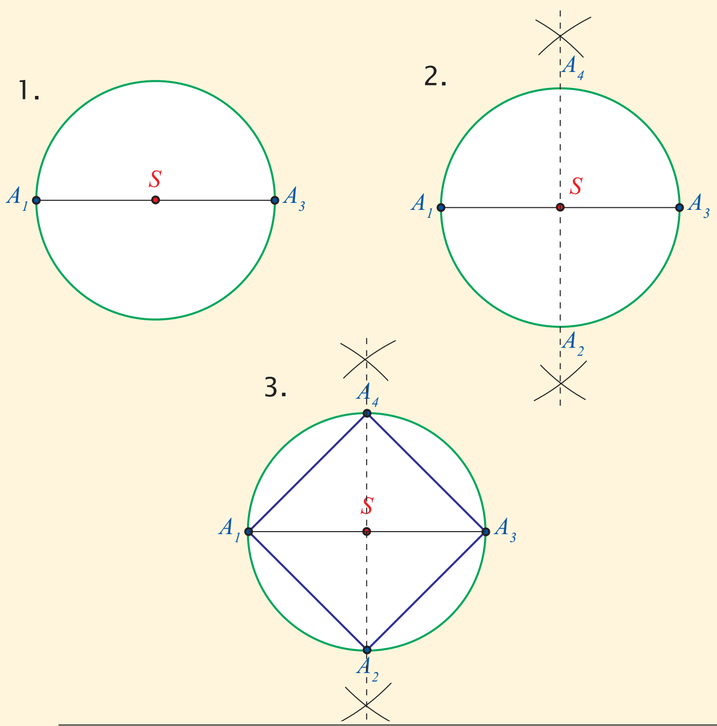
kvadrat upisan u kružnicu



1. Nacrtamo točku S te konstruiramo kružnicu $k(S,\ 2\text{ cm})$ - istaknemo jedan njezin promjer $\overline{A_1A_3}$;

2. konstruiramo simetralu dužine $\overline{A_1A_3}$;

3. simetrala dužine $\overline{A_1A_3}$ siječe kružnicu u preostala dva vrha kvadrata A_2 i A_3. Spojimo vrhove kvadrata A_1, A_2, A_3 i A_4.



b) Središnji kut pravilnog osmerokuta

$\beta_8 = \dfrac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, a to je polovina kuta od 90°.

Zato ćemo najprije konstruirati središnje kutove kvadrata. Zatim ćemo ih prepoloviti simetralama kutova. Tako ćemo dobiti središnje kutove pravilnog osmerokuta.

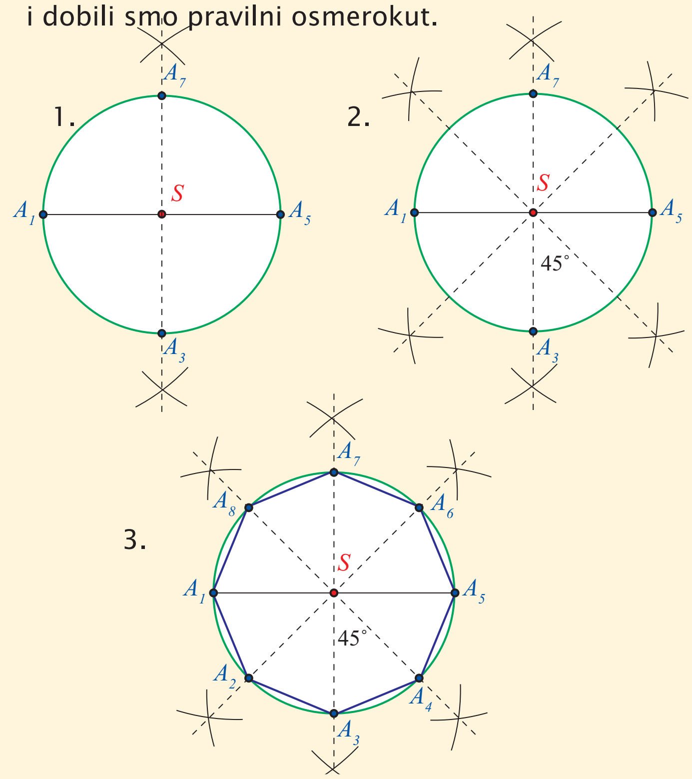
konstrukcija pravilnog osmerokuta

1. Nacrtamo točku S te konstruiramo kružnicu $k(S,\ 2\text{ cm})$ i istaknemo dva njezina međusobno okomita promjera i $\overline{A_3A_7}$ - dobili smo četiri središnja kuta od 90°;

2. ovim kutovima konstruiramo simetrale i dobivamo središnje kutove od 45°;

3. simetrale kutova sijeku kružnicu k u preostala četiri vrha osmerokuta.

Spojimo vrhove A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 i A_8 i dobili smo pravilni osmerokut.

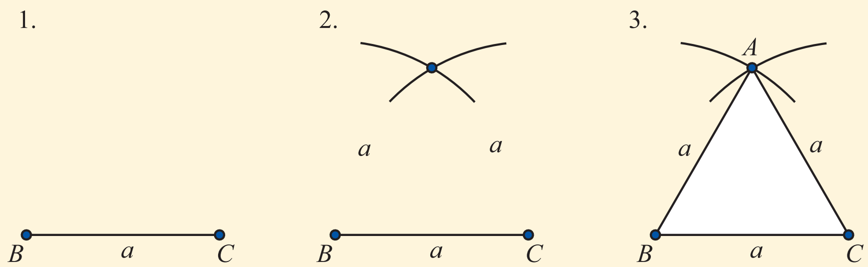


Z a d a c i

6. Konstruiraj kvadrat upisan u kružnicu polumjera
   a) r = 3 cm; b) r = 4 cm; c) r = 4.5 cm.
7. Konstruiraj kvadrat kojemu je duljina dijagonale 5 cm.
8. Konstruiraj osmerokut upisan u kružnicu polumjera
   a) r = 4 cm; b) r = 4.5 cm; c) r = 6 cm
9. U kružnicu promjera 9.5 cm upiši osmerokut i nacrtaj sve njegove dijagonale iz samo jednog vrha.
10. Nacrtaj dvije koncentrične kružnice i u manju upiši kvadrat, a u veću pravilan osmerokut. Probaj osmisliti dobiveni crtež.

Primjer 4.
Konstrukcija pravilnog mnogokuta ako je zadana duljina stranice

U sljedećim ćemo primjerima naučiti kako geometrijski konstruirati neke pravilne mnogokute ako im je **zadana duljina stranice**.
Znamo konstruirati jednakostraničan trokut kojemu je zadana duljina stranice.



Opiši u tri koraka konstrukciju jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine a.

Primjer 5. Crtanje pravilnog peterokuta sa zadanom stranicom

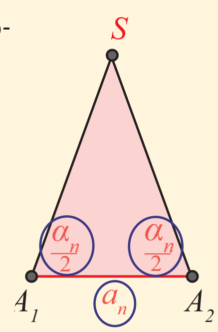
Nacrtaj pravilni peterokut kojemu je stranica duljine 3 cm.

Rješenje:

Iskoristit ćemo znanje o osnovnom crtežu trokuta kut - stranica - kut (K-S-K).

Pogledajmo skicu karakterističnoga trokuta nekoga pravilnog mnogokuta.

konstrukcija pravilnog peterokuta



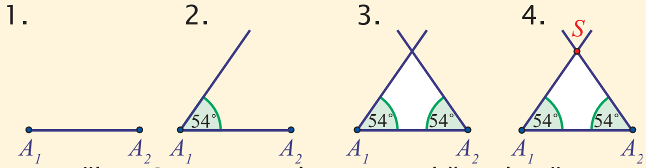
Duljina osnovice je poznata. To je zadana duljina stranice pravilnog mnogokuta. Također, poznati su nam kutovi pri osnovici. Njihova je veličina polovina unutarnjega kuta pravilnog mnogokuta.

Unutarnji kut pravilnog peterokuta $\alpha_5 = \frac{(5-2)\cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Ovaj ćemo kut nacrtati pomoću kutomjera.

Nacrtajmo karakteristični trokut:

1. nacrtamo dužinu $\overline{A_1A_2}$ duljine a = 3 cm;
2. u vrhu A_1 nacrtamo kut $\frac{\alpha_5}{2} = 54^\circ$ tako da mu je jedan krak $\overline{A_1A_2}$;
3. u vrhu A_2 nacrtamo kut $\frac{\alpha_5}{2} = 54^\circ$ tako da mu je jedan krak $\overline{A_2A_1}$;

4. sjecište krakova tih kutova je točka S.

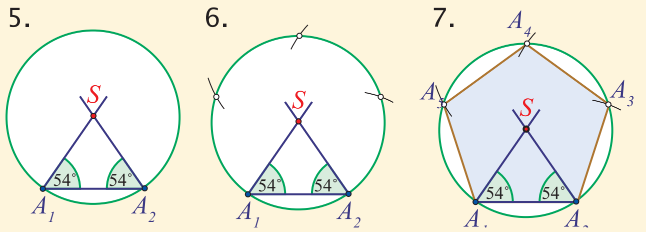


Za točku S znamo da je središte kružnice opisane pravilnom peterokutu te daljnju konstrukciju izvodimo na već poznati način:

5. nacrtamo kružnicu $k(S, |SA_1|)$;

6. po kružnici k nanesemo dužinu $\overline{A_1A_2}$ još četiri puta, počinjući od točke A_2.

7. dužinama spojimo vrhove pravilnoga peterokuta $A_1A_2A_3A_4A_5$



Primijetimo da se i drugi pravilni mnogokuti mogu konstruirati na jednak način.

Inženjeri i arhitekti konstruiraju i crtaju sve - od namještaja do aviona uz pomoć osobnog računala i uz upotrebu raznih CAD programa. CAD je skraćenica za Computer Aided Design - računalom potpomognut dizajn.
Konstrukcija pravilnih mnogokuta pomoću računala savršeno je precizna i lakše ju je izvesti.
Na CD-uz ovaj udžbenik naći ćete gotove primjere prikazane po koracima konstrukcije. Tako ćete i sami moći konstruirati pravilne mnogokute pomoću programa za dinamičnu geometriju, nacrtati im sve dijagonale i još puno toga.

Z a d a c i

11. Konstruiraj kvadrat kojemu je stranica a = 5 cm, pa mu opiši kružnicu.

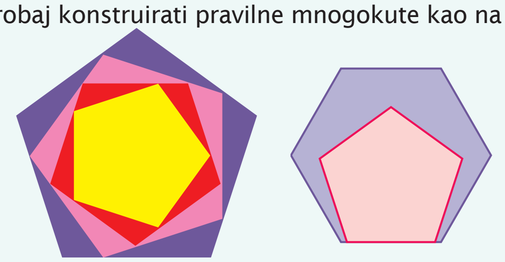
12. Konstruiraj jednakostraničan trokut kojemu je stranica 3 cm pa mu opiši kružnicu.

13. Konstruiraj pravilan peterokut kojemu je duljina stranice
a) 4 cm; b) 3.5 cm; c) 4 cm.

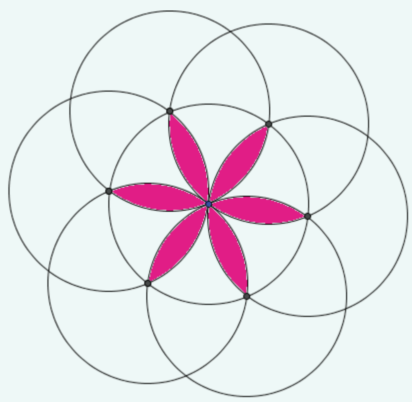
14. Koliki je polumjer kružnice opisane pravilnom šesterokutu kojemu je stranica dugačka 3 cm? Konstruiraj taj šesterokut.

15. Pravilnom deveterokutu stranica je dugačka 2 cm. Konstruiraj njegov karakteristični trokut. Zatim nacrtaj kružnicu sa središtem u vrhu karakterističnog trokuta i polumjerom koji je jednak duljini kraka trokuta. U šestar uzmi duljinu stranice deveterokuta i prenesi je po kružnici još osam puta. Spoji dužinama vrhove deveterokuta.

16. Probaj konstruirati pravilne mnogokute kao na slici.



17. Nacrtaj u bilježnici ovu konstrukciju samo šestarom i olovkom. Koji mnogokut ćemo nacrtati ako redom spojimo točke?



18. Pomoću karakterističnog trokuta nacrtaj pravila peterokut duljine stranice:
a) 2.5 cm; b) 4.5 cm; c) 5 cm; d) 38 mm.

19. Pomoću karakterističnog trokuta nacrtaj pravilan sedmerokut duljine stranice:
a) 2 cm; b) 3 cm; c) 36 mm; d) 42 mm.

20. Pomoću karakterističnog trokuta nacrtaj;
a) pravilan deseterokut suljine stranice 3 cm;
b) pravilan dvanaesterokut duljine stranice 25 mm;
c) pravilan petnaesterokut duljine stranice 3.5 cm.

Vježbalica

1. Izračunaj veličinu unutarnjeg i vanjskog kuta pravilnog n-terokuta ako je:

   a) $n = 18$; b) $n = 15$;

   c) $n = 20$; d) $n = 25$.

2. Koji pravilni mnogokut ima unutarnji kut 135°?
3. Ako je unutarnji kut nekog pravilnog mnogokuta 150°, koliki je vanjski kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
4. Ako je unutarnji kut nekog pravilnog mnogokuta 165°, koliki je vanjski kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
5. Ako je unutarnji kut nekog pravilnog mnogokuta 162°, koliki je vanjski kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
6. Ako je unutarnji kut nekog pravilnog mnogokuta 168°, koliki je vanjski kut tog mnogokuta? Koji je to mnogokut?
7. Postoji li pravilan mnogokut kojemu je vanjski kut 40°? Obrazloži odgovor!
8. Postoji li pravilan mnogokut kojemu je vanjski kut 46°? Obrazloži odgovor!
9. Postoji li pravilan mnogokut kojemu je vanjski kut 20°? Obrazloži odgovor!
10. Koliki je unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako mu se iz jednog vrha može nacrtati 11 dijagonala?
11. Koliki je unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako mu se iz jednog vrha može nacrtati 23 dijagonala?
12. Koliki je unutarnji kut pravilnog mnogokuta ako mu se iz jednog vrha može nacrtati 21 dijagonala?
13. Koliki je vanjski kut pravilnog mnogokuta koji ima 135 dijagonala?
14. Koliki je vanjski kut pravilnog mnogokuta koji ima 170 dijagonala?
15. Koliki je vanjski kut pravilnog mnogokuta koji ima 90 dijagonala?
16. Izračunaj kutove karakterističnog trokuta pravilnog n-terokuta ako je:

    a) $n = 7$; b) $n = 8$; c) $n = 10$;
    d) $n = 15$; e) $n = 20$.

17. Izračunaj kutove karakterističnog trokuta pravilnog n-terokuta ako je:

    a) $n = 6$; b) $n = 12$; c) $n = 14$;
    d) $n = 21$; e) $n = 18$.

18. Konstruiraj šesterokut upisan u kružnicu polumjera

    a) $r = 3.2$ cm; b) $r = 4.7$ cm.

19. Konstruiraj kvadrat upisan u kružnicu polumjera

    a) $r = 4.2$ cm; b) $r = 3.6$ cm.

20. Konstruiraj kvadrat kojemu je duljina dijagonale 6 cm.
21. Konstruiraj osmerokut upisan u kružnicu polumjera

    a) $r = 3.2$ cm; b) $r = 4.7$ cm.

22. Konstruiraj pravilan dvanaesterokut upisan u kružnicu polumjera

    a) $r = 5.2$ cm; b) $r = 4.3$ cm.

23. Konstruiraj pravilan šesterokut kojemu je duljina stranice

    a) $a = 4.4$ cm; b) $a = 3.6$ cm.

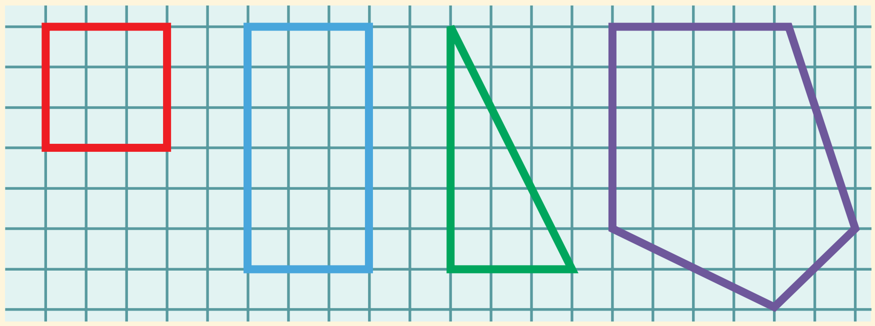
24. Konstruiraj pravilan peterokut kojemu je duljina stranice

    a) $a = 5.2$ cm; b) $a = 3.8$ cm.

6.6. Opseg i površina mnogokuta

Površina

Kolika je površina mnogokuta na slici?

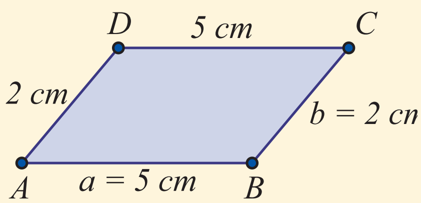


Dosad smo naučili računati površine pravokutnika, kvadrata, trokuta, paralelograma, trapeza i romba. U ovoj ćemo temi naučiti kako možemo izračunati opseg i površinu bilo kojeg mnogokuta.

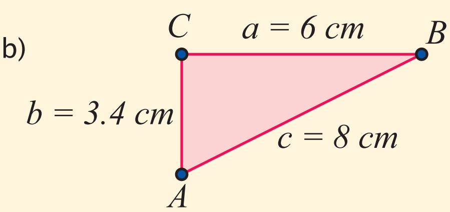
Primjer 1. Opseg mnogokuta

Izračunaj opseg svakog mnogokuta sa slike.

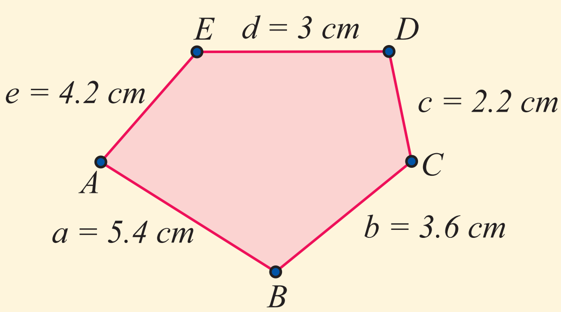
a)



b)



c)



Rješenje:

Prisjetimo se da je opseg trokuta, a isto tako i četverokuta, zbroj duljina svih njegovih stranica. Za raznostraničan trokut opseg je $o = a + b + c$, a za raznostraničan četverokut opseg je $o = a + b + c + d$.

a) Četverokut $ABCD$ ima dva para sukladnih stranica pa mu je opseg $o = 2 \cdot a + 2 \cdot b$ ili kraće $o = 2 \cdot (a + b)$.

$o = 2\ (a + b)$

$o = 2 \cdot (5 + 2)$ cm = $2 \cdot 7$ cm = 14 cm.

b) Trokut ΔABC je raznostraničan pa mu je opseg $o = a + b + c$, tj.

$o = 6$ cm + 3.4 cm + 8 cm = 17.4 cm.

c) Opseg raznostraničnog peterokuta izračunat ćemo po formuli $o = a + b + c + d + e$.

$o = 5.4$ cm + 3.6 cm + 2.2 cm + 3 cm + 4.2 cm = 18.4 cm.

Važno

Opseg mnogokuta

Opseg svakog mnogokuta je zbroj duljina svih njegovih stranica.

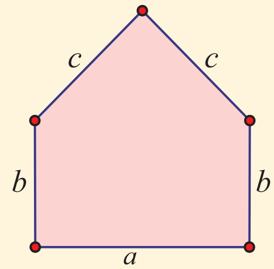
$o = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Primjer 2. Opseg mnogokuta sa stranicama jednake duljine

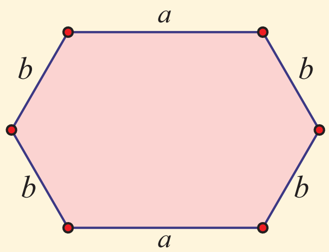
Mnogokutima na slici stranice jednakih duljina označene su jednakim malim slovom.

Napiši formule za opsege ovih mnogokuta.

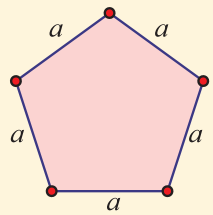
a)



b)



c)



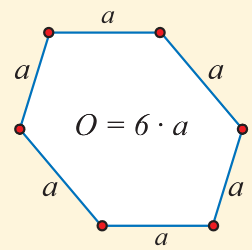
Rješenje:

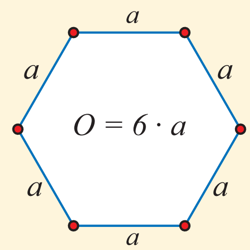
a) $o = a + b + c + c + b$ ili kraće
$o = a + 2 \cdot b + 2 \cdot c$

b) $o = a + b + b + a + b + b$ ili kraće
$o = 2 \cdot a + 4 \cdot b$

c) $o = a + a + a + a + a$ ili kraće $o = 5 \cdot a$. Primijetimo da peterokut sa slike c) nije pravilan iako su mu stranice jednakih duljina. Zašto? Jasno, kutovi su mu različitih veličina.

Pogledajte ova dva šesterokuta na slici.





kut nije pravilan, a drugi jest, no oba imaju stranice jednakih duljina, pa im je opseg $o = 6 \cdot a$.

Svakom n-terokutu kojem su sve stranice jednakih duljina, dakle i pravilnom, opseg izračunavamo po formuli $o = n \cdot a$.

opseg pravilnog mnogokuta
$o = n \cdot a$

Primjer 3. Duljine stranica izražene različitim mjernim jedinicama

Duljine stranica šesterokuta su:
a = 3 cm, b = 0.25 m, c = 1.3 dm, d = 1 dm, e = 36 mm i f = 6 cm.
Izračunaj opseg ovog mnogokuta.

Rješenje:

Treba izračunati opseg zadanoga šesterokuta. No, što primjećuješ?

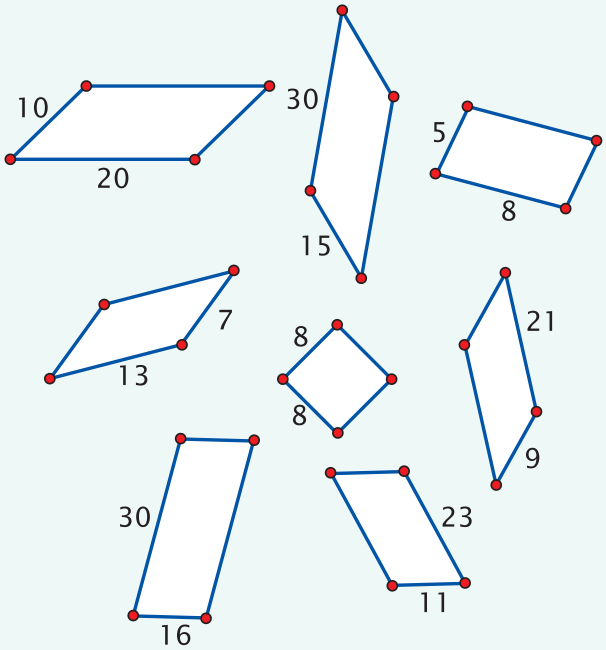
Duljine stranica treba izraziti u istim mjernim jedinicama, primjerice u cm.

a = 3 cm b = 0.25 m = 25 cm
c = 1.3 dm = 13 cm d = 1 dm = 10 cm
e = 36 mm = 3.6 cm f = 6 cm

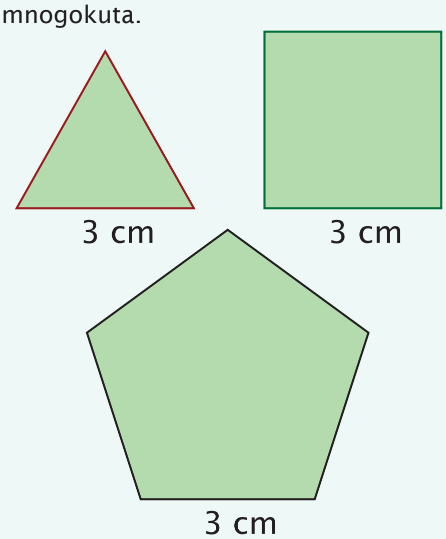
$o = a + b + c + d + e + f$
o = (3 + 25 + 13 + 10 + 3.6 + 6) cm = 60.6 cm

Zadaci

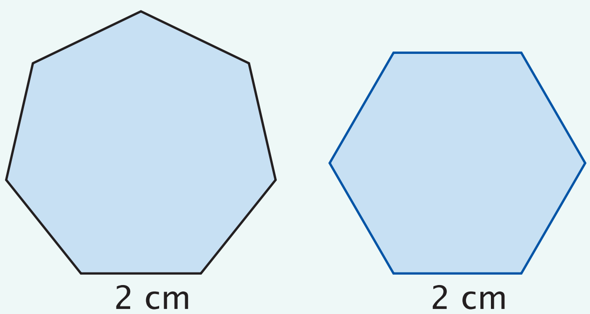
1. Napamet izračunaj opsege ovih paralelograma.

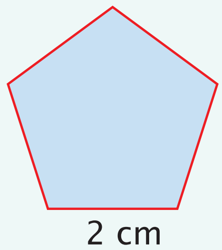


2. Napamet izračunaj opsege ovih pravilnih mnogokuta.



3. Na slici su pravilni mnogokuti. Svaki treba opasati ukrasnom vrpcom.

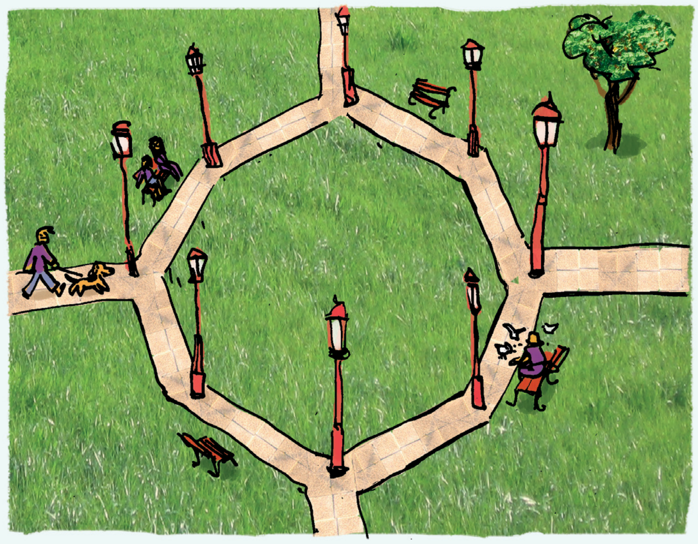




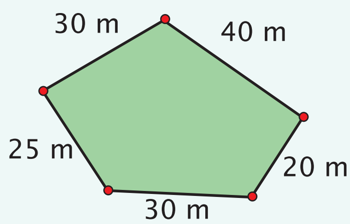
a) Procijeni za koji će mnogokut trebati najdulja vrpca.

b) Izračunaj točno koliko će vrpce trebati za svaki pravilni mnogokut sa slike?

4. Razmak između dviju susjednih svjetiljki u parku je 15 m. Kolika je duljina staze oko parka ako park ima oblik pravilnog osmerokuta, a svjetiljke su postavljene u svakom njegovu vrhu?



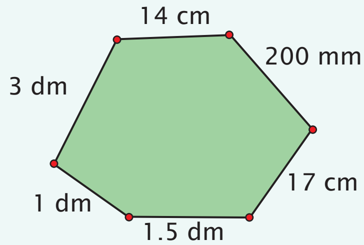
5. Matijin djed želi žicom ograditi svoju livadu.



a) Koliko mu je žice potrebno ako ograđuje livadu jednim redom žice?

b) Koliko mu je žice potrebno ako ograđuje livadu s tri reda žice?

6. Koliki je opseg mnogokuta sa slike?



7. Opseg pravilnog osmerokuta je 56 cm. Kolika je duljina jedne stranice tog osmerokuta?

8. Sedmerokut ima sve stranice jednakih duljina, a opseg mu je 59.5 dm. Kolika je duljina jedne njegove stranice?

9. Odredi duljinu nepoznate stranice paralelograma ako su zadani opseg i duljina jedne stranice:
a) o = 20 cm, b = 4 cm;
b) o = 145 dm, a = 5.2 m;

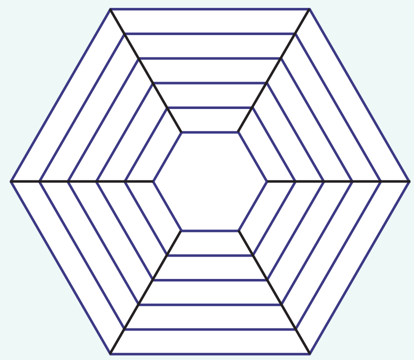
10. Peterokutu su duljine triju stranica jednake, tj. $a = b = c$ = 4.5 cm. Također, preostale dvije stranice međusobno su jednakih duljina. Kolika je duljina svake od njih ako je opseg peterokuta 2.35 dm?

11. Parkiralište ispred Lukine kuće ima oblik pravilnoga šesterokuta. Opseg parkirališta je 72 m. Oko parkirališta su postavljeni stupovi na razmaku od 2 m. Pritom je u svakom vrhu šesterokuta postavljen jedan stup, a ostali duž stranica šesterokuta, osim jedne stranice koja je ulaz na parkiralište. Koliko ima stupova oko parkirališta?

12. Kolika može biti najveća duljina jedne stranice igrališta koje ima oblik pravilnoga šesterokuta ako se mora opasati s najviše 45 m žice? Duljina stranice mora biti cijeli broj metara! Izračunaj napamet!

13. Može li se s 27 m žice opasati teren koji ima oblik pravilnoga peterokuta ako se zna da je jedna stranica dulja od 5.5 metara. Izračunaj napamet!

14. Majina mama plete uzorak za stolnjak, koji ima oblik pravilnoga šesterokuta kao na slici.



Ukupno je šest šesterokuta. Počela je plesti od najmanjeg, unutarnjeg šesterokuta. Svaki sljedeći šesterokut ima stranicu koja je za šest milimetara dulja od stranice prethodnoga šesterokuta. Kolika je duljina stranice najmanjeg šesterokuta ako je Majina mama potrošila 2.7 m plavoga konca na taj uzorak (ne računamo crni konac za povezivanje)?

15. Ivan priča Maji: "Znaš li onaj naš vrtni stol koji ima oblik pravilnoga osmerokuta. Svaka je stranica duga cijeli broj centimetara. Danas sam izvana obložio rubove. Potrošio sam točno 4.5 m trake." Maja mu odgovori: "Nešto si krivo izmjerio!" Objasni (ne računajući) kako Maja zna da Ivan nije dobro mjerio?

Primjer 4. Površina trokuta

a) Kolika je površina pravokutnog trokuta s katetama 3 cm i 4 cm?

b) Kolika je površina trokuta kojemu je duljina stranice b = 12 cm, a duljina pripadne visine v_b = 4 cm?

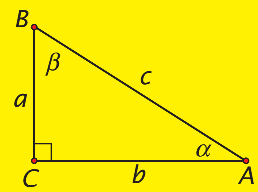
Rješenje:

a) Površina pravokutnog trokuta jednaka je polovini površine pravokutnika određenog katetama. Dakle, površina pravokutnog trokuta

$$P = \frac{\text{jedna kateta} \cdot \text{druga kateta}}{2}$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

površina pravokutnog trokuta
$P = a \cdot b : 2$

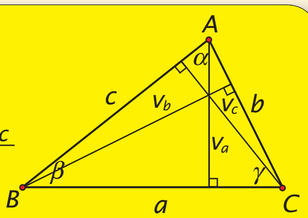


b) Površinu bilo kojeg trokuta možemo računati pomoću jedne stranice i visine na tu stranicu. Primjerice, $P=\frac{b\cdot v_b}{2}$.
U našem primjeru trokut ima površinu

$P=\frac{12\cdot 4}{2}=24\ \text{cm}^2$

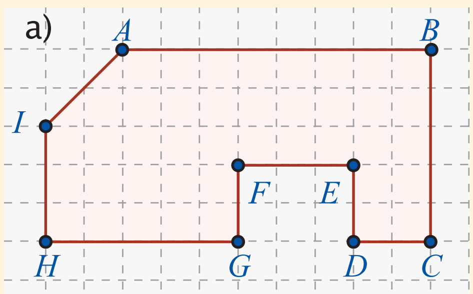
površina bilo kojega trokuta

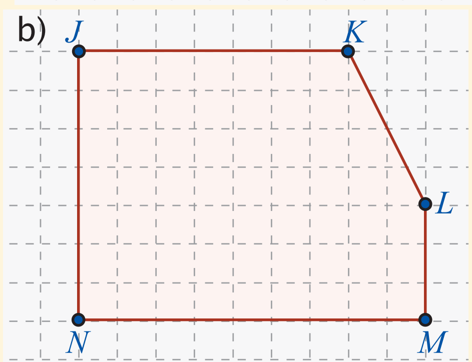
$$P_\Delta=\frac{a\cdot v_a}{2}=\frac{b\cdot v_b}{2}=\frac{c\cdot v_c}{2}$$

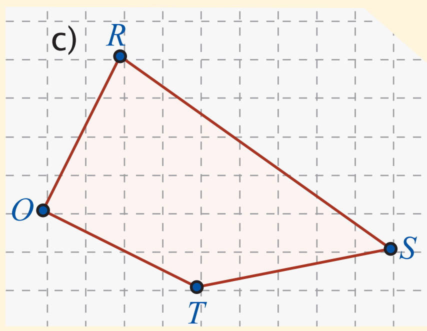


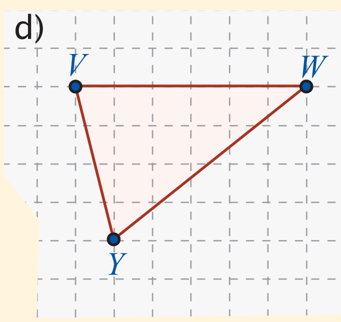
Primjer 5. Rastavljanje mnogokuta na trokute i pravokutnike

Izračunaj površine mnogokuta sa slike.









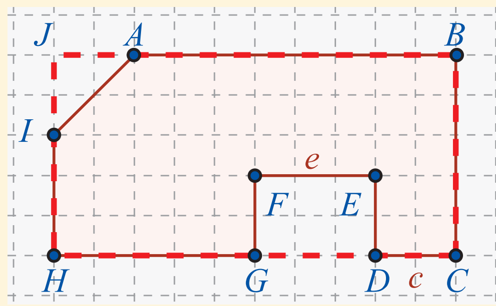
Rješenje:

Mnogokute sa slike rastavljat ćemo na geometrijske likove kojima znamo izračunati površinu.

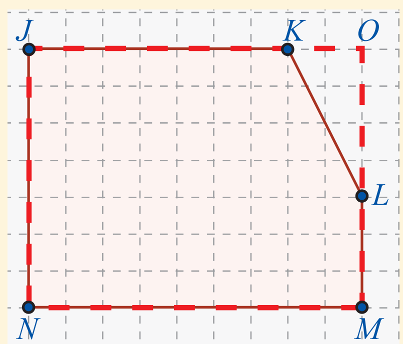
a) Površinu deveterokuta *ABCDEFGHI* možemo dobiti tako da od površine pravokutnika *JBCH* sa stranicama duljina 10 i 5 jediničnih dužina oduzmemo:

- površinu pravokutnika *FGDE* sa stranicama duljina 3 i 2 jedinične dužine i
- površinu jednakokračnoga pravokutnoga trokuta ΔAJI s katetama duljine 2 jedinične dužine:

$P_{ABCDEFGHI}=10\cdot 5-3\cdot 2-\frac{2\cdot 2}{2}=50-6-2=42$
jedinična kvadrata.



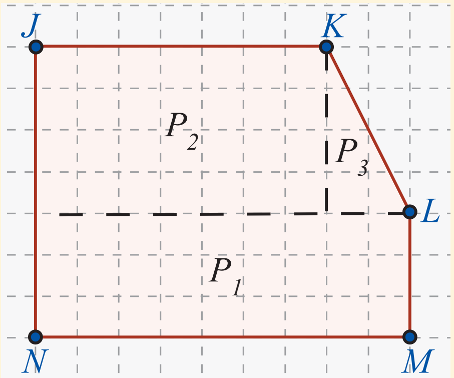
b) 1. način
Površinu peterokuta *JKLMN* možemo dobiti tako da od površine pravokutnika *JMNO* sa stranicama duljina 9 i 7 jediničnih dužina oduzmemo površinu pravokutnoga trokuta ΔKOL s katetama duljina 2 i 4 jedinične dužine:



$P_{JKLMN}=9\cdot 7-\dfrac{2\cdot 4}{2}=63-4=59$ jediničnih kvadrata.

2. način

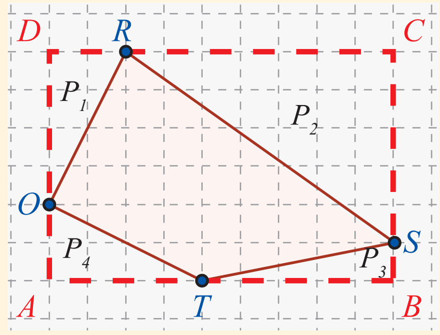
Razdijelimo mnogokut na nekoliko površina čije veličine lako možemo izračunati, na primjer:



$P_{JKLMN}=P_1+P_2+P_3=9\cdot 3+7\cdot 4+\dfrac{2\cdot 4}{2}=$
$=27+28+4=59$ jediničnih kvadrata.

c) Jedan je od načina da od površine pravokutnika *ABCD* sa stranicama duljine 9 i 7 jediničnih dužina oduzmemo površine pravokutnih trokuta označenih na slici sa

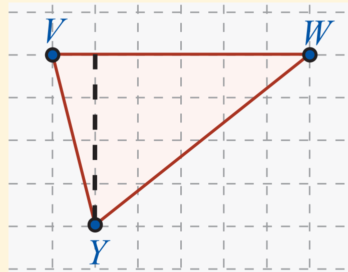
P_1, P_2, P_3 i P_4.



$P_{ORST}=P_{ABCD}-(P_1+P_2+P_3+P_4)=$
$=9\cdot 6-(\dfrac{4\cdot 2}{2}+\dfrac{7\cdot 5}{2}+\dfrac{5\cdot 1}{2}+\dfrac{4\cdot 2}{2})=54-28=26$
jediničnih kvadrata.

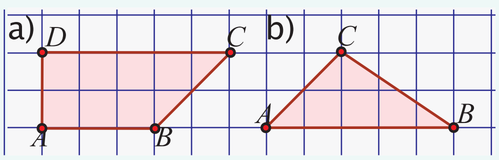
d) Osnovica trokuta ΔVYW ima duljinu 6 jediničnih dužina, a visina povučena iz vrha *Y* na tu osnovicu duga je 4 jedinične dužine.

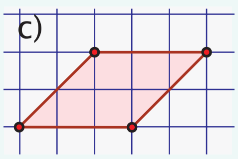
$\Delta P_{VYW}=\dfrac{6\cdot 4}{2}=12$ jediničnih kvadrata.

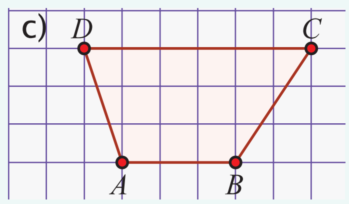


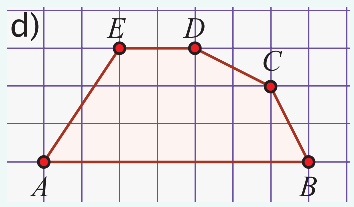
Zadaci

16. Izračunaj površine mnogokuta na slici.

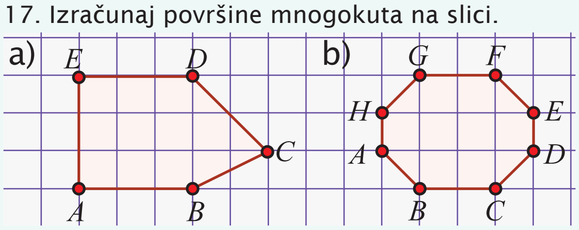


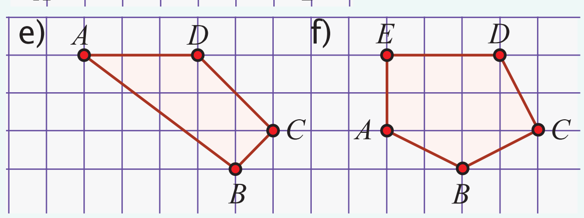




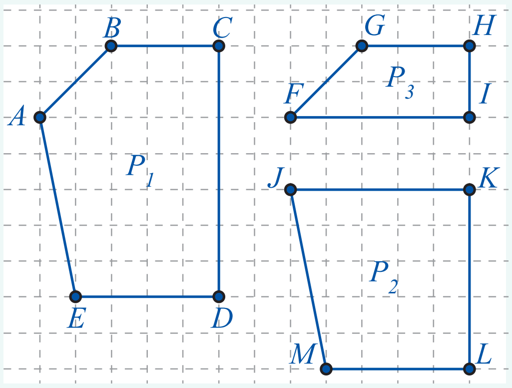


17. Izračunaj površine mnogokuta na slici.



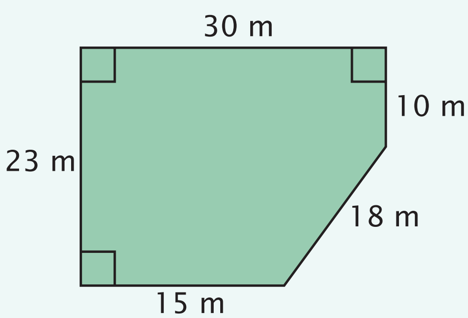


18. Mnogokut P_1 je prerezan na dva dijela: na mnogokute P_2 i P_3 kao na slici.

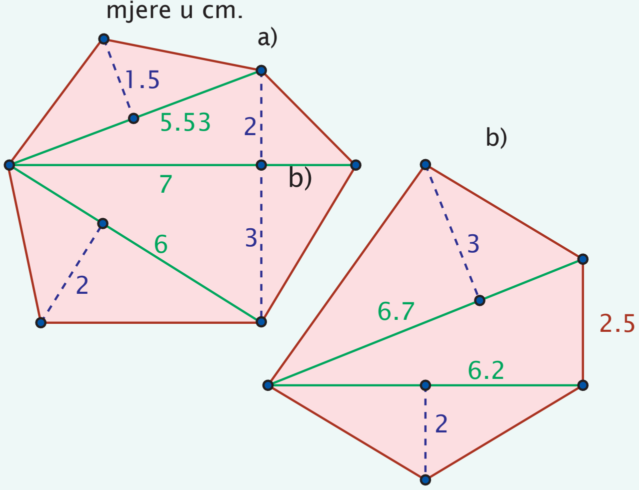


Pokušaj bez računanja odrediti površinu i opseg prvog mnogokuta na slici. Zatim odgovori (ne računajući) koliki je zbroj površina i opsega mnogokuta P_2 i P_3. Što zaključuješ? Ako neki mnogokut podijelimo na dva ili više mnogokuta kakav će biti zbroj površina, a kakav zbroj opsega novih mnogokuta u odnosu na površinu i opseg početnog mnogokuta?

19. Parkiralište ima oblik peterokuta. Dimenzije parkirališta dane su na slici. Izračunaj kolika je površina toga parkirališta?

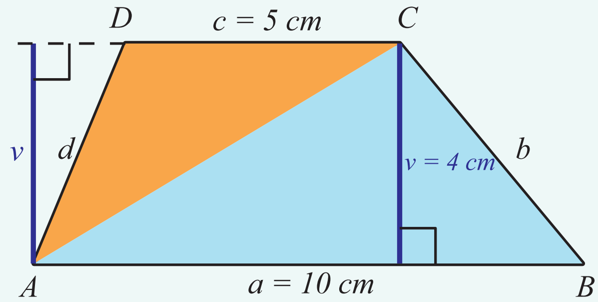


20. Izračunaj površine mnogokuta na slici. Sve su mjere u cm.

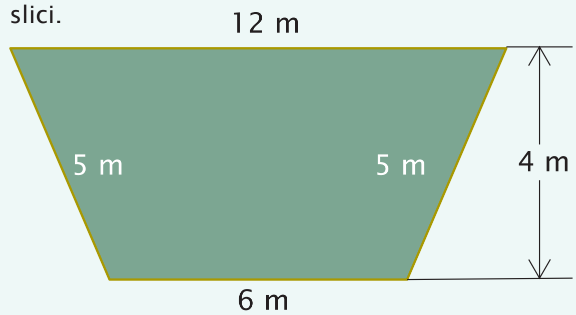


Napomena: Mnogokute uvijek možemo rastaviti na trokute tako da nacrtamo sve dijagonale iz jednog vrha. Tim trokutima onda izmjerimo jednu stranicu i pripadnu visinu da bismo mogli izračunati njihove površine. Da bismo dobili površinu cijelog mnogokuta zbrojimo površine svih trokuta.

21. Izračunaj površinu a) trokuta ΔABC;
b) trokuta ΔACD;
c) trapeza $ABCD$.



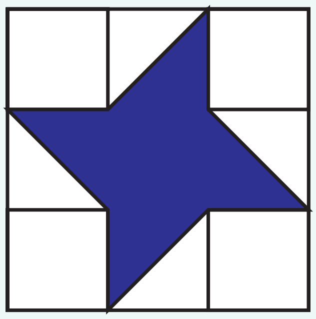
22. Lukina baka ima vrt u obliku trapeza, kao na slici.



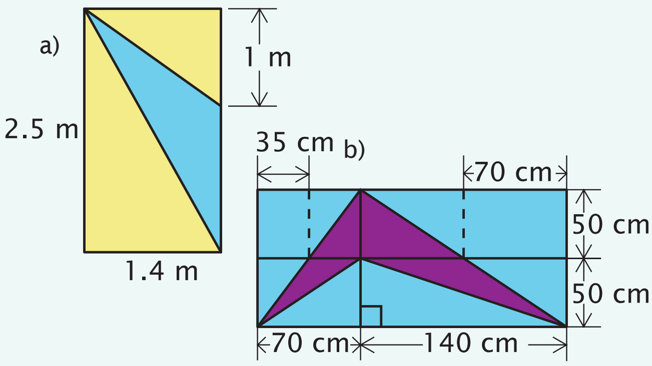
a) Kolika je duljina ograde tog vrta?
b) Kolika je površina vrta?

23. Izračunaj duljinu druge osnovice trapeza.
a) c = 8 cm, v = 5 cm i P = 45 cm^2;
b) c = 9 dm, v = 12 dm i P = 198 dm^2.

24. Uzorak na slici naziva se prijateljskom zvijezdom i upotrebljava se pri izradi krpara (Patchwork). Nacrtan je u mreži kvadrata sa stranicom 5 cm. Je li potrebno više plavog ili bijelog platna za taj uzorak?

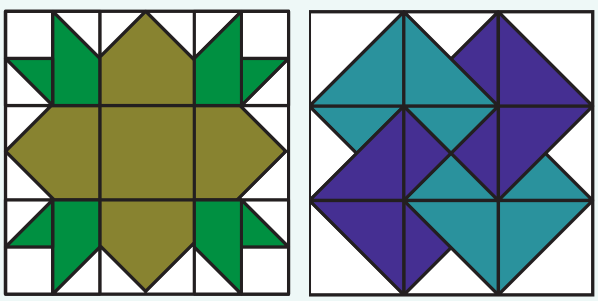


25. Na slikama su skice prekrivača za krevet. Izračunaj potrebnu količinu platna pojedine boje za svaki prekrivač.

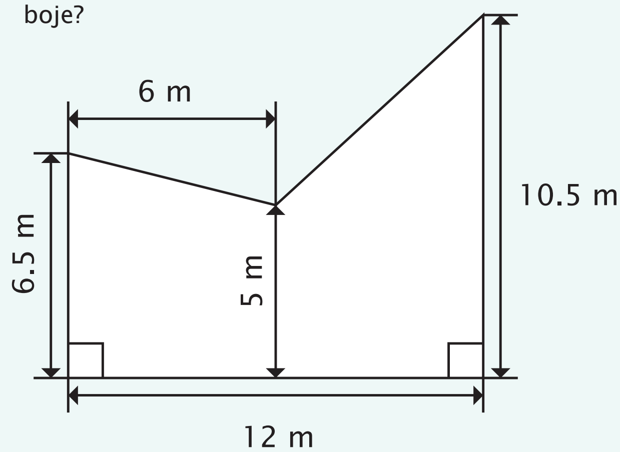


26. Na slikama su prikazana dva uzorka američkih krpara. Uzorci su nacrtani na mreži od devet kvadrata, a veličina kvadrata mijenja se po želji.
   a) Izračunajte potrebnu količinu platna pojedine boje za svaki uzorak ako je stranica osnovnoga kvadrata 8 cm, tj. stranica velikoga kvadrata je 24 cm.
   b) Nacrtajte svoj uzorak.
   c) Napravite svoj prekrivač.

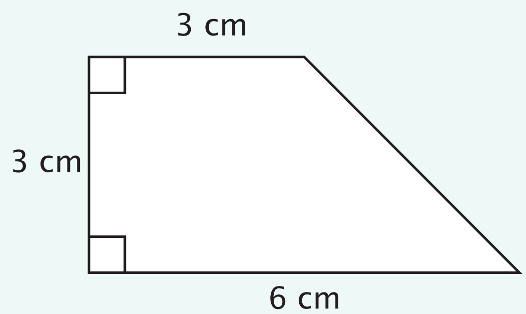
a) b)



27. Bočna strana sportske dvorane ima oblik dvaju spojenih trapeza. Koliko je boje potrebno za bojanje toga zida, ako je za 10 m^2 potrebno 2 l boje?

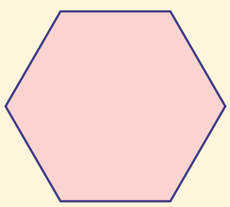


28. a) Izračunaj površinu lika sa slike.
   b) Konstruiraj ovaj lik u bilježnicu i podijeli ga na četiri jednaka dijela po obliku i površini. Svaki dio oboji drugom bojom.
   c) Kolika je površina svakoga toga dijela?



Primjer 6. Površina pravilnih mnogokuta

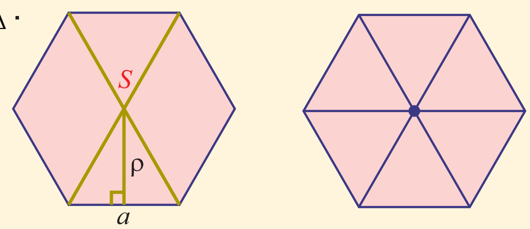
Površina stola ima oblik pravilnoga šesterokuta. Kako bismo mogli izračunati kolika je površina stola?



Rješenje:

Možemo razapeti tanko uže između najudaljenijih vrhova šesterokuta. Užad će se sjeći u središtu S pravilnoga šesterokuta. Osnovica karakterističnog trokuta je stranica šesterokuta duljine a, a ρ je visina karakterističnog trokuta.

Stoga, površina karakterističnog trokuta $P_\Delta = \frac{a \cdot \rho}{2}$. Kako je šesterokut sastavljen od šest ovakvih trokuta, onda je površina šesterokuta $P = 6 \cdot P_\Delta$.

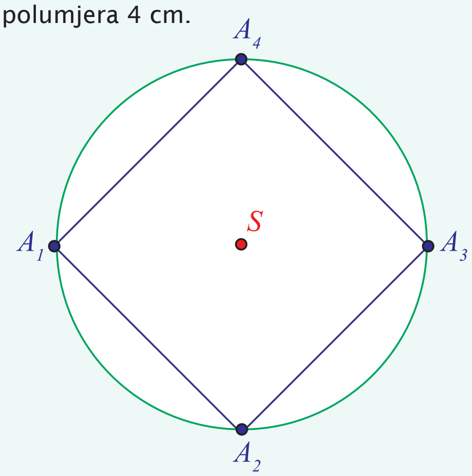


Površinu pravilnog mnogokuta računamo tako da površinu karakterističnog trokuta pomnožimo s brojem stranica

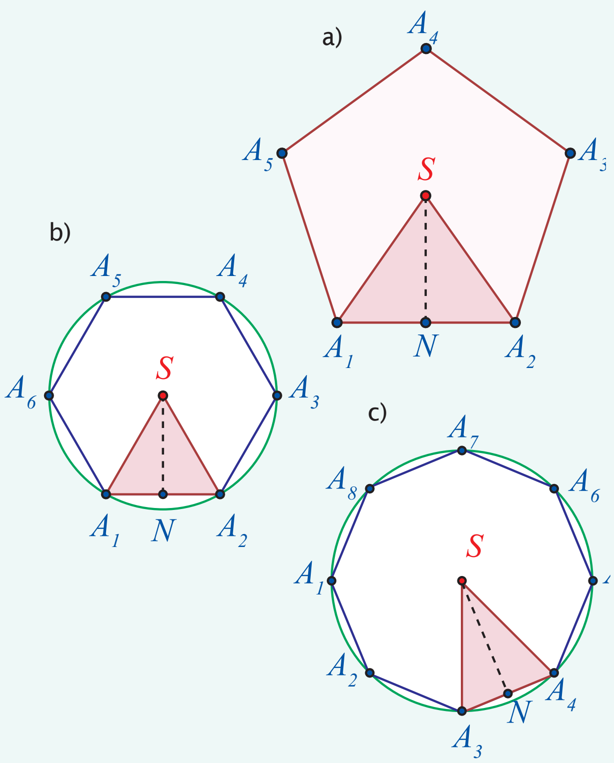
$$P = n \cdot P_\Delta = n \cdot \frac{a \cdot \rho}{2}.$$

Zadaci

29. Izračunaj površinu kvadrata upisanog u kružnicu polumjera 4 cm.



30. Izmjeri potrebne veličine, zatim izračunaj opseg i površinu pravilnih mnogokuta sa slike.

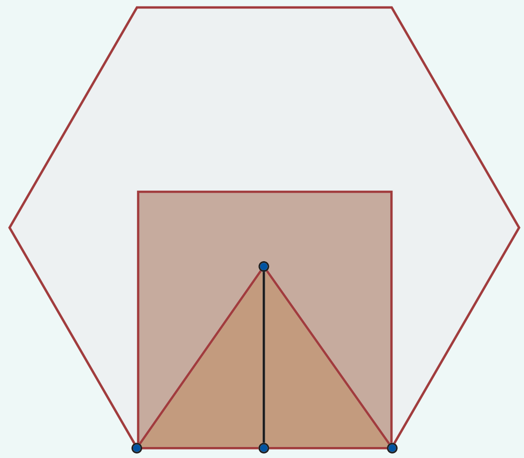


Napomena: izračunate površine pravilnih mnogokuta sa slike bit će zbog greške u mjerenju približno točne u odnosu na njihove stvarne veličine.)

31. Nacrtana su tri pravilna mnogokuta kojima su stranice jednakih duljina (vidi sliku). Izmjeri potrebne duljine, izračunaj površine te odgovori:

a) u kojem su omjeru (približno) površina kvadrata i jednakostraničnoga trokuta;

b) u kojem su omjeru (približno) površina pravilnoga šesterokuta i jednakostraničnoga trokuta;



c) u kojem su omjeru (približno) površina pravilnoga šesterokuta i kvadrata?

32. Luka je izračunao da je površina karakterističnoga trokuta pravilnoga peterokuta cijeli broj djeljiv s tri. Maja tvrdi da je tada i površina pravilnoga peterokuta također djeljiva s tri, a Luka tvrdi da je, naprotiv, djeljiva s 15. Tko je od njih dvoje u pravu?

33. U istu kružnicu upisani su pravilni trokut, četverokut, šesterokut i osmerokut. Koji od njih ima najmanju, a koji najveću površinu? Kojem će se od njih površina najmanje razlikovati od površine kruga opisanog tom kružnicom?

34. Stranica pravilnog mnogokuta je duga 6 cm, a visina karakterističnog trokuta 4 cm. Izračunaj površinu tog mnogokuta ako je on pravilni
a) peterokut;
b) sedmerokut;
c) deseterokut?

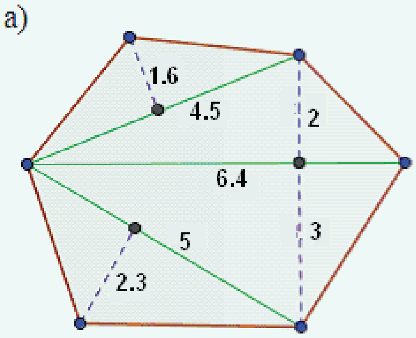
35. Duljina stranice pravilnog peterokuta je 8 cm, a veličina njegove površine je 110 cm2.

Kolika je visina karakterističnog trokuta tog peterokuta?

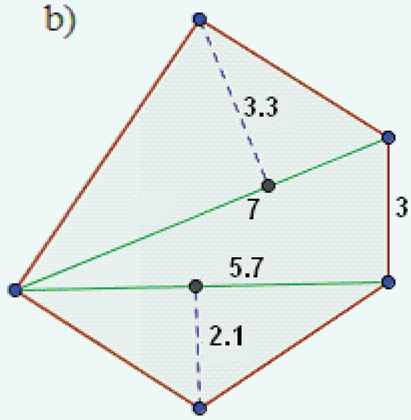
Vježbalica

1. Opseg pravilnog deseterokuta je 16 cm. Kolika je duljina jedne stranice tog deseterokuta?
2. Opseg pravilnog trinaesterokuta je 3.9 dm. Kolika je duljina jedne stranice tog 13-kuta?
3. Osmerokut ima sve stranice jednakih duljina, a opseg mu je 9.6 dm. Kolika je duljina jedne njegove stranice?
4. 23-kut ima sve stranice jednakih duljina, a opseg mu je 3.45 dm. Kolika je duljina jedne njegove stranice?
5. Peterokutu su duljine triju stranica jednake, tj. $a = b = c = 2.2$ cm. Također, preostale dvije stranice su međusobno jednakih duljina. Kolika je duljina svake od njih ako je opseg peterokuta 1.32 dm?
6. Sedmerokutu su duljine triju stranica jednake, tj. $a = b = c = 1.3$ cm. Također, preostale četiri stranice su međusobno jednakih duljina. Kolika je duljina svake od njih ako je opseg 1.35 dm?
7. Izračunaj površine mnogokuta sa slike. Sve mjere su u cm.

a)

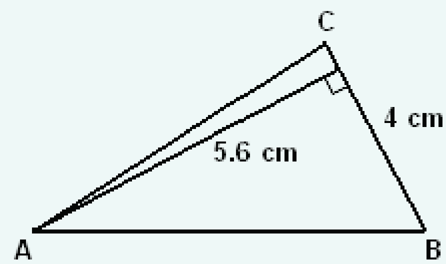


b)



8. Izračunaj površinu pravokutnog trokuta kojemu su duljine kateta

   $a = 5$ cm i $b = 4$ cm.
9. Izračunaj površinu trokuta sa slike

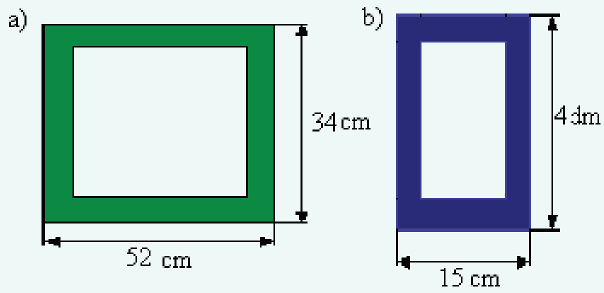


10. Izračunaj površinu trokuta ABC kojemu je duljina stranice $b =$ 55 mm, a duljina visine na tu stranicu $v_b = 8$ cm.
11. Izračunaj duljinu stranice c trokuta ABC čija je površina $P = 15$ cm^2, a duljina pripadne visine $v_c = 6$ cm.
12. Izračunaj veličine kvadrata koje nedostaju

a	5 cm			
o		64 dm		14 cm
P			16 dm^2	

13. Izračunaj duljinu stranice i opseg kvadrata ako je njegova površina:
a) 9 cm^2; b) 16 mm^2.

14. Širina okvira na slici je 5 cm. Izračunaj njegovu površinu.



15. Odredi duljinu nepoznate stranice paralelograma ako su zadani opseg i duljina jedne stranice:
a) o = 78 cm, b = 6.5 cm;
b) o = 8.4 dm, a = 0.07 m.

16. Stranica a paralelograma iznosi 12 cm, a stranica b je za 1 cm dulja od stranice a. Koliko je duga stranica b? Koliki je opseg tog paralelograma?

17. Stranica b paralelograma iznosi 2 dm, a stranica a je dvostruko manja od stranice a. Koliko je duga stranica a? Koliki je opseg tog paralelograma?

18. Izračunaj veličine paralelograma koje nedostaju.

a	10 cm		30 m	
b		8.6 dm		
v_a	7 cm		15 m	12 cm
v_b	3.5 cm			18 cm
o		60.2 dm	150 m	
P		86 dm^2		144 cm^2

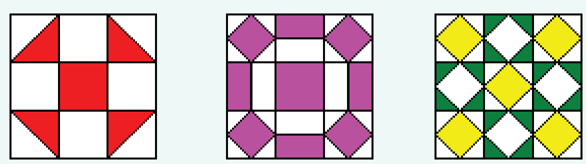
19. Skiciraj romb i izračunaj mu površinu, ako su mu duljine dijagonala:
a) 6 cm i 8 cm;
b) 5.4 cm i 6 cm.

20. Izračunaj visinu trapeza sa osnovicama a i c, te površinom P.
a) a = 10 cm, c = 5 cm i P = 45 cm^2;
b) a = 7.6 m, c = 3.2 m i P = 13.5 m^2.

21. Izračunaj duljinu druge osnovice trapeza.
a) c = 8 cm, v = 5 cm i P = 45 cm^2;
b) c = 9 dm, v = 12 dm i P = 198 dm^2.

22. Izračunaj površine pravilnih mnogokuta.
a) pravilni šesterokut, a = 4 cm;
b) pravilni deseterokut, a = 3 cm, ρ = 4.6 cm;
c) pravilni deveterokut, a = 5 m, ρ = 7.3 m;
d) pravilni dvanaesterokut, a = 10 dm, ρ = 18.7 dm.

23. Na slikama su prikazani uzorci za američke krpare. Uzorci su nacrtani na mreži od devet kvadrata. Izračunajte potrebnu količinu platna pojedine boje za svaki uzorak, ako je stranica osnovnog kvadrata 4 cm, tj. stranica velikog kvadrata je 12 cm.



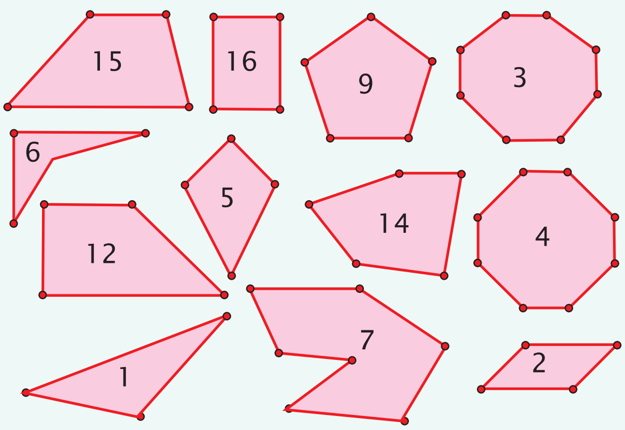
6.7. Ponavljanje

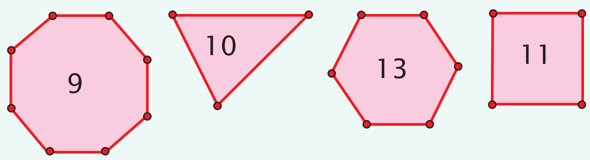
Pitanja za ponavljanje:

1. Što je mnogokut?
2. Što je *n*-terokut?
3. Kako se zove *n*-terokut kojemu je $n = 7$?
4. Koliko n-terokut ima stranica, koliko vrhova, a koliko kutova?
5. Koji su mnogokuti konveksni?
6. Postoji li trokut koji nije konveksan? Zašto?
7. Što su stranice mnogokuta?
8. Kako zovemo stranice mnogokuta koje nemaju zajedničkih točaka?
9. Što su dijagonale mnogokuta?
10. Koliko se dijagonala može nacrtati iz samo jednog vrha *n*-terokuta? Zašto?
11. Koliko ukupno ima dijagonala *n*-terokut?
12. Na koliko se trokuta podijeli *n*-terokut ako mu se povuku sve dijagonale iz samo jednog vrha?
13. Koliki je zbroj svih unutarnjih kutova *n*-terokuta.
14. Koliki je zbroj svih vanjskih kutova mnogokuta?
15. Koliki je zbroj unutarnjeg i njemu pripadnog vanjskog kuta?
16. Koje mnogokute nazivamo pravilnim?
17. Kako se zove pravilni trokut?
18. Kako se zove pravilni četverokut?
19. Je li romb pravilni mnogokut? Zašto?
20. Koji trokut u pravilnom mnogokutu zovemo karakteristični trokut?
21. Što su krakovi karakterističnog trokuta pravilnog mnogokuta?
22. Na koliko se karakterističnih trokuta može podijeliti svaki pravilni *n*-terokut?
23. Koliki je središnji kut svakog pravilnog *n*-terokuta?
24. Što je opseg mnogokuta?
25. Kako izračunavamo površinu mnogokuta?

Zadaci za ponavljanje:

1. Nacrtaj peterokut, označi mu vrhove i napiši koje dužine su mu stranice, a koji kutovi su mu unutarnji kutovi.
2. Mnogokuti na slici označeni su brojevima od 1 do 16.





Uz svaki od sljedećih izraza zapiši brojeve svih mnogokuta koji imaju to svojstvo:

a) nasuprotne stranice paralelne ________________
b) nasuprotne stranice jednakih duljina _________
c) bar jedan tupi kut ____________________________
d) bar jedan izbočeni kut ______________________
e) sve stranice jednakih duljina ________________
f) svi kutovi jednakih veličina ________________
g) pravilni mnogokut ____________________________
h) svi kutovi pravi ______________________________

i) paralelogram ______________________
j) pravokutnik ______________________
k) romb ______________________
l) trapez ______________________
m) trokut ______________________
n) četverokut ______________________
o) peterokut ______________________
p) šesterokut ______________________
r) sedmerokut ______________________
s) osmerokut ______________________
t) nekonveksni ______________________

3. Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha
a) četverokuta; b) sedmerokuta;
c) osmerokuta; d) deveterokuta;
e) petnaesterokuta; f) dvadesterokuta?

4. Popuni tablicu.

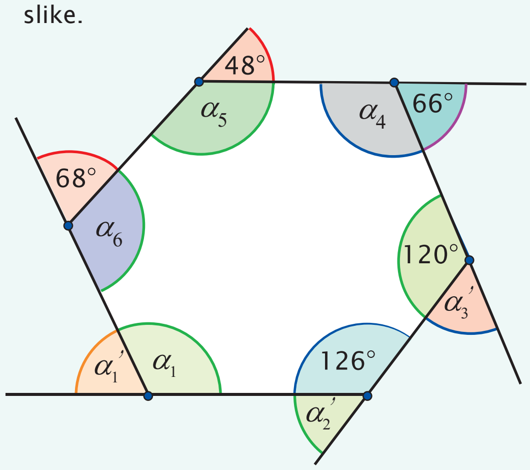
Broj vrhova *n*	5			
Broj dijagonala iz jednog vrha *d*		10		
Broj dijagonala D_n			104	
Zbroj unutarnjih kutova K_n				3240°
Zbroj vanjskih kutova				

5. Na koliko trokuta se podijeli sedmerokut povlačenjem svih dijagonala iz samo jednog njegovog vrha?

6. Koliko vrhova, stranica i kutova ima mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova 3780°;

7. Zbroj unutarnjih kutova nekog mnogokuta je za 3780° veći od zbroja vanjskih kutova. Koliko stranica ima taj mnogokut?

8. Odredi nepoznatu veličinu kuta mnogokuta sa slike.



9. Izračunaj središnji kut i vanjski kut pravilnom
a) deseterokutu; b) šesnaesterokutu.

10. Koji pravilan mnogokut ima unutarnji kut $\alpha = 144°$?

11. Koliki su kutovi karakterističnog trokuta pravilnog peterokuta. Konstruiraj pravilni peterokut duljine stranice 4 cm.

12. Možeš li kons truirati peterokut koji ima 4 kuta prava?

13. Konstruiraj pravilni šesterokut i pravilni trokut koji su upisani u istu kružnicu polumjera 3 cm.

14. Konstruiraj kvadrat i pravilni osmerokut koji su upisani u istu kružnicu polumjera 6 cm.

Nakon toga svakom od njih nacrtaj sve dijagonale.

15. Koliki je polumjer kružnice opisane pravilnom šesterokutu ako mu je opseg 38.4 cm.

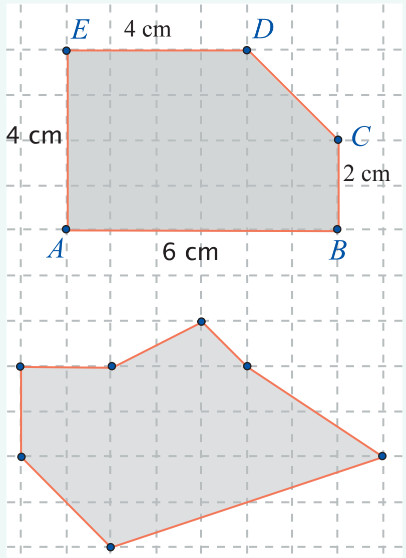
16. Površina karakterističnog trokuta pravilnog dvadeseterokuta je 45.7 dm². Kolika je površina tog mnogokuta?

17. Izračunaj duljinu stranice pravilnog mnogokuta s devet vrhova čiji je opseg $\frac{36}{7}$ m.

18. Opseg pravilnog mnogokuta je 27 centimetara. Koliko dijagonala možemo povući iz jednog vrha ako znamo da mnogokut ima više od 5 a manje od 10 stranica?

19. Zbroj unutarnjih kutova nekog pravilnog mnogokuta je 2340°, a njegov opseg je 123 cm. Kolika je duljina jedne njegove stranice ?

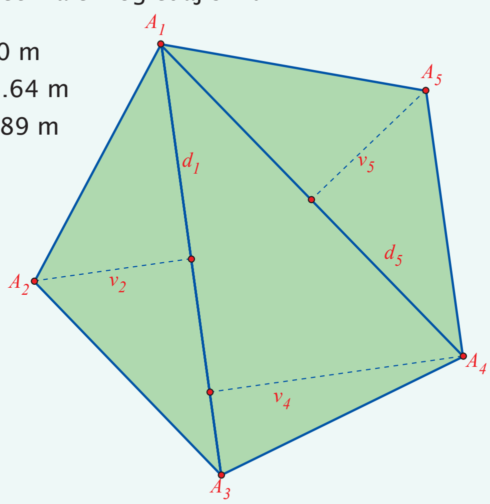
20. Izračunaj površine mnogokuta sa slike



21. Riječni kanali u poprečnom presjeku često imaju oblik trapeza. Pritom širina kanala na površini vode uvijek mora biti veća od širina na dnu kanala. Širina kanala na dnu je 1.5 m, a na površini 3.5 m. Kolika je dubina kanala ako je površina poprečnog presjeka kanala $P = 10\ \text{m}^2$.

22. Lukin djed je vrt u obliku pravilnog peterokuta podijelio na tri gredice. Djed je izmjerio duljine d_1, v_2 i v_5 i zapisao ih u metrima s točnošću na dvije decimale. Pogledaj sliku.

$d_1 = 10$ m
$v_2 = 3.64$ m
$v_4 = 5.89$ m



Koristeći duljine koje je Lukin djed izmjerio odgovori na sljedeća pitanja:

a) jesu li sve tri gredice jednake površine?

b) kolika je površina svake gredice?

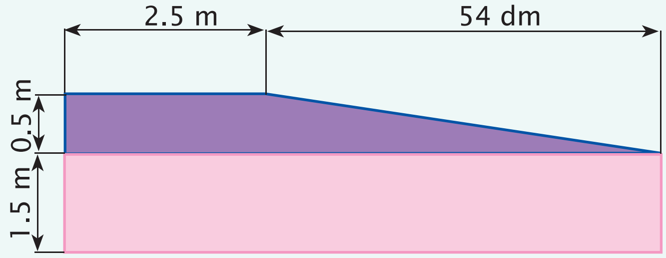
c) kolika je površina cijelog vrta?

Rješenje ovog zadatka imaš na svom CD-u. Naravno, radi se o približnoj površini, a sve duljine su prikazane u mjerilu 1:100.

23. Maja želi pobojati zid svoje sobe u potkrovlju. Donji dio zida želi pobojati svijetlo ljubičastom bojom, a gornji tamno ljubičastom, kao na slici.

a) Izračunaj potrebnu količinu pojedine boje, ako je za 10 m² potrebno 2 l boje.

b) Maja namjerava sama pobojati taj zid. Koliko vremena će joj trebati za bojanje, ako za 1 sat može pobojati 3 m².



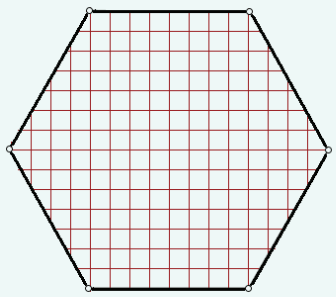
24. Postoji li pravilni mnogokut s n stranica kojem je duljina stranice izražene prirodnim brojem, a opseg mu iznosi $n + 2$. Obrazloži tvrdnju!

25. Može li n-terokutu koji ima paran broj stranica opseg biti izražen neparnim brojem ako znamo da su mu duljine stranica izražene prirodnim brojevima?

26. Može li površina pravilnog sedmerokuta biti 40 ako znamo da karakteristični trokut ima površinu koja je izražena prirodnim brojem?

27. Ivan priča: "Površina karakterističnog trokuta skrivenog pravilnog mnogokuta je $\frac{7}{10}$ kvadratnih centimetara, a površina čitavog mnogokuta izražena u kvadratnim centimetrima je cijeli broj. Koliko najmanje vrhova može imati taj mnogokut?"

28. Mali plesni podij u obliku pravilnog šesterokuta, popločan je kvadratnim pločicama sa stranicom duljine 4 dm. Na slici je umanjena slika površine plesnog podija.



a) Izračunaj površinu plesnog podija.

b) Izračunaj površinu pravilnog šesterokuta na ovoj slici.

c) Što misliš, je li šesterokut sa slike sličan šesterokutu plesnog podija? Obrazloži odgovor!

c) U kojem su omjeru stranica šesterokuta sa slike i stranica plesnog podija?

d) U kojem su omjeru površina šesterokuta sa slike i površina plesnog podija?

Primjerak oglednog testa:

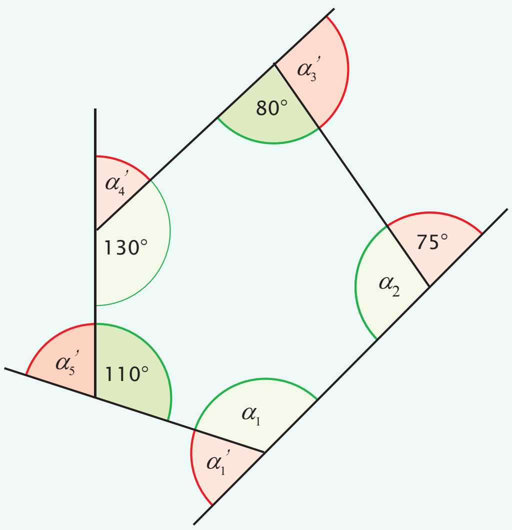
1. Izračunaj zbroj svih unutarnjih kutova deveterokuta.
2. Iz jednog vrha nekog mnogokuta može se povući 8 dijagonala.

   a) Koliko stranica ima taj mnogokut?

   b) Koliko ukupno dijagonala ima taj mnogokut?
3. Popuni tablicu.

Broj vrhova n	7			
Broj dijagonala iz jednog vrha d		6		
Broj dijagonala D_n			65	
Zbroj unutarnjih kutova K_n				1260°
Zbroj vanjskih kutova				

4. Zbroj unutarnjih kutova nekog pravilnog mnogokuta je 3060°, a njegov opseg je 399 cm. Kolika je duljina jedne njegove stranice?
5. Odredi nepoznate veličine kutova sa slike.

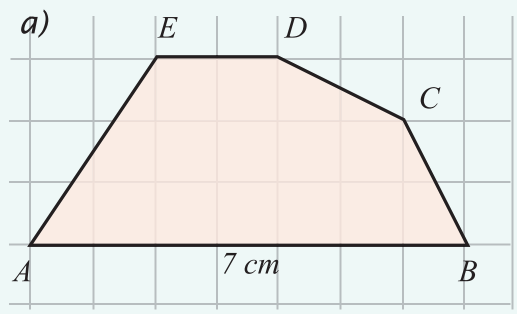


6. Opseg pravilnog šesterokuta je 102 cm.

   a) Izračunaj duljinu jedne njegove stranice.

   b) izračunaj unutarnji kut;

   c) izračunaj središnji kut.
7. Izračunaj površinu lika sa slike?



8. Duljina osnovice paralelograma je 6.4 cm, a duljina pripadne visine je 0.45 dm. Kolika je njegova površina?
9. Duljine osnovica trapeza su 5 cm i 14 cm. Kolika je visina trapeza ako mu je površina 114 cm^2.
10. Uz pomoć kutomjera nacrtaj pravilni peterokut koji ima stranicu dugačku 3.5 cm.
11. Nacrtaj dužinu duljine 63 mm, pa je podijeli na 5 jednakih dijelova.
12. Nacrtaj dužinu duljine 59 mm, pa je podijeli točkom F u omjeru 2 : 4.
13. Stranice trokuta ABC dugačke su redom: 3 cm, 6 cm i 4 cm. Najveća stranica njemu sličnog trokuta A'B'C' je 9 cm. Koliki je koeficijent sličnosti, te kolike su duljine preostalih stranica?
14. Kolika je visina nebodera čija je sjena 36 m, ako je istovremeno sjena čovjeka visokog 2 m dugačka 2.6 m?
15. Opseg raznostraničnog trokuta čije se duljine stranica odnose kao 2 : 4 : 5 je 125 mm. Konstruiraj taj trokut.

7. Kružnica i krug

Važni pojmovi

kružnica, krug

polumjer i promjer kružnice

kružni luk

kolinearne i nekolinearne točke

središnji i obodni kut kružnice

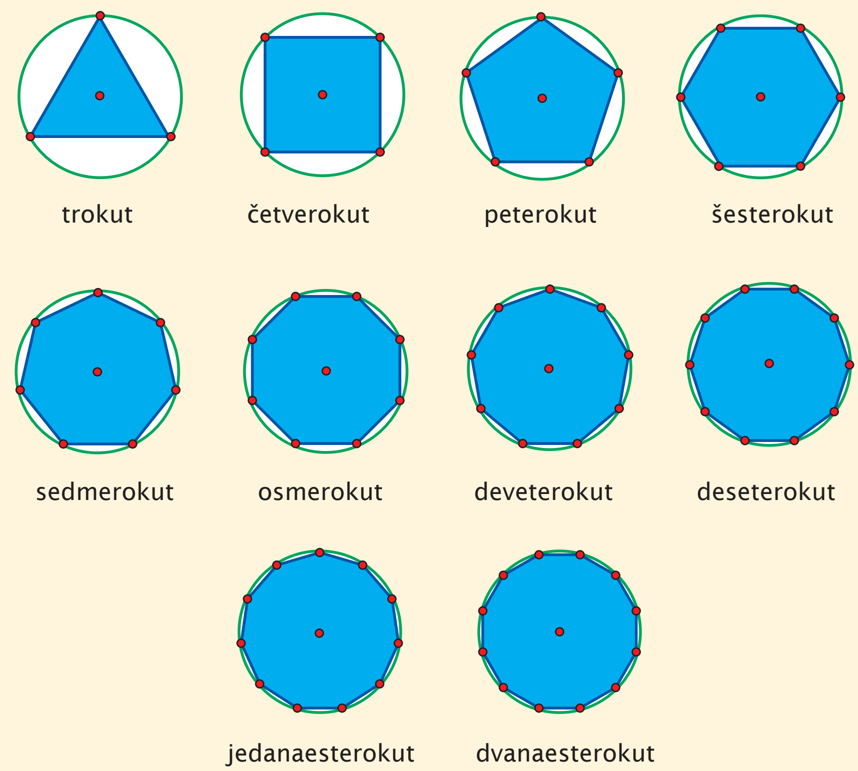
tangenta

sekanta

broj π

opseg i površina kruga

U prethodnoj nastavnoj cjelini upoznali smo se s mnogokutima. U mnogokute se ubrajaju trokut, četverokut, peterokut, šesterokut, sedmerokut, osmerokut itd. Pogledajmo sliku s pravilnim mnogokutima:



Primijetimo, što je broj stranica veći, to pravilan mnogokut svojim oblikom sve više nalikuje na krug. Stoga je prirodno prijeći na proučavanje važnih svojstava kruga i kružnice, nakon što smo proučili mnogokute. Gradivo iz mnogokuta pomoći će nam da donesemo neke važne zaključke o novom gradivu.

U ovom ćeš poglavlju, primjerice, naučiti:

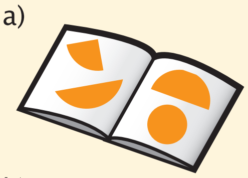
- Što je to $k(B, 3.5 \text{ cm})$;
- Koliko najmanje točaka ravnine određuje kružnicu;
- Što su to središnji i obodni kut kružnice i u kakvoj su vezi;
- Kako glasi Talesov poučak;
- Što je to sekanta;
- Što je to tangenta i kako je konstruirati;
- Kakav je to broj π.

I još mnogo toga.

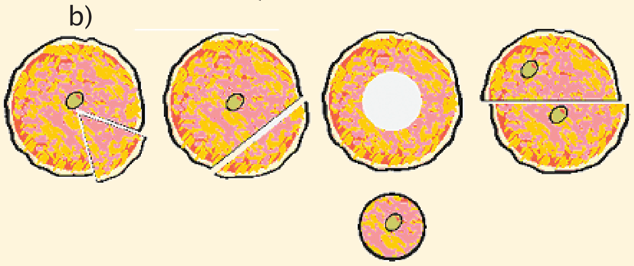
Brzinski usmeni zadaci za ponavljanje

1. Koje skupove točaka u ravnini poznaješ a da su povezani s kružnicom i krugom?
2. Što je polumjer kružnice? Kako se on još naziva?
3. Što je promjer kružnice? Kako se još naziva?
4. Koja je razlika između kružnice i kruga?
5. Koje dijelove kruga prepoznaješ na slici:

a)



b)

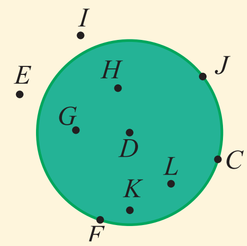


6. Koje od ovih točaka pripadaju:

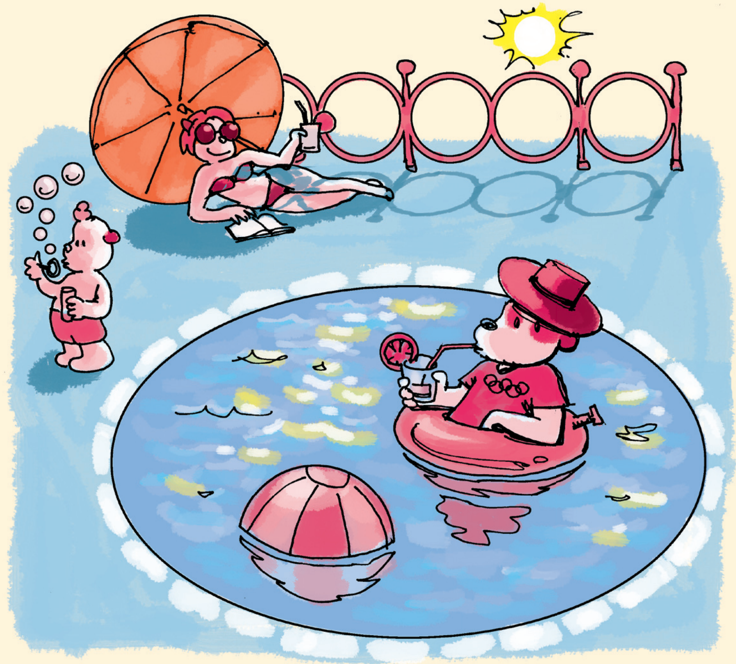
a) kružnici;

b) krugu;

c) krugu, ali ne kružnici?



Gdje u svakodnevnom životu susrećemo krugove?



7.1. Osnovno o kružnici i krugu

Pogledaj ovu kartu.

a) Koja su mjesta od Zagreba udaljena jednako kao i Samobor?

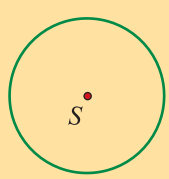
b) Koja su mjesta od Zagreba udaljena jednako kao i Karlovac?

Pojmovi vezani uz kružnicu i krug poznati su nam iz 5. razreda. Ovdje ćemo ih kratko ponoviti.

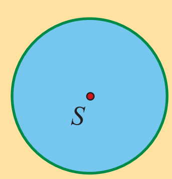
Važno

Istaknimo u ravnini točku *S*. **Kružnica** sa središtem *S* skup je svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke *S*.

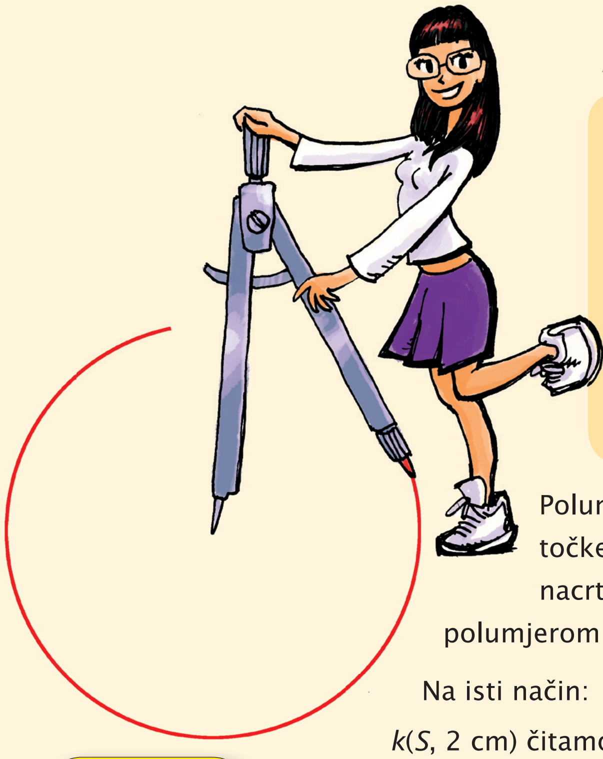
Krug je dio ravnine omeđen kružnicom.



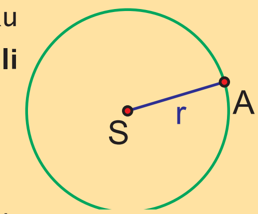
Kružnica



Krug



Dužina koja spaja središte i neku točku na kružnici naziva se **polumjerom ili radijusom kružnice**.



$\overline{SA}$ - polumjer ili radijus kružnice

Duljinu te dužine također nazivamo polumjerom ili radijusom i obično je označavamo slovom *r*.

$$|SA| = r$$

Polumjer nam govori koliko je središte kružnice udaljeno od svake točke na kružnici. Uza središte on nam je potreban kako bismo znali nacrtati kružnicu. Matematička oznaka za kružnicu sa središtem *S* i polumjerom *r* je $k(S, r)$. Čitamo: „kružnica oko središta *S* polumjera *r*“.

$k(S, r)$

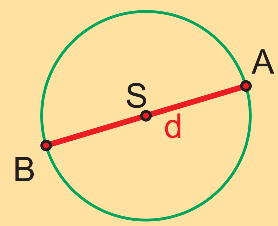
Na isti način:

$k(S, 2 \text{ cm})$ čitamo: “kružnica oko središta *S* polumjera 2 cm”

$k(T, 1 \text{ cm})$ čitamo: “kružnica oko središta *T* polumjera 1 cm”

Nacrtaj ove kružnice.

Dužina koja spaja dvije točke na kružnici i prolazi njezinim središtem naziva se **promjerom ili dijametrom kružnice**.

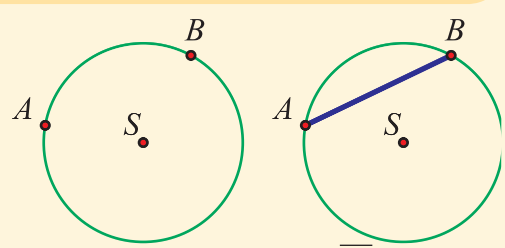


$\overline{AB}$ - promjer ili dijametar kružnice

Duljinu te dužine također nazivamo promjerom ili dijametrom, a označavamo je slovom *d*. $|AB| = d$

tetiva

Nacrtajmo kružnicu, na njoj istaknimo dvije točke te ih spojimo. Tako ćemo dobiti tetivu. **Tetiva** je dužina koja spaja dvije točke na kružnici.

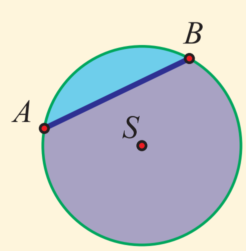


$\overline{AB}$ - tetiva

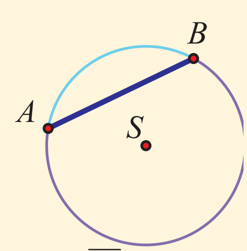
kružni luk

Svaka tetiva siječe krug na dva kružna odsječka. Također, svaka tetiva dijeli kružnicu na dva kružna luka. **Kružni luk** je dio kružnice omeđen s dvije točke na kružnici.

Najdulja tetiva u svakoj kružnici njezin je promjer.



Tetiva $\overline{AB}$ dijeli **krug** na dva kružna odsječka.



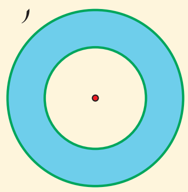
Tetiva $\overline{AB}$ dijeli **kružnicu** na dva kružna luka.

$\overset{\frown}{AB}$ - kružni luk

Primjer 1. Dijelovi kružnice i kruga

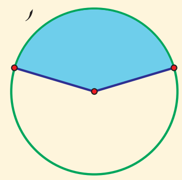
Pogledaj sliku i dopuni rečenice pojmovima: kružni luk, tetiva, kružni isječak, kružni odsječak, kružni vijenac i polukrug.

a)



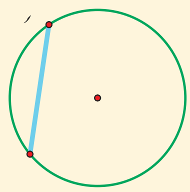
Ovo je ______________.

b)



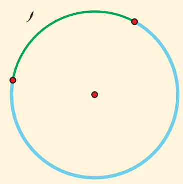
Ovo je ______________.

c)



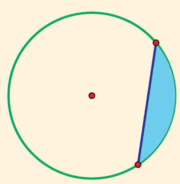
Ovo je ______________.

d)



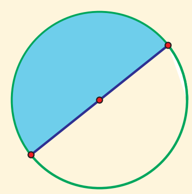
Ovo je ______________.

e)



Ovo je ______________.

f)



Ovo je ______________.

Rješenje:

Na slici a) nalazi se kružni vijenac. **Kružni vijenac** je dio ravnine omeđen s dvije koncentrične kružnice. Prisjetimo se, **koncentrične kružnice** su kružnice u ravnini koje imaju zajedničko središte.

Na slici b) nalazi se **kružni isječak**. Kružni isječak je dio kruga omeđen s dva njegova polumjera i pripadnim kružnim lukom.

Na slici c) je **tetiva**.

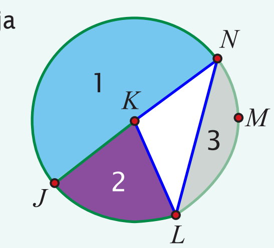
Na slici d) je **kružni luk**.

Na slici e) je **kružni odsječak**. Kružni odsječak je dio kruga omeđen jednom njegovom tetivom i pripadnim kružnim lukom.

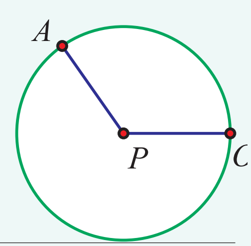
Na slici f) je **polukrug**. Primijetimo da je polukrug ujedno i kružni isječak i kružni odsječak.

Z a d a c i

1. Što je: a) kružnica; b) krug; c) kružni vijenac; d) polumjer; e) promjer; f) tetiva; g) kružni luk; h) kružni isječak; i) kružni odsječak; j) polukrug; k) polukružnica?
   Skiciraj svaki navedeni skup točaka.
2. Koja je razlika između polumjera i promjera?
3. a) Nacrtaj kružnicu kojoj je polumjer 3 cm;
   b) Nacrtaj kružnicu kojoj je promjer 3 cm.
4. Što su to koncentrične kružnice? Nacrtaj tri koncentrične kružnice s promjerima 3 cm, 5 cm i 7 cm.
5. Prepiši, pa dopuni rečenice:
   a) Promjer kružnice je 4 cm, a njezin polumjer je __________;
   b) Promjer kružnice je 21 cm, a njezin polumjer je __________;
   c) Polumjer kružnice je 21 cm, a njezin promjer je __________;
   d) Promjer kružnice je 30 cm, a njezin polumjer je __________.
6. Nacrtaj $k(A, 2.5\text{ cm})$. Na njoj istakni točke K i L i nacrtaj tetivu $\overline{KL}$.
   a) Kako se zove dio kružnice omeđen točkama K i L? Istakni ga bojom;
   b) Kako se zove dio kruga omeđen dužinom $\overline{KL}$? Istakni ga bojom.
7. Nacrtaj $k(A, 2.5\text{ cm})$, istakni jedan promjer i bojom označi polukrug i polukružnicu.
8. Gdje u svakodnevnom životu susrećeš:
   a) polukrug; b) polukružnicu; c) kružni isječak; d) kružni odsječak; e) kružni luk?
9. Prepiši, pa dopuni rečenicu: Tetiva koja prolazi središtem kružnice naziva se ______________.
10. Pogledaj sliku i odgovori na pitanja kako se, obzirom na kružnicu i krug, zove skup točaka:
    a) točka K; b) $\overline{NL}$; c) $\widehat{NL}$;
    d) dio kruga označen brojkom 1;
    e) dio kruga označen brojkom 2;
    f) dio kruga označen brojkom 3;
    g) $\overline{JL}$; h) $\overline{NJ}$; i) $\widehat{NJ}$; j) $\overline{KN}$; k) $\overline{KM}$.



11. Precrtaj pa bojom istakni:
    a) tetivu $\overline{AO}$; b) manji kružni odsječak nad tetivom $\overline{AO}$; c) oba kružna luka $\widehat{AO}$; d) veći kružni isječak koji pripada luku $\widehat{AO}$.



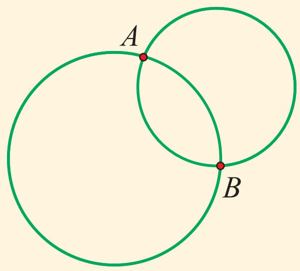
Primjer 2. Međusobni položaj dviju kružnica u ravnini

Nacrtaj dvije kružnice. U koliko se točaka mogu sjeći dvije kružnice u ravnini?

Rješenje:

Rješenje zadatka ovisi o položaju dviju kružnica u ravini koje smo nacrtali.

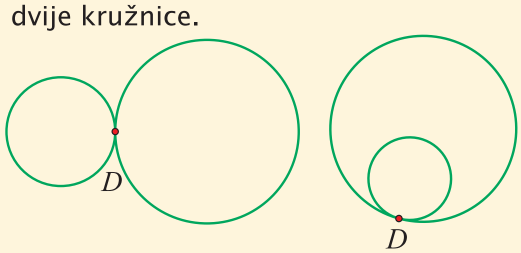
Dvije kružnice se mogu međusobno **sjeći**. Tada kažemo da kružnice imaju dvije zajedničke točke. To su točke *A* i *B* sa slike, jer one pripadaju i prvoj i drugoj kružnici. Točke u kojima se sijeku dvije kružnice nazivamo njihovim **sjecištima**.



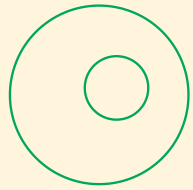
dvije kružnice se sijeku

Dvije kružnice mogu imati i jednu zajedničku točku. Tada ne govorimo da se kružnice sijeku, nego da se **dodiruju**. Njihova zajednička točka *D* sa slike naziva se **dirалište**. Diralište dviju kružnica je točka u kojoj se dodiruju dvije kružnice.

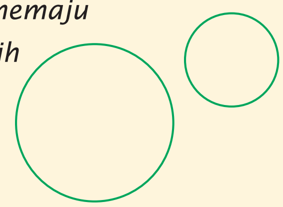
kružnice se dodiruju

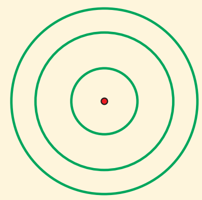


Sliku smo mogli nacrtati i tako da dvije kružnice nemaju zajedničkih točaka. Na slici su prikazani takvi slučajevi:



kružnice nemaju zajedničkih točaka

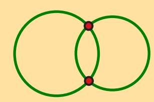




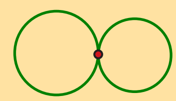
Još jedan primjer kružnica koje nemaju zajedničkih točaka su **koncentrične kružnice**.

Položaj dviju kružnica u ravnini:

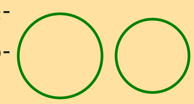
- imaju dvije zajedničke točke (sijeku se, udaljenost središta manja je od zbroja polumjera)



- imaju jednu zajedničku točku (dodiruju se, udaljenost središta jednaka je zbroju polumjera)



- nemaju zajedničkih točaka (udaljenost središta veća je od zbroja polumjera)

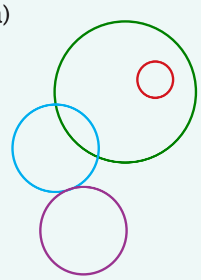


Ako dvije kružnice imaju i zajedničko središte i jednake polumjere, one će se podudarati. U tom slučaju te dvije kružnice imaju beskonačno mnogo zajedničkih točaka, tj. zajedničke su im sve točke kružnice.

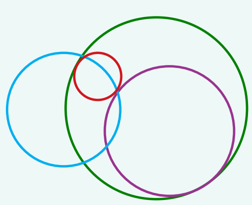
Z a d a c i

12. Na slici su zadane kružnice u raznim bojama.

a)



b)



Koje od ovih kružnica se sijeku, koje se dodiruju, a koje se ne sijeku i ne dodiruju?

13. U kojem položaju mogu biti dvije kružnice u ravnini?

14. Prepiši, pa dopuni rečenice:
    a) ___________ dviju kružnica je točka u kojoj se dodiruju dvije kružnice.
    b) ___________ dviju kružnica je točka u kojoj se sijeku dvije kružnice.
    c) Kružnice koje se sijeku imaju ____ zajedničke točke.
    d) Koncentrične kružnice ___________ zajedničkih točaka.

15. Nacrtaj kružnice $k(A, 1.5 \text{ cm})$ i $k(C, 2.8 \text{ cm})$ tako da se one:
a) sijeku; b) dodiruju; c) niti sijeku niti dodiruju.

16. Nacrtaj kružnice $k(S, 4 \text{ cm})$ i $k(T, 3 \text{ cm})$ tako da se dodiruju u točki A:
a) izvana; b) iznutra.

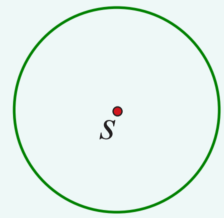
17. Nacrtaj jednu kružnicu promjera 2.6 cm i jednu kružnicu polumjera 2.5 cm koje se sijeku.

18. Nacrtaj dužinu $|AB| = 6.5$ cm. Na dužini istakni točku C, takvu da je $|AC| = 2.2$ cm. Konstruiraj zatim kružnice s promjerima $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. U kakvu su odnosu te dvije kružnice?

19. Nacrtaj dužinu $|CD| = 72$ mm. Nacrtaj kružnicu $k(C, 25 \text{ mm})$ i kružnicu $k(D, 32 \text{ mm})$. U kakvu su položaju dobivene kružnice?

20. Nacrtaj dužinu $|LM| = 6$ cm. Nacrtaj kružnicu sa središtem u točki M polumjera 34 mm. Koliki treba biti polumjer druge kružnice sa središtem u L tako da te dvije kružnice:
a) dodiruju jedna drugu;
b) nemaju zajedničkih točaka;
c) sijeku jedna drugu?

21. Pogledaj sliku kružnice.



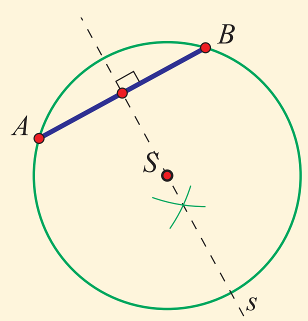
Pronađi kružnicu koja prolazi točkom S i koja kružnicu sa slike dodiruje iznutra.
a) Skiciraj rješenje;
b) Konstruiraj rješenje;
c) Koliko ima takvih kružnica?
d) Usporedi polumjer nacrtane kružnice s polumjerom zadane kružnice.

22. Skiciraj u kakvu sve položaju mogu biti tri kružnice u ravnini.

Primjer 3. Simetrala tetive

Nacrtaj kružnicu $k(L, 2.1 \text{ cm})$ i njenu tetivu duljine 2.5 cm. Konstruiraj simetralu te tetive. Što primjećuješ?

Rješenje:

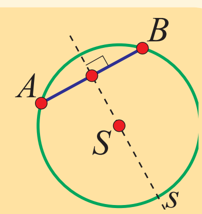


Konstruirajmo zadanu kružnicu i njezinu tetivu. Zatim konstruirajmo i simetralu tetive:

Primijetit ćemo da simetrala tetive prolazi središtem kružnice. Ako nacrtamo bilo koju drugu tetivu, vrijedit će isto: simetrala svake tetive prolazi središtem pripadne kružnice. Objasnimo zašto.

Znamo da je svaka točka simetrale dužine jednako udaljena od njezinih krajnjih točaka. Tako je i svaka točka simetrale jednako udaljena od točaka A i B tetive. No točke A i B leže na kružnici pa su jednako udaljene od središta kružnice. Zaključujemo da središte kružnice pripada simetrali svake tetive te kružnice.

Simetrala tetive kružnice prolazi središtem pripadne kružnice.



Zadaci

23. Konstruiraj kružnicu polumjera 3 cm i njezinu tetivu duljine 3 cm.

24. Konstruiraj kružnicu $k(S, 2.5 \text{ cm})$ i njezinu tetivu duljine:
a) 1 cm; b) 2 cm; c) 3 cm; d) 4 cm; e) 5 cm.

25. Konstruiraj kružnicu $k(A, 22 \text{ mm})$. Koliko je duga njezina najdulja tetiva? Nacrtaj je.

26. Konstruiraj kružnicu $k(A, 2 \text{ cm})$. Je li moguće konstruirati njezinu tetivu duljine 5 cm? Objasni svoj odgovor.

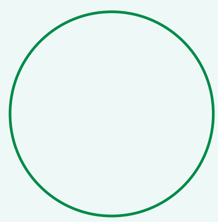
27. Zadana je kružnica polumjera 4 cm. Bez crtanja odgovori koje je tetive moguće konstruirati za tu kružnicu ako je duljina tetiva:
a) 5 cm; b) 2 cm; c) 0.3 cm; d) 7 cm; e) 8 cm; f) 8.01 cm; g) 11 cm.

28. Zadana je kružnica promjera 12 mm. Bez crtanja odgovori koje je tetive moguće konstruirati za tu kružnicu ako je duljina tetiva:
a) 1 cm; b) 2.4 cm; c) 0.001 cm; d) 70 cm; e) 2 cm; f) 12 mm; g) 2.44 cm.

29. Nacrtaj kružnicu $k(A, 1.2\text{ cm})$ i njezinu tetivu duljine 2 cm. Konstruiraj simetralu te tetive.

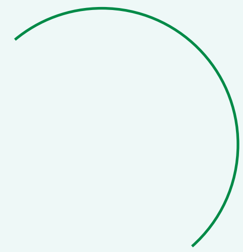
30. Konstruiraj tri različite kružnice, svakoj nađi po pet tetiva i uvjeri se da simetrala svake tetive prolazi središtem kružnice.

31. Nacrtaj neku kružnicu, pa konstrukcijom odredi njeno središte.



32. Nacrtaj trokut i konstruiraj mu opisanu kružnicu. Što su stranice trokuta toj kružnici?

33. Nacrtaj dio neke kružnice, pa konstrukcijom odredi njeno središte.

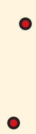


34. Nacrtaj dužinu duljine 3 cm. Konstruiraj kružnicu kojoj je ta dužina tetiva. Koliko ima takvih kružnica?

35. Nacrtaj dužinu $\triangle ABC \cong \triangle GHI$ =1.7 cm. Konstruiraj tri kružnice kojima je dužina $\overline{AB}$ tetiva.

Primjer 4. Dvije točke

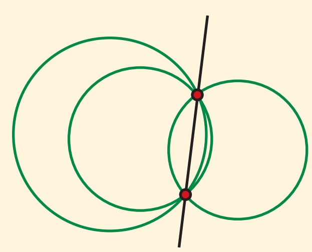
Zadane su dvije točke u ravnini.



Skiciraj:
a) Pravce koje možemo provući kroz te dvije točke;
b) Kružnice koje možemo provući kroz te dvije točke.Čega ima više?

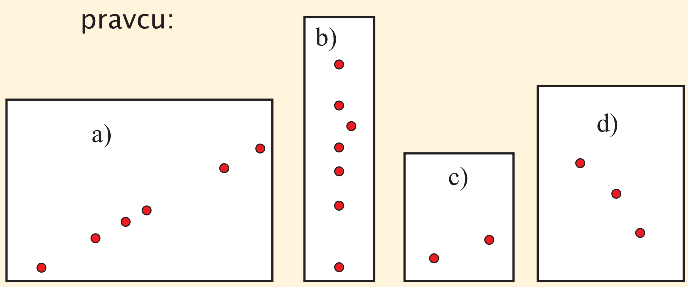
Rješenje:

Prisjetimo se, što znači da dvije točke određuju pravac? To znači da se kroz dvije zadane točke može provući samo jedan pravac. Dakle, kroz dvije zadane točke možemo nacrtati jedan pravac. No, dvije točke nisu dovoljne za određivanje kružnice jer se kroz njih može provući više kružnica.



Primjer 5. Kolinearne točke

Na kojoj od ovih slika sve točke leže na istom pravcu:



Rješenje:

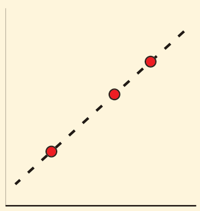
Na slici a) sve točke leže na istom pravcu. To možemo provjeriti ravnalom.

Na slici c) nalaze se dvije točke koje također leže na istom pravcu jer je pravac određen dvjema točkama. Točke koje leže na istom pravcu zovu se **kolinearne točke**.

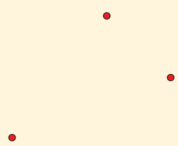
kolinearne točke

Na slikama b) i d) točke ne leže na istom pravcu pa to nisu kolinearne točke. Točke koje ne leže na istom pravcu, tj. koje nisu kolinearne, nazivaju se **nekolinearnim točkama**.

nekolinearne točke



kolinearne točke

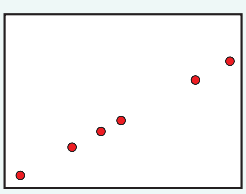


nekolinearne točke

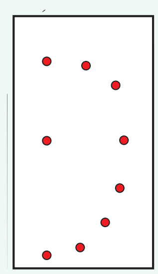
Zadaci

36. Na kojoj od ovih slika sve točke leže na istom pravcu:

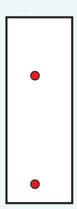
a)



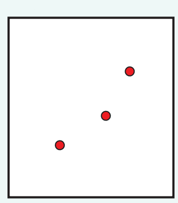
b)



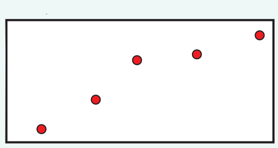
c)



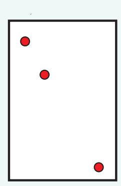
d)



e)



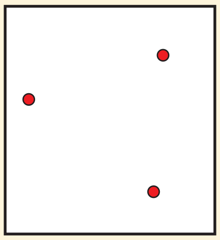
f)

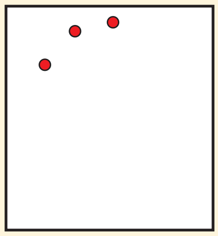


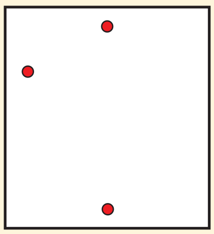
37. Kako se zovu točke koje pripadaju istom pravcu?
38. Kako se zovu točke koje ne pripadaju istom pravcu?
39. Nacrtaj dvije točke. Jesu li to kolinearne točke?
40. Nacrtaj tri točke koje su:
    a) kolinearne; b) nekolinearne.
41. Nacrtaj pet kolinearnih točaka.
42. Nacrtaj pet nekolinearnih točaka.
43. Jesu li točke na brojevnom pravcu kolinearne?
44. U koordinatnom sustavu u ravnini nacrtaj točke $A(-2, 5)$, $B(0, 5)$ i $C(1, 4)$. Jesu li to kolinearne točke?
45. Bez crtanja izreci koordinate triju kolinearnih točaka u koordinatnom sustavu u ravnini.
46. U koordinatnoj ravnini nacrtaj točke $A(3, -0.5)$ i $C(3, 2)$.
    a) Nađi točku B koja leži na istom pravcu kao točke A i C;
    b) Koliko ima točaka kolinearnih sa A i C?
    c) Koliko ima točaka nekolinearnih sa A i C?
47. Postoje li na kružnici neke tri kolinearne točke?
48. Postoje li u krugu neke tri kolinearne točke?

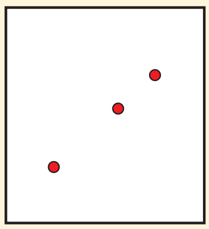
Primjer 6. Koliko točaka određuje kružnicu?

Na svakoj slici skiciraj kružnicu koja prolazi ovim točkama.

a) 

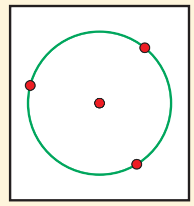
b) 

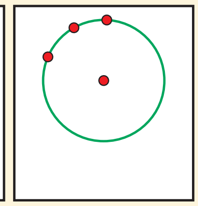
c) 

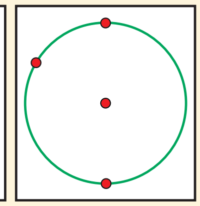
d) 

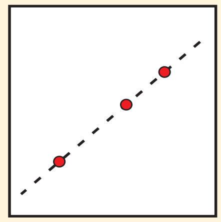
Rješenje:

U uvodnom zadatku smo zaključili da dvije točke nisu dovoljne da odrede samo jednu kružnicu. Na slikama a), b) i c) zadane su nekolinearne točke, a tražene kružnice izgledaju ovako:

a) 

b) 

c) 

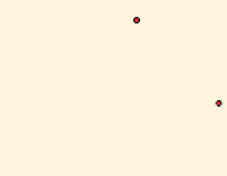
d) 

Na slici d) zadane su tri kolinearne točke. To možemo provjeriti ravnalom. Budući da znamo da je kružnica krivulja, zaključujemo da kružnicu nije moguće nacrtati.

Primijetimo da ćemo uvijek moći naći kružnicu koja prolazi trima nekolinearnim točkama. Pokušajte se uvjeriti u to crtajući razne položaje triju nekolinearnih točaka i skiciranjem pripadajuće kružnice. U sljedećem primjeru matematički ćemo pokazati zašto je uvijek moguće pronaći točno jednu kružnicu kroz tri nekolinearne točke.

Primjer 7.
Konstrukcija kružnice kroz tri točke

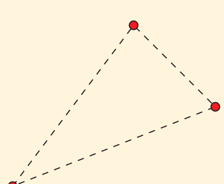
Na slici su zadane tri nekolinearne točke. Konstruiraj kružnicu koja će prolaziti kroz sve tri točke.



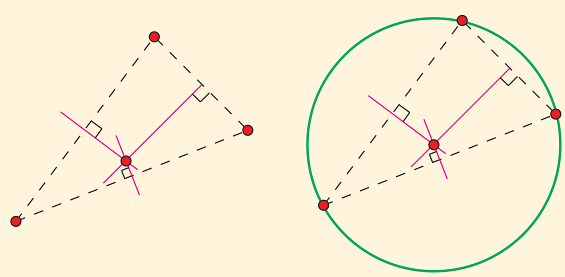
Rješenje:

Primijetimo da smo u prošlom primjeru *skicirali* kružnicu, a sada ćemo je *konstruirati* samo ravnalom i šestarom.

Naučili smo da nekolinearne točke ne pripadaju istom pravcu. Stoga ih možemo promatrati i kao vrhove trokuta.

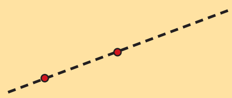


Sada vidimo da se u zadatku traži kružnica koja prolazi kroz sva tri vrha trokuta. To je **trokutu opisana kružnica**. Da bismo je nacrtali, trebamo pronaći njezino središte. Prisjetimo se, središte trokutu opisane kružnice leži u sjecištu **simetrala stranica** trokuta. Stoga konstruirajmo simetrale stranica i pronađimo središte.



Konstruirali smo kružnicu kroz zadane tri nekolinearne točke. Ta se kružnica može nacrtati samo na jedan način kroz zadane tri nekolinearne točke i zato kažemo da je **kružnica određena s tri nekolinearne točke**.

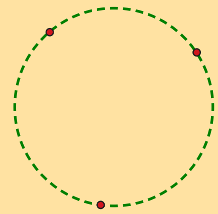
Pravac je određen s dvije točke.



To znači da se kroz dvije točke može provući samo jedan pravac.

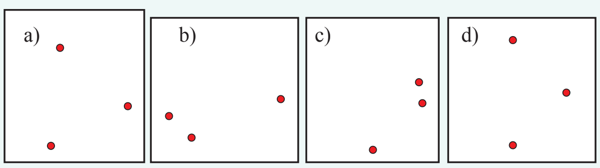
Kružnica je određena s tri nekolinearne točke.

To znači da se kroz tri točke koje ne pripadaju istom pravcu može provući samo jedna kružnica.



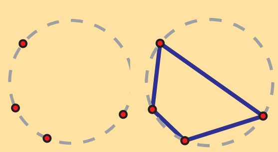
Zadaci

49. Nacrtaj tri nekolinearne točke i:
    a) skiciraj kružnicu koja prolazi tim točkama;
    b) konstruiraj kružnicu koja prolazi tim točkama.
50. Prectaj, pa konstruiraj kružnicu koja prolazi ovim točkama:

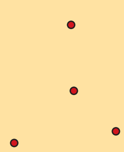


51. Prepiši, pa dopuni rečenice:
    a) Pravac je određen s ___ točke;
    b) Kružnica je određena s ____ nekolinearne točke.
52. Ispravi pogrešku u svakoj rečenici:
    a) Kružnica je određena s tri kolinearne točke;
    b) Kolinearne točke leže na istoj kružnici;
    c) Pravac je određen s tri točke;
    d) Kružnica je određena s tri točke;
    e) Točke (0, 2), (−2, 2) i ishodište su kolinearne.

Pogledajmo može li kružnica biti određena s četiri nekolinearne točke.
Na ovoj slici vidimo četiri točke koje pripadaju kružnici:



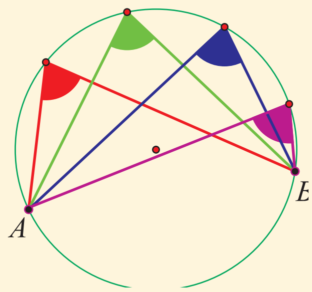
Spojimo li susjedne točke, dobit ćemo četverokut kojemu su stranice tetive kružnice. On se stoga zove **tetivni četverokut**.
Međutim, na sljedećoj slici vidimo četiri nekolinearne točke kroz koje ne možemo provući kružnicu:



Stoga zaključujemo da četiri točke u ravnini ne pripadaju uvijek kružnici. U primjeru 2 pokazali smo da za svake tri nekolinearne točke **uvijek** možemo pronaći jednu kružnicu koja ih sadrži. Zato kažemo da je kružnica određena s tri točke.

53. Nacrtaj pravokutni koordinatni sustav u ravnini i u njemu kružnicu k_1 sa središtem S_1 (-2, 3) i polumjerom 2 cm te kružnicu k_2 sa središtem S_2 (1, 1) i polumjerom 3 cm. Koliko zajedničkih točaka imaju te dvije kružnice? U kakvom se položaju nalaze?
54. Konstruiraj kružni vijenac sa središtem S (-2, -3) i polumjerima r_1 = 25 mm i r_2 = 35 mm.
55. Nacrtaj dvije točke C i D koje su međusobno udaljene 3 cm. Odredi one točke koje su:
    a) udaljene od obje točke 2 cm. Koliko ima takvih točaka?
    b) udaljene od obje točke 3 cm. Koliko ima takvih točaka?
    c) udaljene od obje točke 4 cm. Koliko ima takvih točaka?
    Gdje se nalaze sve te točke koje su jednako udaljene od točaka C i D?
56. Koliko trebaju biti udaljena središta dviju kružnica s polumjerima 3 cm i 2.5 cm da bi se te kružnice dodirivale? Koliko rješenja ima taj zadatak? Objasni.
57. Nacrtaj u bilježnicu četiri nekolinearne točke. Koliko različitih kružnica se može nacrtati, a da prolaze kroz tri od zadanih točaka?
58. Nacrtaj u bilježnicu tri nekolinearne točke A, B i C. Konstruiraj kružnicu koja njima prolazi. Što su dužine za tu kružnicu?
59. Koliko trebaju biti udaljena središta dviju kružnica s polumjerima 4 cm i 3 cm da bi se te kružnice sjekle? Koliko rješenja ima taj zadatak? Objasni.
60. Konstruiraj kružnicu $k(S$, 35 mm). Istakni na njoj točku P te točku R izvan nje. Konstruiraj kružnicu sa središtem u točki R koja kružnicu k dodiruje u točki P.

7.2. Središnji i obodni kut

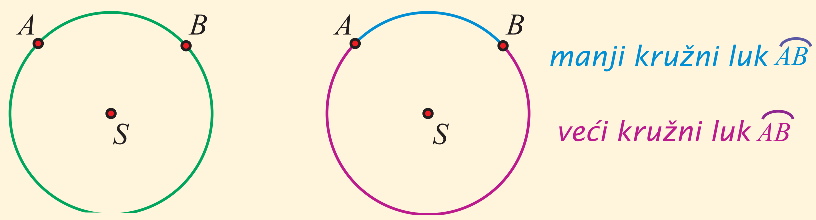


Kutovi

Pogledaj kutove na slici.

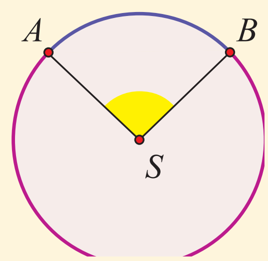
Koji je od prikazanih kutova najveći, a koji najmanji?

Nacrtajmo kružnicu i na njoj točke A i B. Prisjetimo se, **kružni luk** je dio kružnice omeđen s dvije točke na kružnici.



Primijetimo da točke *A* i *B* sa slike na kružnici određuju dva kružna luka, koja su ovdje istaknuta različitim bojama. Obično se oznakom $\overset{\frown}{AB}$ tada označava *manji* od dvaju dobivenih kružnih lukova.

Spojimo zatim krajnje točke kružnog luka sa središtem kružnice. Tako ćemo dobiti polumjere $\overline{SA}$ i $\overline{SB}$.



središnji kut

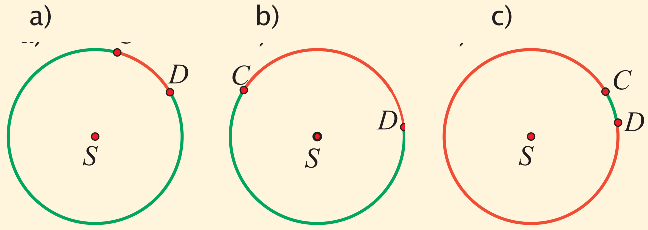
Kut $\sphericalangle ASB$ naziva se **središnji kut kružnice**, jer mu je vrh u njezinom središtu.

Središnji kut kružnice je kut čiji se vrh nalazi u središtu te kružnice.

Primjer 1. Središnji kut

Na slici su nacrtani kružni lukovi zadanih kružnica. Svakom kružnom luku $\overset{\frown}{CD}$ nacrtaj pripadajući središnji kut i izmjeri mu veličinu:

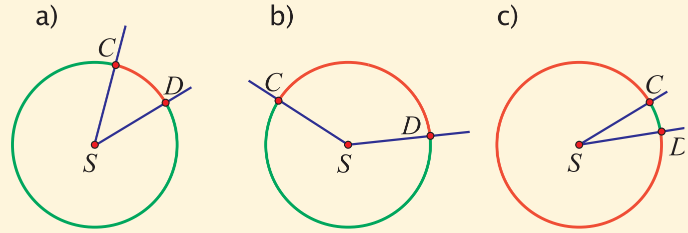
a) b) c)



Rješenje:

Nacrtajmo pripadne središnje kutove:

a) b) c)

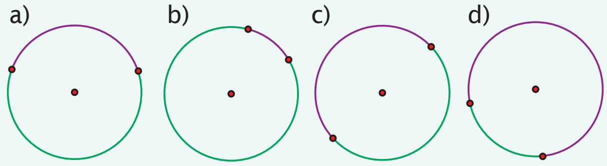


Njihove veličine su: a) 45°; b) 154°; c) 334°.

Zadaci

1. Na slici su nacrtani kružni lukovi zadanih kružnica.

a) b) c) d)



a) Svakom kružnom luku nacrtaj pripadajući središnji kut;
b) Izmjeri veličinu svakoga središnjeg kuta.

2. Nacrtaj kružnicu te na njoj kružni luk $\widehat{AB}$. Izmjeri veličinu pripadnoga središnjeg kuta.

3. Nacrtaj središnji kut neke kružnice koji ima veličinu:
a) 75°; b) 14°; c) 60°; d) 180°; e) 288°.

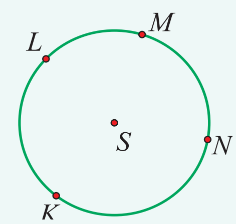
4. Nacrtaj kružnicu polumjera 2 cm i na njoj istakni dvije točke. Pripadajući kružni luk odnosi se na *manji* od dva kružna luka što ih određuju dvije točke. Kolika je veličina središnjega kuta koji pripada nacrtanom kružnom luku?

5. Konstruiraj kružnicu $k(D, 13\text{ mm})$ i njezinu tetivu $\overline{MP}$. Izmjeri veličinu središnjega kuta ako je tetiva duga:
a) 3 mm; b) 1 cm; c) 1.5 cm; d) 25 mm.

6. Konstruiraj kružnicu $k(T, 2.5\text{ cm})$ i jednu njezinu tetivu duljine 2.5 cm. Kolika je veličina pripadnoga središnjega kuta?

7. Nacrtaj kružnicu $k(V, 1\text{ cm})$ i na njoj istakni točke A, B i C.
a) Izmjeri veličine središnjih kutova $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ i $\sphericalangle CVA$;
b) Bez računanja odgovori koliki je zbroj ova tri središnja kuta.

8. Pogledaj sliku:

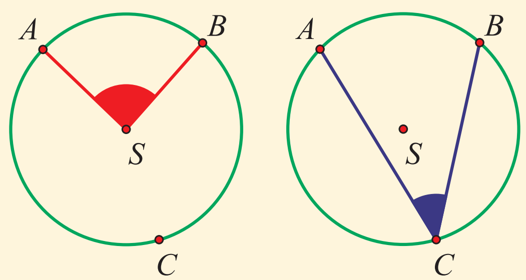


Izmjeri veličinu kuta koji pripada kružnom luku:
a) $\widehat{LN}$; b) $\widehat{MN}$; c) $\widehat{KM}$;
d) $\widehat{KL}$; e) $\widehat{LM}$.

9. Nacrtaj kružnicu i na njoj istakni točke A, B, C, D i E. Izmjeri veličinu kuta koji pripada kružnom luku:
a) $\widehat{AC}$; b) $\widehat{BE}$; c) $\widehat{CD}$; d) $\widehat{DA}$; e) $\widehat{DB}$.

Primjer 2. Obodni kut

Pogledaj ova dva kuta. Jedan je označen crvenom, a drugi plavom bojom.



a) Gdje se nalazi vrh crvenog kuta, a gdje vrh plavog kuta?

b) Koji od njih je središnji kut?

c) Što misliš, kako bi se mogao zvati plavi kut? Obrazloži svoj prijedlog.

Rješenje:

a) Vrh crvenoga kuta nalazi se u središtu zadane kružnice;

b) Središnji se kut nalazi na prvoj slici (kut označen crvenom bojom);

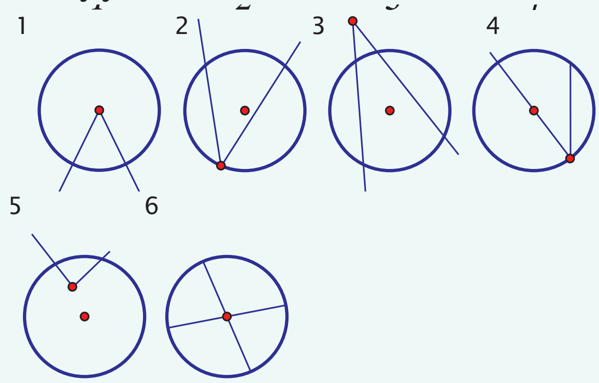
c) Znamo da je središnji kut dobio ime po tome što mu se vrh nalazi u središtu kružnice. Stoga pokušajmo pronaći vezu, kako bi se mogao zvati kut kojem je vrh na kružnici. Svaki učenički pokušaj s dobrim obrazloženjem dobrodošao je, a ovdje ćemo navesti pravo ime ovakva kuta. Kut čiji kraci sijeku kružnicu, a vrh mu se nalazi na toj kružnici zove se **obodni kut.**

obodni kut

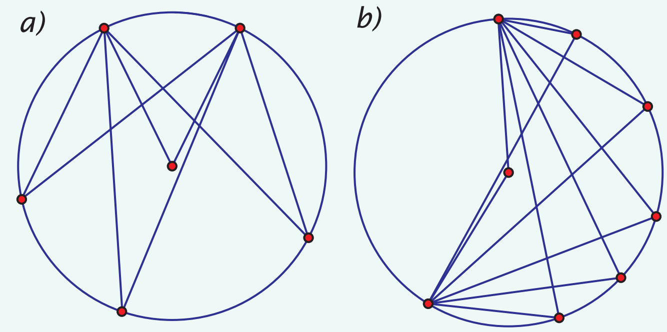
Obodni kut kružnice je kut čiji kraci sijeku kružnicu, a vrh mu se nalazi na toj kružnici.

Zadaci

10. Na kojoj se slici nalaze obodni kutovi:



11. Nacrtaj ovakve slike, pa crvenom bojom označi središnje, a plavom obodne kutove:

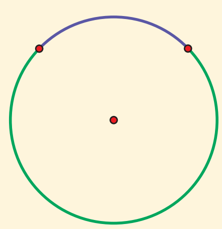


12. Nacrtaj $k(S, 2\text{ cm})$. Nacrtaj jedan njezin obodni kut od 42°.

13. Nacrtaj $k(A, 2.2\text{ cm})$. Nacrtaj jedan njezin obodni kut od 87°.

14. Nacrtaj $k(S, 2\text{ cm})$. Nacrtaj jedan njezin obodni kut od 150°.

Primjer 3. Obodni kutovi nad istim kružnim lukom



Na slici je nacrtan kružni luk zadane kružnice.

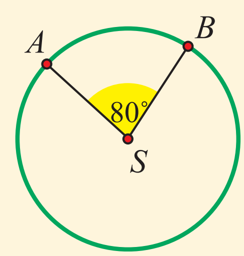
a) Koliko središnjih kutova pripada kružnom luku?

b) Koliko obodnih kutova pripada kružnom luku?

c) Nacrtaj pet obodnih kutova koji pripadaju zadanom kružnom luku;

d) Izmjeri veličinu svakoga nacrtanog obodnoga kuta.

Rješenje:

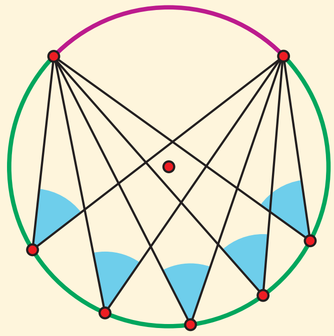


a) Svakom zadanom kružnom luku pripada samo jedan središnji kut jer postoji samo jedno središte svake kružnice.

b) Kraci obodnoga kuta sijeku zadanu kružnicu, a vrh mu se nalazi na toj kružnici. Kako vrh može biti bilo koja od točaka kružnice izvan zadanoga kružnog luka, znači da zadanom kružnom luku pripada beskonačno mnogo obodnih kutova.

Svakom kružnom luku pripada beskonačno mnogo obodnih kutova.

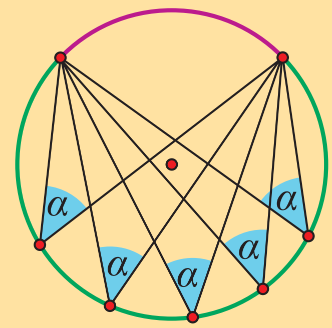
c) Odaberimo pet točaka kružnice koje nisu dio zadanoga kružnog luka i nacrtajmo neke od obodnih kutova:



d) Izmjerimo li kutomjerom sve veličine obodnih kutova nad istim kružnim lukom, primijetit ćemo da su svi jednakih veličina.

U ovom slučaju iz udžbenika svi obodni kutovi nad zadanim kružnim lukom iznose 62º.

Svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom jednakih su veličina.



Zadaci

15. Nacrtaj kružnicu i na njoj odaberi jedan kružni luk. Nacrtaj 10 pripadajućih obodnih kutova i izmjeri im veličine.

16. Nacrtaj $k(A, 1 \text{ cm})$ i na njoj istakni kružni luk.

    a) Koliko ima pripadajućih središnjih kutova? Obrazloži odgovor.

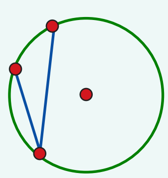
    b) Koliko ima pripadajućih obodnih kutova? Obrazloži odgovor.

17. Prepiši, pa dopuni rečenice:

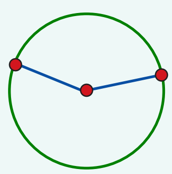
    a) _______________ kružnice je kut čiji se vrh nalazi u središtu te kružnice.

    b) Nad istim kružnim lukom ima ______________ obodnih kutova.

    c) _______________ kružnice je kut čiji kraci sijeku kružnicu, a vrh mu se nalazi na toj kružnici.

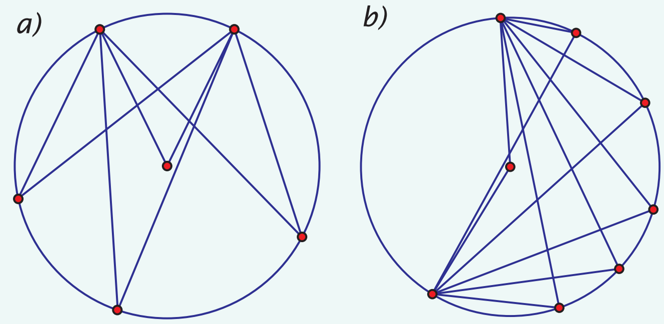
    

    d) Na slici je nacrtan _____________ kut.

    e) Na slici je nacrtan _____________ kut.

18. Izmjeri sve obodne i središnje kutove na slikama:



19. Prepiši, pa dopuni rečenice:

    a) Svakom kružnom luku pripada jedan ________ ______ kut;

    b) Svakom kružnom luku pripada beskonačno mnogo _____________ kutova.

20. Nacrtaj $k(S, 3 \text{ cm})$ i njezinu tetivu duljine 5 cm.

    a) Nacrtaj središnji kut koji pripada toj tetivi;

    b) Istakni 10 obodnih kutova koji pripadaju toj tetivi.

21. Nacrtaj $k(F, 2.5 \text{ cm})$ i njezinu tetivu duljine 2 cm.

    a) Nacrtaj središnji kut koji pripada toj tetivi;

    b) Istakni 10 obodnih kutova koji pripadaju toj tetivi.

Vježbalica

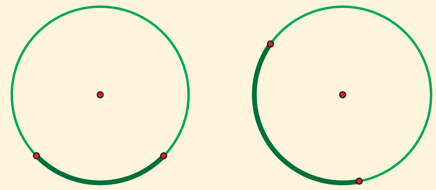
1. Što je:
   a) kružnica; b) krug; c) kružni vijenac;
   d) polumjer; e) promjer; f) tetiva;
   g) kružni luk; h) kružni isječak; i) kružni odsječak;
   j) polukrug; k) polukružnica?
2. a) Konstruiraj kružnicu kojoj je polumjer 2.7 cm;
   b) Konstruiraj kružnicu kojoj je promjer 3.4 cm.
3. a) Konstruiraj kružnicu kojoj je polumjer 3.5 cm;
   b) Konstruiraj kružnicu kojoj je promjer 5.3 cm.
4. a) Konstruiraj kružnicu kojoj je polumjer 6 cm;
   b) Konstruiraj kružnicu kojoj je promjer 4.7 cm.
5. Što su to koncentrične kružnice? Nacrtaj tri koncentrične kružnice s promjerima 3.5 cm, 5.2 cm i 7.3 cm.
6. Nacrtaj kružnice $k(A, 2.4 \text{ cm})$ i $k(C, 2 \text{ cm})$ tako da se one:
   a) sijeku; b) dodiruju; c) niti sijeku niti dodiruju.
7. Nacrtaj kružnice $k(S, 5.1 \text{ cm})$ i $k(T, 2.8 \text{ cm})$ tako da se dodiruju u točki A:
   a) izvana; b) iznutra.
8. Nacrtaj jednu kružnicu promjera 4.6 cm i jednu kružnicu polumjera 3 cm koje se sijeku.
9. Nacrtaj dužinu $|LM| = 6$ cm. Nacrtaj kružnicu sa središtem u točki M promjera 7.2 mm. Koliki treba biti polumjer druge kružnice sa središtem u L tako da te dvije kružnice:
   a) se dodiruju; b) nemaju zajedničkih točaka;
   c) se sijeku?
10. Konstruiraj kružnicu $k(S, 2.7 \text{ cm})$ i njenu tetivu duljine:
    a) 1 cm; b) 2 cm; c) 3 cm; d) 4 cm; e) 5 cm.
11. Konstruiraj kružnicu $k(A, 3.2 \text{ cm})$. Je li moguće konstruirati njenu tetivu duljine 7 cm? Objasni svoj odgovor.
12. Zadana je kružnica promjera 28 mm. Bez crtanja odgovori koje tetive je moguće konstruirati za tu kružnicu ako je duljina tetiva:
    a) 1 cm; b) 2.3 cm; c) 0.003 cm; d) 47 cm;
    e) 2 cm; f) 13 mm; g) 2.45 cm.
13. Nacrtaj dužinu duljine 3.4 cm. Konstruiraj kružnicu kojoj je ta dužina tetiva. Koliko takvih kružnica ima?
14. Nacrtaj dužinu $|AB| = 2.8$ cm. Konstruiraj tri kružnice kojima je dužina $\overline{AB}$ tetiva.
15. U koordinatnom sustavu u ravnini nacrtaj točke $A(-3, 5)$, $B(3, 5)$ i $C(5, 4)$. Jesu li to kolinearne točke?
16. U koordinatnoj ravnini nacrtaj točke $A(3, -3)$ i $C(3, 6)$. Nađi točku B koja leži na istom pravcu kao točke A i C.
17. U koordinatnoj ravnini nacrtaj točke $A(2, -4)$ i $C(-3, -4)$. Nađi točku B koja leži na istom pravcu kao točke A i C.
18. Nacrtaj tri nekolinearne točke i konstruiraj kružnicu koja prolazi tim točkama.
19. Nacrtaj trokut ABC i konstruiraj mu opisanu kružnicu.
20. Nacrtaj pravokutan trokut ABC i konstruiraj mu opisanu kružnicu.
21. Nacrtaj trokut ABC i konstruiraj mu upisanu kružnicu.
22. Nacrtaj pravokutan trokut ABC i konstruiraj mu upisanu kružnicu.

7.3. Poučak o središnjem i obodnom kutu

Središnji i obodni kut

Zadane su dvije kružnice i na svakoj je istaknut jedan kružni luk.

Na svakoj slici nacrtaj pripadni središnji kut i nekoliko obodnih kutova. Izmjeri im veličine.



U prošlom poglavlju naučili smo što je središnji, a što obodni kut. Također, zaključili smo da nad istim kružnim lukom postoji samo jedan središnji, a beskonačno mnogo obodnih kutova čija je veličina jednaka. Već iz uvodnog primjera možemo naslutiti da postoji veza između veličina središnjeg i obodnog kuta nad istim kružnim lukom. U sljedećim ćemo primjerima pokazati tu vezu.

Primjer 1. Poučak o središnjem i obodnom kutu

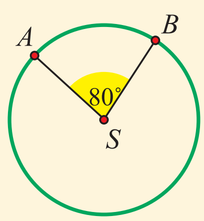
Nacrtaj kružnicu sa središtem S i njezin središnji kut $\sphericalangle ASB$ veličine 80°.

a) Nacrtaj nekoliko pripadajućih obodnih kutova;

b) Kolike su veličine tih obodnih kutova?

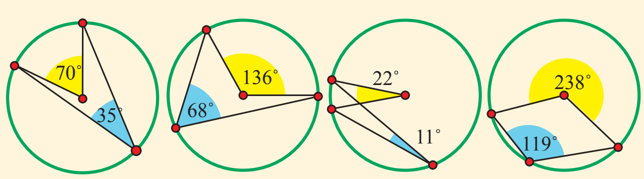
Rješenje:

Nacrtajmo kružnicu i zadani središnji kut veličine 80°.



a) U prethodnom primjeru smo vidjeli da su svi obodni kutovi nad istim kružnim lukom jednakih veličina. Zato nam je dovoljno izmjeriti veličinu samo jednog od obodnih kutova. Točna veličina jednog izmjerenog obodnog kuta je 40° pa svaki nacrtani obodni kut ima veličinu 40°.

Pogledajmo veličine još nekih središnjih i obodnih kutova:

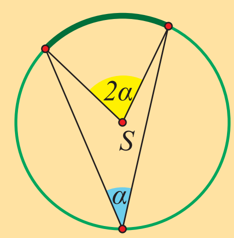


Nacrtamo li i sami još neke primjere, zaključit ćemo da je središnji kut veličinom dvostruko veći od pripadnog obodnoga kuta. Ta važna matematička tvrdnja naziva se **Poučkom o središnjem i obodnom kutu.**

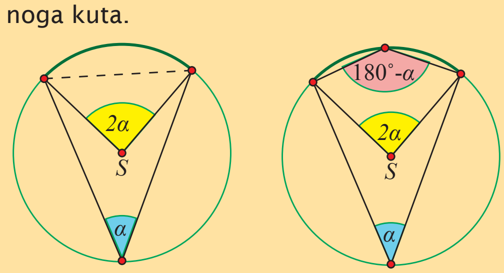
Poučak o središnjem i obodnom kutu

Poučak o središnjem i obodnom kutu:

Ako se središnji i obodni kut nalaze nad istim kružnim lukom, onda je središnji kut dvostruko veći od obodnog kuta.



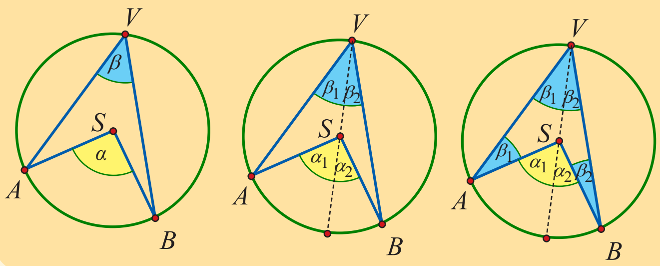
Pogledajmo još jednom sliku središnjeg i obodnoga kuta.



Tada nad istom tetivom postoji još jedan kut, ovdje označen crvenom bojom. Njegova veličina iznosi 180° − α.

Dokaz Poučka o središnjem i obodnom kutu:

Zadan je središnji kut α i pripadni obodni kut β kao na slici.



Nacrtajmo promjer koji prolazi točkama *V* i *S*. Trokuti *ASV* i *SBV* su jednakokračni, pa su im i kutovi uz osnovicu jednakih veličina.

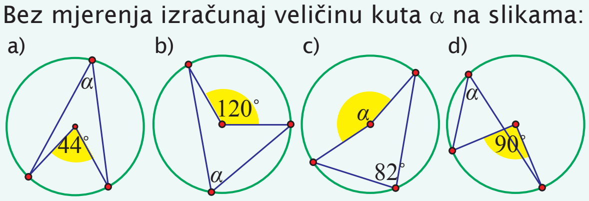
Kut α_1 je vanjski kut trokuta *ASV*, pa je $\alpha_1 = \beta_1 + \beta_1 = 2\beta_1$. Isto tako je kut α_2 vanjski kut trokuta SBV, pa je $\alpha_2 = 2\beta_2$. Sada računamo:

$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 = 2\beta_1 + 2\beta_2 = 2(\beta_1 + \beta_2) = 2\beta$.

Dokazali smo da je $\alpha = 2\beta$. Slično se dokazuje i slučaj kada je središte S izvan obodnog kuta.

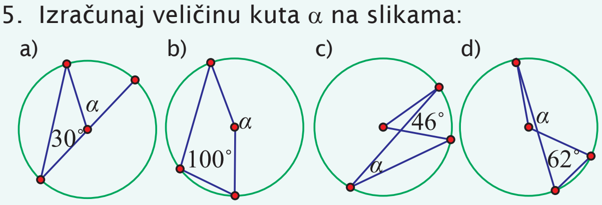
Z a d a c i

1. Matematički diktat:
   a) Konstruiraj $k(S, 15\text{ mm})$;
   b) Istakni točke *C* i *D* na kružnici;
   c) Nacrtaj pripadajući središnji kut;
   d) Izmjeri veličinu središnjega kuta;
   e) Nacrtaj nekoliko pripadnih obodnih kutova;
   f) Kolika je njihova veličina?
2. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji:
   a) 148°; b) 300°; c) 50°; d) 25°; e) 180°.
3. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni:
   a) 12°; b) 4°; c) 150°; d) 22.5°; e) 90°.
4. Bez mjerenja izračunaj veličinu kuta α na slikama:



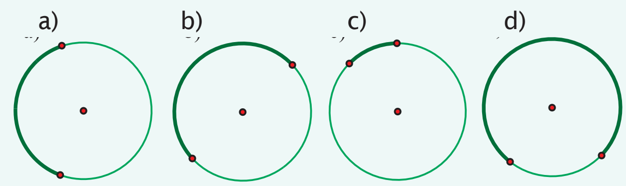
Bojom istakni pripadni kružni luk.

5. Izračunaj veličinu kuta α na slikama:

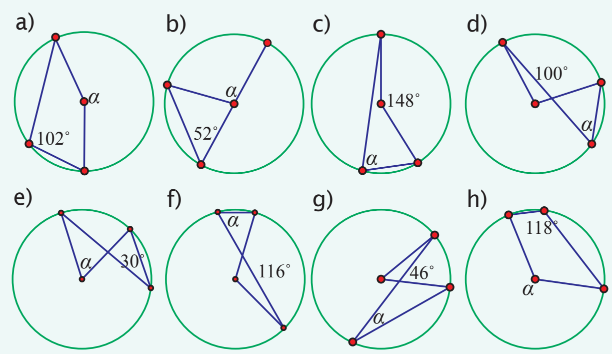


Bojom istakni pripadni kružni luk.

6. Nacrtaj kružnicu, središnji i nekoliko obodnih kutova ako je veličina središnjega kuta:
   a) 48°; b) 100°; c) 200°; d) 55°; e) 181°.
7. Nacrtaj kružnicu, središnji i nekoliko obodnih kutova ako je veličina obodnoga kuta:
   a) 48°; b) 100°; c) 20°; d) 55°; e) 90°.
8. Na svakoj je slici nacrtan kružni luk. Nacrtaj ovakve slike pa na njima docrtaj pripadne središnje i nekoliko obodnih kutova te im izračunaj veličine:



9. Odredi veličinu kuta α na svakoj slici:



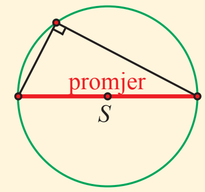
Primjer 2. Talesov poučak

a) Nacrtaj kružnicu i njezin središnji kut koji iznosi 180°;

b) Nacrtaj jedan pripadajući obodni kut;

c) Dopuni rečenicu:
Ako središnji kut iznosi 180°, onda je njegov pripadajući obodni kut ___________ kut.

Rješenje:



a) Nacrtajmo kružnicu i ispruženi kut kao središnji. Primijetimo da je na ovaj način istaknut **promjer** kružnice.

b) Nacrtajmo jedan pripadajući obodni kut. Po Poučku o središnjem i obodnom kutu znamo da taj obodni kut ima veličinu 90°;

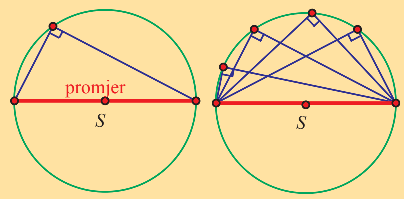
c) Sada nije teško dopuniti rečenicu:

Ako središnji kut iznosi 180º, onda je njegov pripadajući obodni kut *pravi* kut.

Ovaj specijalni slučaj Poučka o središnjem i obodnom kutu, kada središnji kut iznosi 180º, naziva se **Talesovim poučkom**. Ako je središnji kut ispruženi kut, onda njegovi kraci u krugu čine promjer.

Talesov poučak

Talesov poučak: Svaki obodni kut nad promjerom kružnice pravi je kut.



Primjer 3. Konstrukcija pravokutnog trokuta pomoću Talesovog poučka

Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:

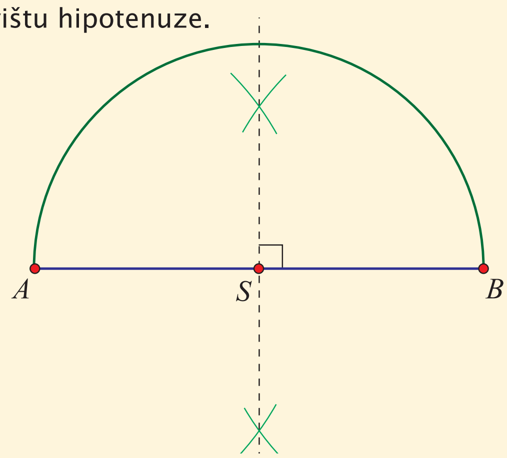
a) Hipotenuza duga 6 cm, a jedna kateta 3.5 cm;

b) Hipotenuza duga 5.5 cm, a jedan kut iznosi 60º.

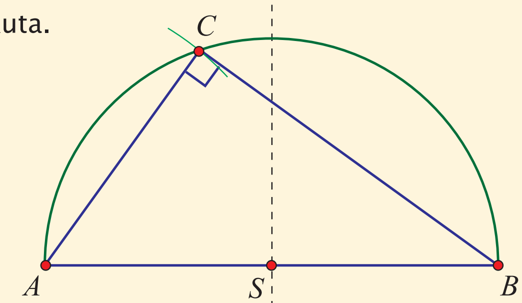
Rješenje:

Iskoristimo Talesov poučak za rješavanje zadatka.

a) Nacrtamo li zadanu hipotenuzu, znamo da je kut nasuprot nje pravi kut. Prema Talesovu poučku nad tom hipotenuzom možemo konstruirati polukružnicu kojoj je središte u polovištu hipotenuze.



Sada iskoristimo podatak da je jedna od kateta duga 3.5 cm. U šestar uzmimo veličinu 3.5 cm i povucimo kružni luk iz jedne krajnje točke hipotenuze (primjerice, iz *A*). U presjeku luka i polukružnice dobit ćemo vrh *C* pravokutnoga trokuta.

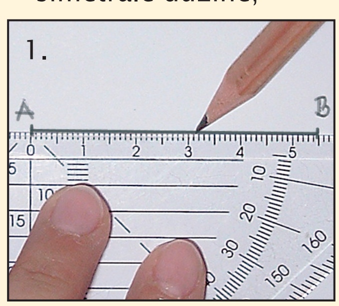


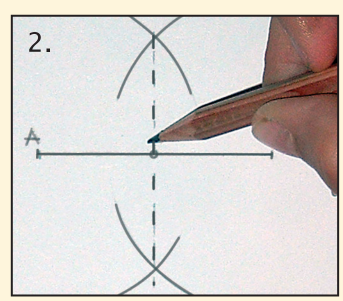
Zatim spojimo vrh *C* s vrhovima *A* i *B*. Tako dobivamo pravokutan trokut ΔABC .

b) Ovaj zadatak rješava se slično kao i postupak u zadatku a), samo što je zadan kut. Evo rješenja:

1.Nacrtajmo hipotenuzu $\overline{AB}$ duljine 5.5 cm;

2.Konstruirajmo polovište hipotenuze pomoću simetrale dužine;



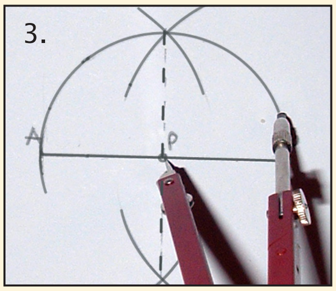


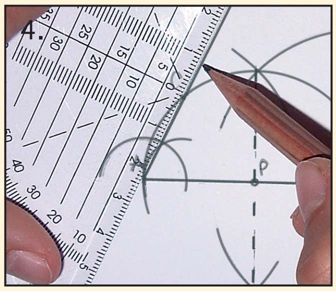
3.Konstruirajmo polukružnicu promjera $\overline{AB}$;

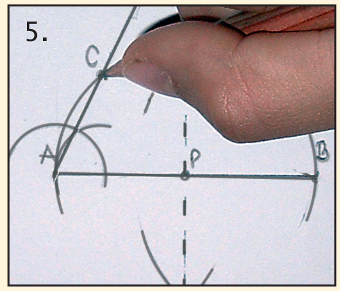
4.Iz jedne od krajnjih točaka hipotenuze (primjerice, iz *A*) konstruiramo kut od 60º;

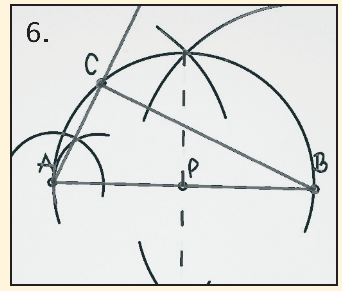
5.U presjeku kraka kuta i polukružnice dobit ćemo vrh *C* pravokutnog trokuta.

6. Spojimo točke *A* i *B* sa *C* i trokut ΔABC je konstruiran.









Z a d a c i

10. Koliki je obodni kut nad promjerom kružnice?

11. Konstruiraj *k*(*G*, 2 cm). Zatim nacrtaj nekoliko njezinih obodnih kutova veličine 90º.

12. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
   a) Hipotenuza duga 5 cm, a jedna kateta 3 cm;
   b) Hipotenuza duga 6 cm, a jedan kut iznosi 30º;
   c) Hipotenuza duga 32 mm, a jedan kut iznosi 75º;
   d) Hipotenuza duga 6.2 cm, a jedna kateta 5 cm.

13. Konstruiraj pravokutan trokut ΔABC s hipotenuzom $|AB| = 3$ cm kojem je:
   a) $|AC| = 1$ cm; b) $|CB| = 1.5$ cm; c) $\measuredangle CAB = 45º$;
   d) $\measuredangle ABC = 30º$.
   Izračunaj opseg i površinu toga trokuta.

14. Konstruiraj pravokutan trokut ΔKMB s hipotenuzom $|MB| = 39$ mm kojem je:
   a) $|KB| = 19$ mm; b) $|MK| = 31$ mm;
   c) $\measuredangle KMB = 60º$; d) $\measuredangle MBK = 15º$.
   Izračunaj opseg i površinu tog trokuta.

15. Služeći se Talesovim poučkom konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $|TP| = 49$ mm.

16. Služeći se Talesovim poučkom konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $|OP| = 30$ mm.

17. Konstruiraj pravokutan trokut s hipotenuzom dugom 4 cm kojem je visina na hipotenuzu duljine 1.5 cm.

18. Konstruiraj pravokutan trokut ΔABC s hipotenuzom $|AB| = 57$ mm i visinom na hipotenuzu $|CN| = 1$ cm.

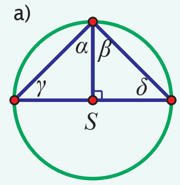
19. Služeći se Talesovim poučkom konstruiraj kvadrat *ABCD* s dijagonalom $|AC| = 40$ mm.

20. Služeći se Talesovim poučkom konstruiraj kvadrat *KLMN* s dijagonalom $|KM| = 5.7$ cm.

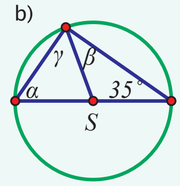
21. Konstruiraj pravokutnik kojem je zadana jedna stranica a i duljina dijagonale *d*:
   a) $a = 3.2$ cm, $d = 4$ cm; b) $a = 2$ cm, $d = 6.3$ cm;
   c) $a = 3.5$ cm, $d = 7$ cm; d) $a = 5.1$ cm, $d = 5.8$ cm.

22. Odredi kutove na slici:

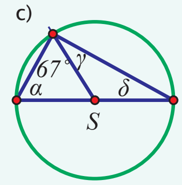
a)



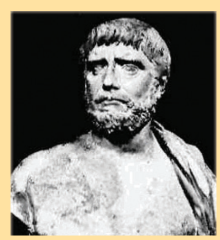
b)



c)



Tales



Tales je bio veliki grčki matematičar i filozof, rođen u 7. st. pr. Kr. u gradu Miletu u Maloj Aziji (danas Turska). Možemo reći da je on postavio temelje matematici jer je prvi zagovarao da se matematičke tvrdnje trebaju dokazivati (a ne samo opažati). Evo nekih matematičkih poučaka za koje se smatra da ih je dokazao Tales:

- Dijametar dijeli krug na dva jednaka dijela.
- Kutovi uz bazu jednakokračnoga trokuta jednaki su.
- Kutovi između dva pravca koji se sijeku jednaki su (misli se na vršne kutove).
- Dva su trokuta sukladna ako imaju jednaka dva kuta i jednu stranicu.
- Kut na polukružnici pravi je kut.

Posljednji poučak naziva se Talesovim poučkom.

7.4. Međusobni položaj pravca i kružnice

Presjek pravca i kružnice

Zamisli pravac i kružnicu koji se sijeku. Napamet i bez crtanja dopuni:

a) Ako se pravac i krug sijeku, pravac dijeli krug na dva ______________.

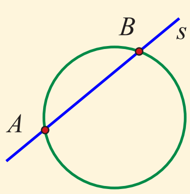
b) Ako se pravac i kružnica sijeku, pravac dijeli kružnicu na dva ______________.

Primjer 1. Međusobni položaj pravca i kružnice u ravnini

Nacrtaj pravac i kružnicu. Koliko zajedničkih točaka mogu imati pravac i kružnica? Nacrtaj sva rješenja.

Rješenje:

Rješenje zadatka ovisi o položaju pravca i kružnice u ravnini koje smo nacrtali.



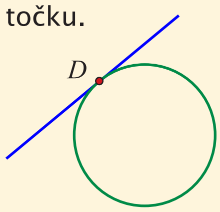
Pravac i kružnica mogu se **sjeći.**

A, B - sjecišta pravca i kružnice

s - sekanta

Njihov presjek bit će dvije točke koje se nazivaju **sjecištima**. To su točke A i B sa slike, jer one pripadaju i pravcu i kružnici. Pravac koji siječe kružnicu naziva se *sekantom*.

Pravac i kružnica mogu imati jednu zajedničku točku.



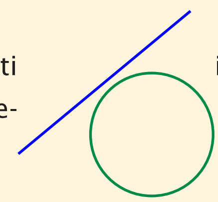
D - diralište pravca i kružnice

t - tangenta

Tada ne govorimo da se pravac i kružnica sijeku, nego da se **dodiruju** ili da tangiraju. Točka u kojoj se dodiruju pravac i kružnica naziva se **diralištem**. Pravac koji dodiruje kružnicu naziva se **tangentom** te kružnice.

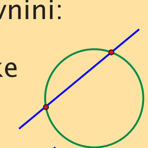
tangenta

Sliku smo mogli nacrtati i tako da pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka:

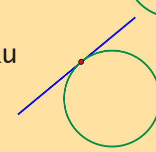


Položaj pravca i kružnice u ravnini:

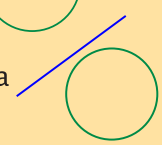
- imaju dvije zajedničke točke (sijeku se)



- imaju jednu zajedničku točku (dodiruju se)

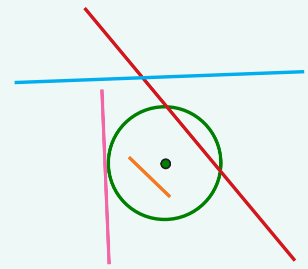


- nemaju zajedničkih točaka



Z a d a c i

1. U kojem položaju mogu biti pravac i kružnica u ravnini?
2. Što je tangenta?
3. Što je sekanta?
4. Prepiši, pa dopuni rečenice:
   a) ___________je pravac koji dodiruje kružnicu u jednoj točki;
   b) Ako pravac i kružnica imaju ____ zajedničke točke, onda kažemo da se oni sijeku.
   c) Sekanta je pravac koji ___________kružnicu u 2 točke;
   d) ___________ je točka u kojoj se dodiruju pravac i kružnica;
   e) Ako pravac i kružnica imaju jednu zajedničku točku, onda kažemo da se oni ___________.
5. Na slici se nalaze pravci i kružnica označeni raznim bojama.
   Koji od ovih pravaca sijeku kružnicu, koji je dodiruju, a koji je ne sijeku i ne dodiruju?



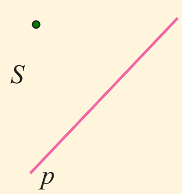
6. Skiciraj pravac i kružnicu tako da se oni:
   a) sijeku; b) dodiruju; c) ne sijeku i ne dodiruju.

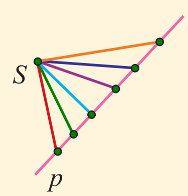
Primjer 2. Udaljenost pravca i središta kružnice

Nacrtaj kružnicu $k(S, 19\text{ mm})$. Zatim konstruiraj pravac koji je od središta kružnice udaljen 2 cm. Siječe li taj pravac kružnicu k?

Rješenje:

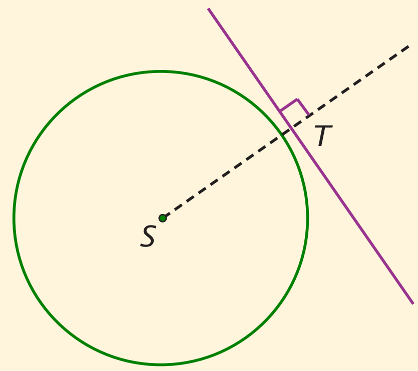
Udaljenost od pravca do točke S je duljina najkraće od svih spojnica točke S s točkama pravca. Najkraća je ona dužina koja je **okomita** na zadani pravac i krajnja joj je točka S.





Sada riješimo zadatak. Iz središta kružnice povucimo neki polupravac i na njemu pronađimo točku T koja je od središta udaljena 2 cm. Ta točka T nalazi se izvan zadanoga kruga jer je polumjer 1.9 cm. Zato zaključujemo da pravac neće sjeći kružnicu niti će se dodirivati.

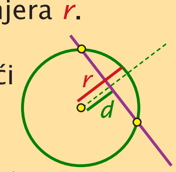
Konstruirajmo sada i pravac p koji je okomit na polupravac i prolazi točkom T.



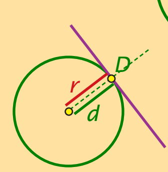
Budući da je polumjer kružnice 1.9 cm, svaki pravac koji je od središta udaljen za manje od 1.9 cm siječe kružnicu u dvije točke, a svaki pravac koji je od središta udaljen za više od 1.9 cm nema s kružnicom zajedničkih točaka. Onaj pravac koji je od kružnice udaljen za točno 1.9 cm dodiruje kružnicu u jednoj točki – diralištu.

Označimo sa d udaljenost od pravca do središta zadane kružnice polumjera r.

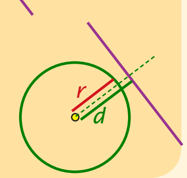
Ako je $r > d$, tada će pravac sjeći kružnicu.



Ako je $r = d$, pravac i kružnica će se dodirivati.

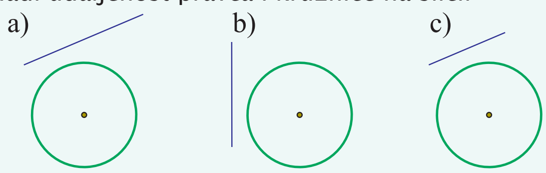


Ako je $r < d$, pravac i kružnica neće imati zajedničkih točaka.



Zadaci

7. Nađi udaljenost pravca i kružnice na slici:



8. Polumjer kružnice je 1 cm. Koji od ovih pravaca siječe kružnicu, a koji je dodiruje ako je pravac udaljen od središta:
   a) 10 mm; b) 1.1 cm; c) 0.2 cm; d) 0.3 dm; e) 2.2 cm.
   Nacrtaj te pravce i kružnice.
9. Promjer kružnice je 32 cm. Koji od ovih pravaca siječe kružnicu, a koji je dodiruje ako je pravac udaljen od središta:
   a) 14 cm; b) 3.2 dm; c) 0.2 mm; d) 16 cm;
   e) 32.2 cm.
10. Pravac je udaljen od središta kružnice za 7 cm. Koliko on ima zajedničkih točaka s kružnicom ako je polumjer kružnice:
    a) 3 cm; b) 2.2 cm; c) 0.7 dm; d) 7.2 cm; e) 6.9 cm.
    Nacrtaj te pravce i kružnice.
11. Nacrtaj kružnicu polumjera 2.5 cm i pravac koji ju ne siječe i ne dodiruje. Kolika je udaljenost tog pravca i kružnice?
12. Nacrtaj kružnicu promjera 4 cm i pravac koji s njom nema zajedničkih točaka. Kolika je udaljenost toga pravca i kružnice?

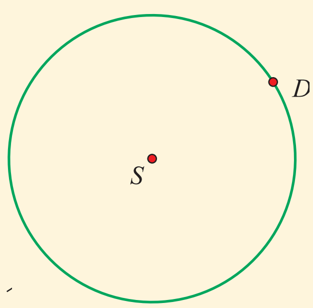
Primjer 3. Konstrukcija tangente iz točke na kružnici

Nacrtaj kružnicu $k(S, 2.1\text{ cm})$ i na njoj istakni točku D. Konstruiraj tangentu kružnice iz točke D.

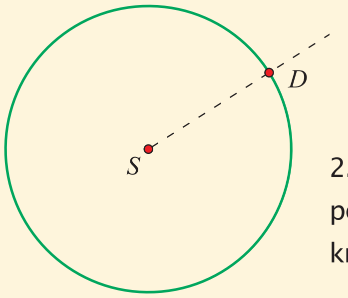
Rješenje:

Iz prethodnoga primjera smo zaključili: ako je udaljenost pravca od središta jednaka polumjeru kružnice, onda je taj pravac tangenta zadane kružnice. Stoga zaključujemo da u ovom zadatku pravac mora biti udaljen od središta kružnice 2.1 cm.

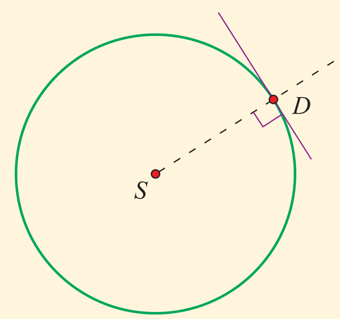
1. Na kružnici istaknemo diralište D.



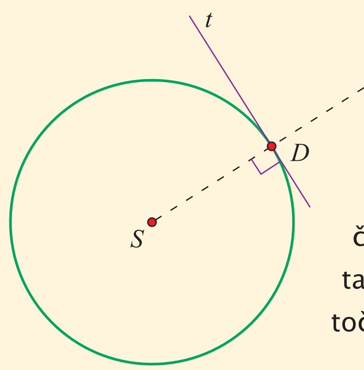
2. Iz središta kružnice povučemo polupravac kroz D.



3. Iz dirališta D konstruiramo okomicu na polupravac.

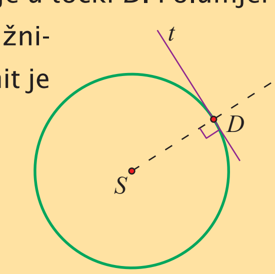


4. Okomicu označimo sa t jer je to tangenta kružnice u točki D.



Neka je zadana kružnica i njena tangenta t koja kružnicu dodiruje u točki D. Polumjer koji spaja središte kružnice s diralištem D okomit je na tangentu t.

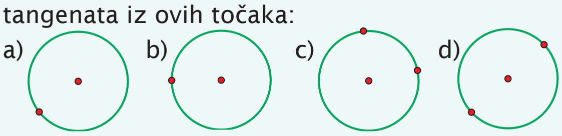
$$\overline{SD} \perp t$$



Zadaci

13. Nacrtaj ovakve slike, pa skiciraj položaj tangenata iz ovih točaka:

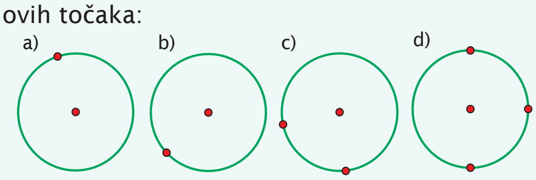
a) b) c) d)



14. Konstruiraj kružnicu polumjera 26 mm i istakni jednu točku na kružnici. Konstruiraj tangentu iz te točke na kružnicu.

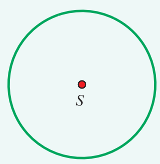
15. Konstruiraj kružnicu, a zatim konstruiraj pet njezinih tangenata.

16. Nacrtaj ovakve slike, pa konstruiraj tangente iz ovih točaka:



17. Zadana je kružnica:

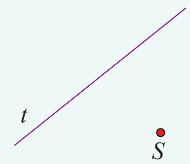
Konstruiraj tri tangente ove kružnice. Koliko tangenata ima ova kružnica?



18. Nacrtaj dužinu $|LM| = 6$ cm. Nacrtaj pravac koji prolazi točkom M i okomit je na dužinu $\overline{LM}$. Koliki treba biti polumjer kružnice sa središtem u L tako da pravac i kružnica:
a) dodiruju jedno drugo;
b) nemaju zajedničkih točaka;
c) sijeku jedno drugo?

19. Nacrtaj ovakav pravac t i točka S.

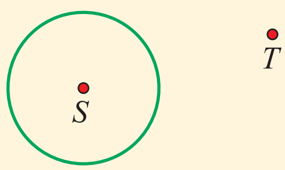
Pronađi kružnicu kojoj je S središte, takvu da joj je t tangenta. Koliki je polumjer te kružnice?



20. Nacrtaj pravac p i točku A koja mu ne pripada. Konstruiraj kružnicu sa središtem u A tako da:
a) p siječe kružnicu;
b) p dodiruje kružnicu;
c) pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka.

Primjer 4. Konstrukcija tangente iz točke izvan kružnice

Zadana je kružnica i točka T izvan kružnice.



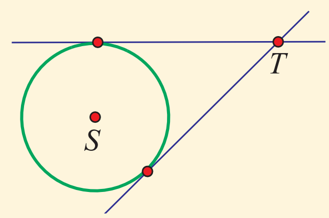
Treba naći tangentu kružnice koja prolazi točkom T.

a) Skiciraj rješenje; b) Konstruiraj rješenje.

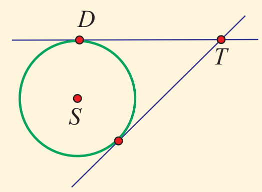
Rješenje:

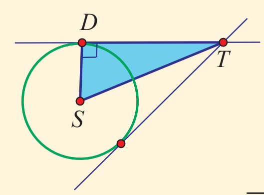
U prethodnom primjeru trebalo je naći tangentu iz točke koja se nalazi na kružnici. No, ovdje zadana točka T ne pripada kružnici i nije moguće konstruirati tangentu istim postupkom, već treba tražiti drugi put do rješenja. Zato prvo pogledajmo skicu:

a) Primijetimo: kada bismo pronašli dirალište, samo bismo provukli tangentu kroz T i diralište i zadatak bi bio riješen. Skicirajmo kako bi trebalo izgledati rješenje zadatka:

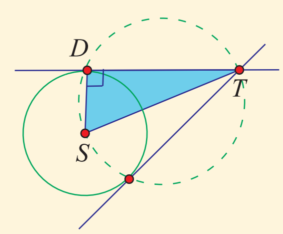


Primijetimo da iz točke T možemo povući dvije tangente na kružnicu. Još uvijek ne znamo kako to konstruirati pa nastavimo promatrati. Spojimo točke S, T i D u trokut.





Znamo da je tangenta okomita na polumjer $\overline{SD}$. To znači da je trokut ΔSDT pravokutan trokut s pravim kutom u diralištu D. Prisjetimo se Talesova teorema i zamislimo kružnicu nad dužinom $\overline{ST}$ kao promjerom.

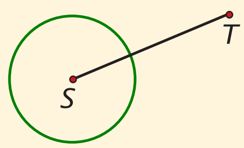


Iz skice zaključujemo da se dvije kružnice sijeku u diralištima. Dakle, dirališta ćemo dobiti kao presjek ovih dviju kružnica. Tada samo provučemo tangentu kroz T i D i zadatak je riješen.

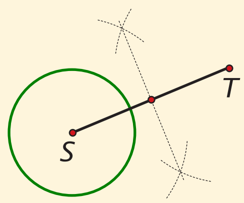
Ovdje smo pokazali kako nam skica može pomoći da promatranjem (*analizom skice*) dođemo do rješenja problema.

b) Sada konstruirajmo tangente prema zaključcima iz skice:

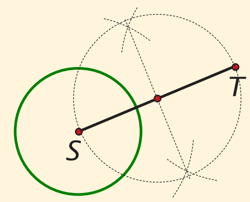
1. Nacrtamo dužinu $\overline{ST}$.



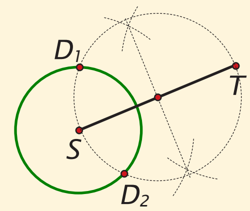
2. Konstruiramo polovište dužine $\overline{ST}$. To će biti središte nove kružnice.



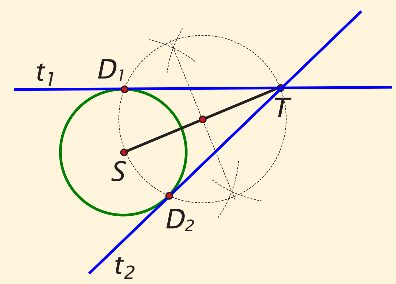
3. Konstruiramo kružnicu s promjerom $\overline{ST}$.



4. Točke u kojima se sijeku ove dvije kružnice su dirališta D_1 i D_2.

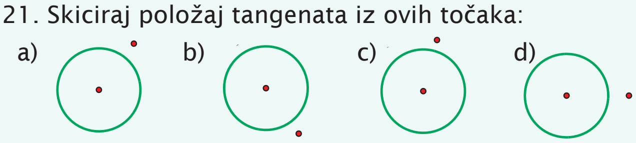


5. Povučemo tangente t_1 i t_2 kroz dirališta i točku T.



Z a d a c i

21. Skiciraj položaj tangenata iz ovih točaka:

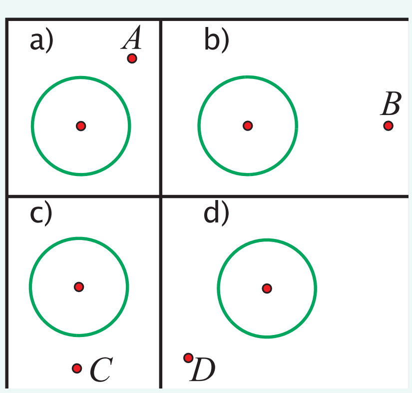


22. Konstruiraj kružnicu polumjera 3.6 cm i istakni jednu točku izvan kružnice. Konstruiraj tangente iz te točke na kružnicu.

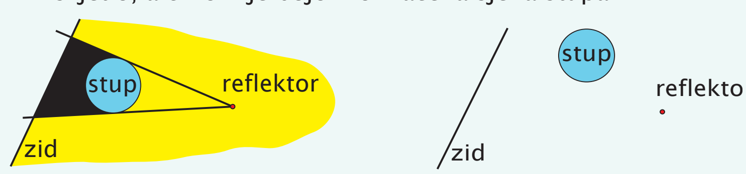
23. Konstruiraj kružnicu $k(H, 2\text{ cm})$ i istakni točku B koja je od središta kružnice udaljena 2.2 cm. Zatim konstruiraj tangente iz B na k.

24. Konstruiraj kružnicu $k(F, 2\text{ cm})$ i istakni točku R koja je od središta kružnice udaljena 4.2 cm. Zatim konstruiraj tangente iz R na k.

25. Skiciraj, a zatim i konstruiraj tangente iz ovih točaka:

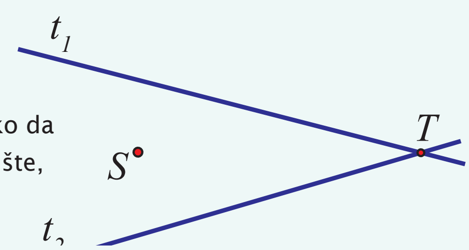


26. Na prvoj slici nalazi se skica reflektora koji baca svjetlo, a crnom je bojom označena sjena stupa.

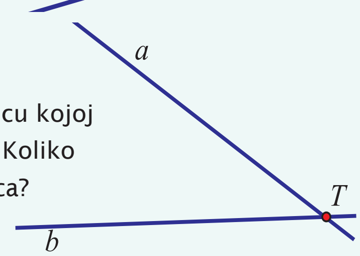


Na drugoj slici žutom bojom označi osvijetljene, a crnom dijelove prostorije u sjeni.

27. Nacrtaj kružnicu tako da joj je S središte, a t_1 i t_2 tangente.



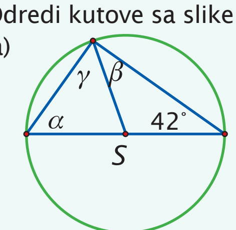
28. Konstruiraj kružnicu kojoj su a i b tangente. Koliko ima takvih kružnica?

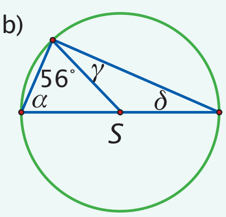


Vježbalica

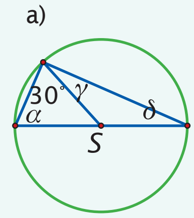
1. Nacrtaj središnji kut neke kružnice koji ima veličinu: a) 65°; b) 25°; c) 75°; d) 100°; e) 150°.
2. Konstruiraj kružnicu *k*(*D*, 28 mm) i njenu tetivu $\overline{MP}$. Izmjeri veličinu središnjeg kuta ako je tetiva duga: a) 22 mm; b) 1.5 cm; c) 3.6 cm; d) 44 mm.
3. Nacrtaj *k*(*S*, 3 cm). Nacrtaj jedan njen obodni kut od 45°.
4. Nacrtaj *k*(*A*, 3.5 cm). Nacrtaj jedan njen obodni kut od 80°.
5. Nacrtaj *k*(*S*, 2.6 cm). Nacrtaj jedan njen obodni kut od 140°.
6. Nacrtaj *k*(*S*, 3.7 cm) i njenu tetivu duljine 6 cm.
   a) Nacrtaj središnji kut koji pripada toj tetivi;
   b) Istakni 10 obodnih kutova koji pripadaju toj tetivi.
7. Nacrtaj *k*(*F*, 4 cm) i njenu tetivu duljine 3.2 cm.
   a) Nacrtaj središnji kut koji pripada toj tetivi;
   b) Istakni 10 obodnih kutova koji pripadaju toj tetivi.
8. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji: a) 142°; b) 312°; c) 57°; d) 27°; e) 185°.
9. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni: a) 17°; b) 7°; c) 100°; d) 44.25°; e) 15°.
10. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji: a) 25° 45'; b) 45°36'; c) 54°66'; d) 25°43'; e) 17°56'.
11. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni: a) 44°; b) 24°15'; c) 130°; d) 22°22'; e) 98°.
12. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji: a) 120°; b) 43°12'; c) 50°44'; d) 25.4°; e) 180°.
13. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni: a) 12°55'; b) 74°11; c) 15.6°; d) 22°18; e) 90°.
14. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji: a) 64°45; b) 30°54'; c) 50°12'; d) 25°; e) 80.5°.
15. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni: a) 77°; b) 35°45; c) 50°10'; d) 22°47'; e) 98°23'.
16. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 7 cm, a jedna kateta 3 cm;
    b) Hipotenuza duga 8 cm, a jedan kut iznosi 60°.

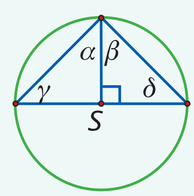
    Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 3.5 cm, a jedna kateta 3 cm;
    b) Hipotenuza duga 5.6 cm, a jedan kut iznosi 45°.
18. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 5 cm, a kateta a = 4.2 cm;
    b) Hipotenuza duga 6 cm, a kut α iznosi 50°.
19. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 6 cm, a kateta b = 3.5 cm;
    b) Hipotenuza duga 5.5 cm, a kut β iznosi 75°.
20. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 6.2 cm, a kateta a = 3.8 cm;
    b) Hipotenuza duga 5.8 cm, a kut β iznosi 40°.
21. Koristeći Talesov poučak konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $|TP| = 56$ mm.
22. Koristeći Talesov poučak konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $OP| = 39$ mm.
23. Koristeći Talesov poučak konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $|TP| = 58$ mm.
24. Koristeći Talesov poučak konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $OP| = 44$ mm.
25. Konstruiraj pravokutan trokut s hipotenuzom dugom 4.8 cm kojem je visina na hipotenuzu duljine 2 cm.
26. Konstruiraj pravokutan trokut ΔABC s hipotenuzom $|AB|$=62 mm i visinom na hipotenuzu $|CN|$=3 cm.
27. Konstruiraj pravokutan trokut ΔABC s hipotenuzom $|AB|$=46 mm i visinom na hipotenuzu $|CN|$=2.8 cm.
28. Konstruiraj pravokutan trokut s hipotenuzom dugom 6.1 cm kojem je visina na hipotenuzu duljine 3.5 cm.
29. Koristeći Talesov poučak konstruiraj kvadrat *ABCD* s dijagonalom $|AC| = 50$ mm.
30. Koristeći Talesov poučak konstruiraj kvadrat *KLMN* s dijagonalom $|KM| = 4.8$ cm.
31. Konstruiraj pravokutnik kojem je zadana jedna stranica *a* i duljina dijagonale *d*:
    a) *a* = 4 cm, *d* = 5 cm; b) *a* = 3.4 cm, *d* = 5.3 cm; c) *a* = 2.8 cm, *d* = 6.5 cm; d) *a* = 5 cm, *d* = 8 cm.
32. Odredi kutove sa slike:

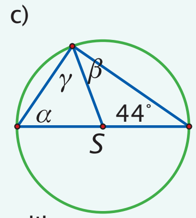
a)


b)


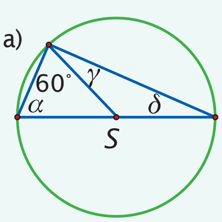
33. Odredi kutove sa slike:

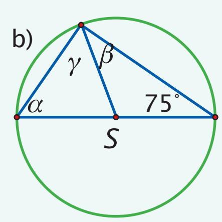
a)


b)


c)


34. Odredi kutove sa slike:

a)


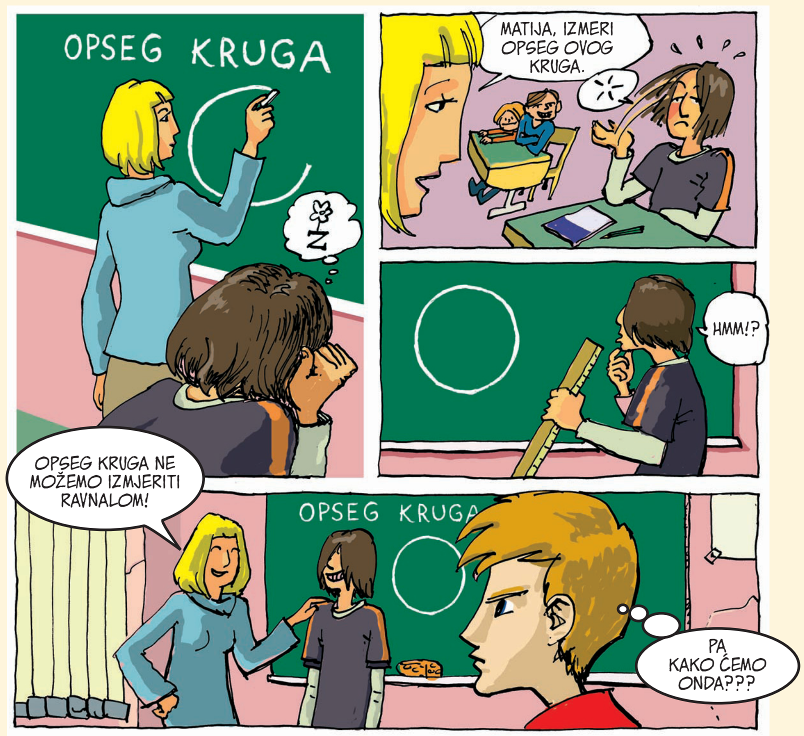
b)


7.5. Opseg kruga

CD

Što misliš, je li opseg CD-a veći ili manji od 40 cm?
Kako bismo to provjerili?

Opseg mnogokuta bilo je lako izračunati jer se njegov rub sastoji od dužina koje možemo mjeriti ravnalom. No kružnica je krivulja i njezinu duljinu ne možemo mjeriti ravnalom na isti način kao kod mnogokuta. Zato ćemo koncem ili užetom opasati zadani kružni predmet, a zatim izravnati konac i izmjeriti duljinu ravnalom. Na taj način možemo eksperimentom odrediti približnu duljinu kružnice. No nekada to neće biti moguće izvesti (zbog prevelikog kruga ili zbog nemogućnosti opasivanja). U ovom poglavlju naučit ćemo kako matematičkim putem izračunati duljinu kružnice.



Opseg kruga = duljina kružnice!

Primjer 1. Broj π

Izmjeri opseg i promjer ovih predmeta, prepiši te popuni tablicu.

Predmet	Opseg *o*	Promjer *d*	Količnik *o*:*d*
Kovanica od 5 kn			
CD			
Limenka			
Sat			
Olovka			
Poklopac			

Što primjećuješ?

Rješenje:

Popunimo tablicu. Pogledamo li treći stupac tablice, primijetit ćemo, bez obzira na to o kakvu se krugu radi, da je količnik opsega i promjera kruga uvijek broj približno jednak 3. Kada bismo imali savršeno točne instrumente i kada bismo mjerili bez pogreške, u trećem bismo stupcu uvijek dobili jednak rezultat. To znači da je količnik opsega i dijametra kruga uvijek isti broj. Taj broj označavamo grčkim slovom π (čitamo: pi) i on približno iznosi 3.14.

$\pi \approx 3.14$

Zaključujemo da je $o : d = \pi$, pri čemu je o opseg, a d promjer (dijametar) kruga.

Iz te formule zaključujemo da je $o = d \cdot \pi$.

Kako je promjer jednak dvostrukom polumjeru, umjesto d možemo umetnuti $2 \cdot r$. Stoga formula za opseg kruga iznosi $o = 2 \cdot r \cdot \pi$.

opseg kruga

Formula za opseg kruga s polumjerom r:

$$o = 2\,r\,\pi$$

Broj π

Podijelimo li opseg i promjer bilo kojega kruga, dobit ćemo broj π. To je broj koji u decimalnom prikazu ima beskonačno mnogo decimala. Zato ga zaokružujemo na neki broj decimala.

Broj π zaokružen na 2 decimale: $\pi \approx 3.14$

Broj π zaokružen na 5 decimala: $\pi \approx 3.14159$

Nizozemski matematičar Ludolph van Ceulen je u 16. st. izračunao π na 32 decimale i njemu u čast π se naziva Ludolphovim brojem. Danas najmodernija računala mogu prikazati π na više od 200 milijardi decimala. Prilikom računanja π obično zaokružujemo na dvije decimale $\pi \approx 3.14$.

Broj pi zaokružen na 500 decimala:

3.1415926535897932384626433832795028
841971693993751058209749445923078164
062862089986280348253421170679821480
865132823066470938446095505822317253
594081284811174502841027019385211055
596446229489549303819644288109756659
33446128475648233786783165271201909

145648566923460348610454326648213393
607260249141273724587006606315588174
881520920962829254091715364367892590
3600113305305488204665213841469
51941511609433057270365
759591953092186117381
93261179310511854807
4462379962749567351
8857527248912279381
830119491

Z a d a c i

1. Pronađi desetak predmeta kružnog oblika (narukvica, prsten, limenka, čaša, boca, olovka, kovanica, čep, poklopac, sat...);

   a) Svakom predmetu izmjeri opseg tako da ga opašeš koncem, a zatim konac izravnaš i izmjeriš ravnalom ili metrom;

   b) Pomoću ravnala što točnije pokušaj izmjeriti promjer svakog kruga;

   c) Uvjeri se dijeljenjem da je količnik opsega i promjera svakog kruga iz zadatka približno jednak 3.14.

2. Prepiši, pa dopuni rečenice:

   a) Broj ___ približno je jednak 3.14;

   b) Broj π prikazan na četiri decimale iznosi ____;

   c) Opseg kruga jednak je duljini pripadne _______ _____;

   d) Formula za opseg kruga je ____________.

3. U svakoj rečenici pronađi pogrešku. Kako glase točne rečenice?

   a) Količnik opsega i polumjera kruga jednak je π;

   b) $\pi = 3.14$;

   c) $o = 2d\,\pi$;

   d) Broj π prikazan na pet decimala iznosi 3.14519.

Primjer 2. Izračunavanje opsega kruga

Izračunaj opseg kruga kojem je polumjer 3.6 dm.

Rješenje:

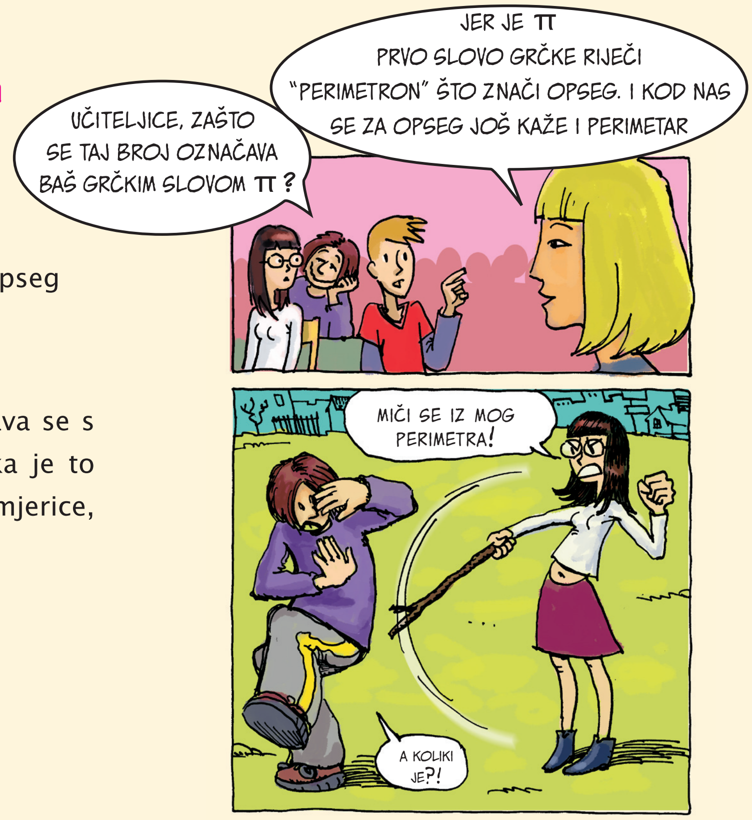
Podatak da je $r = 3.6$ dm uvrstimo u formulu za opseg kruga $o = 2r\pi$. Stoga je opseg kruga:

$$o = 2 \cdot 3.6 \cdot \pi = 7.2\pi \text{ dm}.$$

To je *točna* vrijednost traženog opsega i izražava se s brojem π u rezultatu. Ako želimo vidjeti kolika je to *približna* duljina, zaokružimo π i izračunamo. Primjerice, ako π zaokružimo na dvije decimale, opseg je

$$o \approx 7.2 \cdot 3.14 = 22.608 \text{ dm} \approx 22.61 \text{ dm}.$$

Točna vrijednost:	Približna vrijednost:
$o = 2r\pi$	$o \approx 2r \cdot 3.14$
$o = 7.2\pi$ dm	$o \approx 22.61$ dm



Zadaci

4. Napamet izračunaj točan opseg kruga kojem je polumjer:
a) 3 cm; b) 1 cm; c) 13 m; d) 0.5 km; e) 0.25 mm.

5. Izračunaj opseg kruga (točno i približno) kojem je polumjer jednak:
a) 2 cm; b) 3.3 mm; c) 0.12 cm; d) 16 m;
e) 0.002 dm.

6. Izračunaj opseg kruga (točno i približno) kojem je promjer jednak:
a) 12 dm; b) 6.3 cm; c) $2\frac{2}{5}$ mm; d) 16.7 km;
e) 0.802 dm.

7. Propeler helikoptera ima promjer 10 m. Koliki put prijeđe točka na kraju propelera:
a) pri jednom punom okretu propelera;
b) pri 200 okreta propelera?

8. Promjer krila vjetrenjače je 21.65 m. Na sam rub jednoga krila mlinar je objesio vrećicu.
a) Koliki je put vrećica prošla pri jednom okretu krila?
b) Vjetrenjača je od uključenja do isključenja napravila 313 okreta. Koliki je put pritom prošla vrećica?

9. Elisa vjetroelektrane na otoku Pagu ima promjer 52 m. Koliki je opseg kruga kojeg čini krajnja točka elise prilikom jednog okreta?

10. Izračunaj promjer kruga kojem je opseg:
a) 50.24 dm; b) 31.4 mm;
c) 28.26 cm; d) 0.628 m;
e) 141.3 cm.

11. Izračunaj polumjer kruga kojem je opseg:
a) 113.04 mm; b) 12.56 cm; c) 43.96 dm;
d) 0.628 m; e) 188.4 cm.

12. Beni trči ukrug. Kada je prošao cijeli krug napravio je 45.216 m. Koliki su polumjer i promjer toga kruga?

13. Opseg Zemlje na ekvatoru je približno 40 000 km. Koliki je polumjer Zemlje na ekvatoru?

14. Luka je hodao po snijegu i svojim tragovima napravio velik krug. Otisak njegova stopala u snijegu dugačak je 26 cm. Da bi napravio čitav krug trebalo bi 100 njegovih otisaka. Koliki je promjer toga kruga?

15. Uzmi loptu (nogometnu, rukometnu, tenisku, za golf itd.) i izmjeri joj najveći opseg. Zatim izračunaj pripadajući polumjer svake lopte.

16. Promjer kotača automobila je 15 inča (1 inč = 2.54 cm).
   a) Koliki je opseg kotača?
   b) Koliki put prijeđe automobil kada kotači naprave jedan puni okret?
   c) Koliko se puta kotači okrenu kada automobil prijeđe 5 km?

17. Promjer kotača bicikla je 50 cm.
   a) Koliki put prijeđe bicikl kada kotači naprave jedan puni okret?
   b) Koliko se puta kotači okrenu kada bicikl prijeđe 2 km?

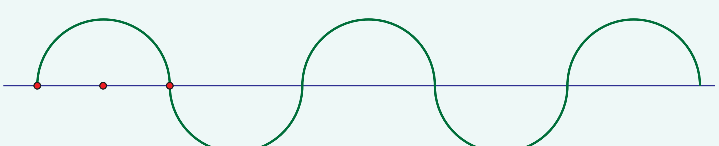
18. Promjer kotača bicikla je 50 cm. Koliki put prijeđe bicikl kada se kotač okrene 200 puta?

19. Veći kotač starog bicikla iz 19. stoljeća ima promjer 1.5 m.
   a) Koliki put prijeđe biciklist kada se kotač okrene 10 puta?
   b) Koliko se puta za to vrijeme okrene manji kotač kojem je promjer 30 cm?

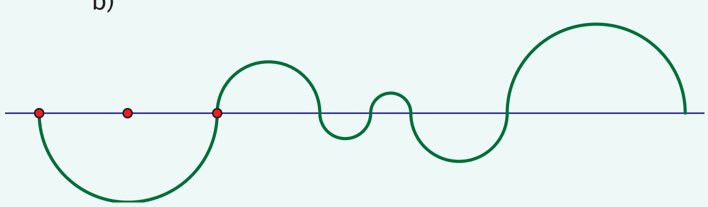
20. Uže je dugo 3 m. Može li se njime opasati kružna kula promjera 2 m?

21. Ravnalo je dugo 16 cm. Kada bismo ga mogli savinuti ukrug tako da mu se rubovi spoje, koliki bi bio promjer toga kruga?

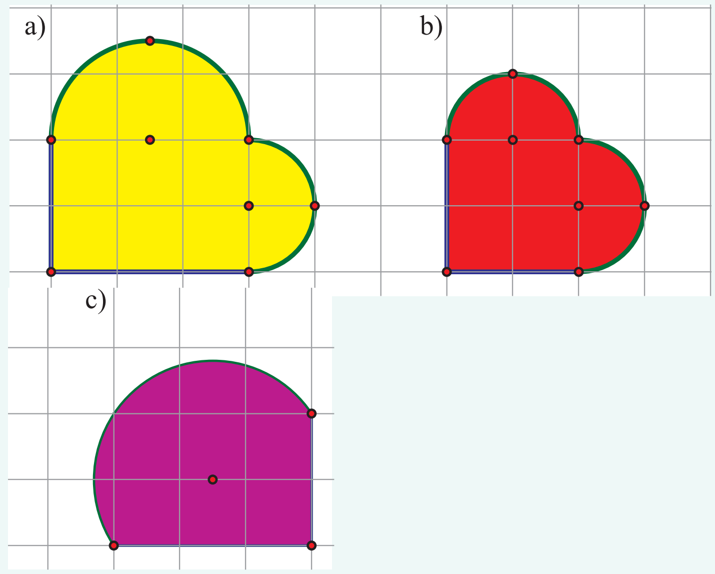
22. Izmjeri i izračunaj: kolike su duljine krivulja na slici:
   a)



   b)



23. Izračunaj opsege ovih likova:

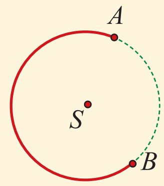


24. Fontana u parku ima kružni oblik dijametra 14 m. Oko nje vrtlar želi posaditi cvijeće tako da svaki cvijetak bude udaljen od susjednog 0.5 m. Koliko komada cvijeća će mu trebati?

25. Polumjer Zemlje na ekvatoru je 6378 km.
   a) Opašemo li Zemlju konopcem po ekvatoru, koliko dug konopac će nam trebati?
   b) Produljimo konopac iz zadatka a) za 10 m. Za koliko će se sada konopac uzdignuti iznad tla ako ga ravnomjerno podignemo svugdje iznad ekvatora?

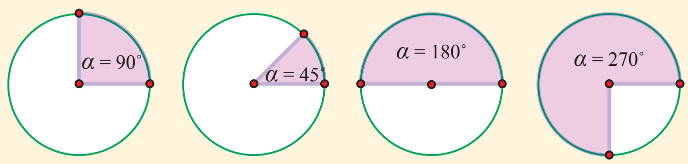
Primjer 3. Duljina kružnog luka

Nacrtana je kružnica polumjera 1 cm. Kolika je duljina kružnog luka označenoga crvenom bojom na slici?



Rješenje:

Znamo da je kružni luk dio kružnice, no pitanje je kako izračunati njegovu duljinu. Pogledamo li ove slike, primijetit ćemo da je duljina kružnog luka proporcionalna veličini pripadnoga središnjega kuta:



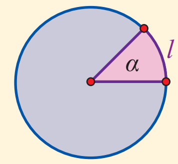
$l = 0.25\ \pi$ cm $l = 0.125\ \pi$ cm $l = 0.5\ \pi$ cm $l = 0.75\ \pi$ cm

Ako je središnji kut dvostruko manji, i duljina pripadnoga kružnog luka biti će dvostruko manja. Ako je središnji kut dvostruko veći, i duljina pripadnog kružnog luka će biti dvostruko veća. Provjerite da ovaj odnos vrijedi i za druge koeficijente proporcionalnosti. Tada zapisujemo razmjer:

(duljina kružnoga luka) : (duljina cijele kružnice) = (veličina središnjega kuta α) : (veličina punoga kuta 360º)

Ili, kraće:

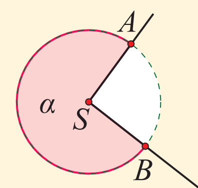
$l : 2r\pi = \alpha : 360^\circ$



Iz ovog razmjera dobivamo da je formula za duljinu kružnog luka $l = \dfrac{2r\pi \cdot \alpha}{360^\circ}$, a skraćivanjem razlomka s 2 dobivamo $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ}$.

Formula za duljinu kružnog luka l koji pripada kružnici polumjera r i koji ima središnji kut α: $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ}$

Sada, kada znamo formulu, nije teško riješiti problem iz Primjera 3. Samo treba kutomjerom izmjeriti središnji kut zadanoga kružnog luka.



Središnji kut iznosi α = 244º, a polumjer zadanoga kruga je 1 cm. Stoga je duljina kružnog luka: $l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ} = \dfrac{1 \cdot \pi \cdot 244^\circ}{180^\circ} \approx 4.26$ cm.

Z a d a c i

26. Puni kut iznosi 360º, što znači da cijeloj kružnici pripada središnji kut od 360º. Prepiši, pa dopuni rečenice i skiciraj:
    a) Polukružnici pripada središnji kut od ____.
    b) Četvrtini kružnice pripada središnji kut od ____.
    c) Desetini kružnice pripada središnji kut od ____.
    d) Trećini kružnice pripada središnji kut od ____.
    e) Šestini kružnice pripada središnji kut od ____.

27. Prepiši, pa popuni tablicu:

Središnji kut	60º	72º	10º	45º	20º	40º	180º	90º
Dio kružnice	$\frac{1}{6}$ kružnice							

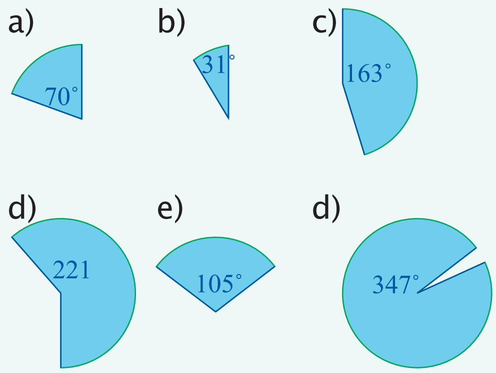
28. Polumjer kružnice je 5 cm. Izračunaj duljinu ovog kružnog luka koji iznosi:
    a) pola kružnice; b) trećinu kružnice;
    c) četvrtinu kružnice; d) šestinu kružnice;
    e) četiri petine kružnice.

29. Opseg kruga iznosi 36 dm. Napamet izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut od:
    a) 90º; b) 180º; c)60º; d) 10º.

30. Polumjer kružnice iznosi 2.5 cm. Kolika je duljina kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
    a) 180º; b) 90º; c) 360º; d) 45º; e) 60º.
    Ovaj zadatak možeš riješiti na dva načina. Koja?

31. Polumjer kružnice iznosi 4 cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
    a) 60º; b) 10º; c) 25º; d) 33.5º; e) 229º.

32. Izračunaj duljinu kružnog luka na slici:



33. Opseg kruga iznosi 37.68 cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 10°; b) 110°; c) 97°; d) 1°; e) 274°

34. Koliki je polumjer kružnice ako je zadano:
a) $l = 2.44$ cm, $\alpha = 70°$; b) $l = 5.4$ dm, , $\alpha = 30°$;
c) $l = 3.8$ cm, $\alpha = 221°$.

35. Koliki je polumjer kružnice ako je zadano:
a) $l = 5\pi$ cm, $\alpha = 90°$; b) $l = 12\pi$ dm, , $\alpha = 30°$;
c) $l = 0.25\pi$ cm, $\alpha = 45°$.

36. Koliki je središnji kut koji pripada kružnom luku ako je zadano:
a) $l = 3.14$ mm, $r = 1$ mm;
b) $l = 15.7$ cm, $d = 10$ cm;
c) $l = 4\pi$ m, $r = 6$ m.

37. Ulica široka 6 m ima zavoj udesno pod središnjim kutom od 75°. Izračunaj koliki put trkač može uštedjeti ako trči unutrašnjom stranom ulice. Vanjski polumjer zavoja je 150m.

7.6. Površina kruga

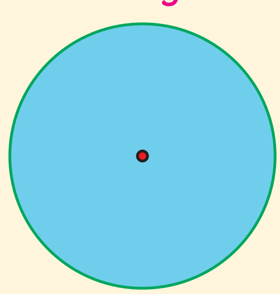
Kvadrat i krug

Od užeta dugog 1 m načini krug, zatim kvadrat. Što misliš, koji lik ima veću površinu, krug ili kvadrat? Mjerenjem utvrdi je li tvoja pretpostavka bila istinita.

Dosad smo naučili mnoge formule za površine geometrijskih likova, poput kvadrata, pravokutnika, paralelograma i trokuta. Vrijeme je da naučimo još jednu važnu matematičku formulu: formulu za površinu kruga. Pogledajmo kako dolazimo do te formule i kako ona glasi.

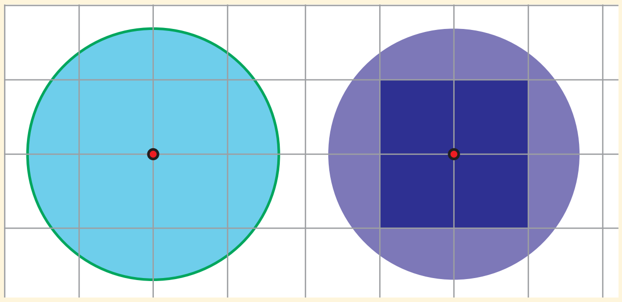
Primjer 1.
Kako izračunati površinu kruga?

Izračunaj površinu kruga na slici.



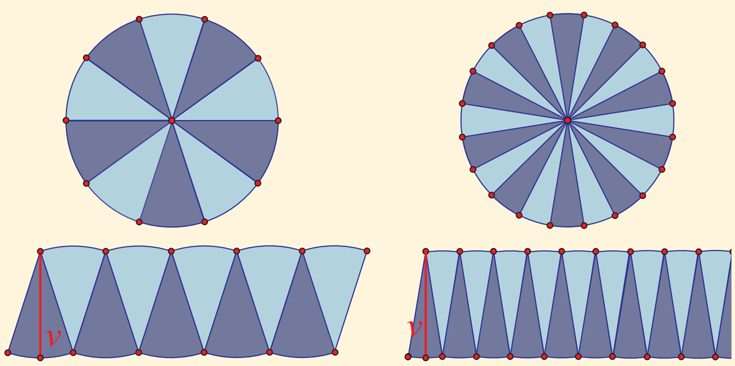
Rješenje:

Površinu kruga, kao i površinu bilo kojega drugog lika, možemo približno izračunati pomoću kvadratne mreže. „Prekrijemo“ krug mrežom kvadrata s duljinom stranice primjerice 1 cm (što manje kvadrate odaberemo, rezultat će biti točniji).



Krug prekriva četiri cijela kvadrata i „ostatke“ kruga od kojih se mogu složiti još otprilike 4.5 kvadrata. Zaključujemo da površina kruga iznosi približno 8.5 cm².

No, pokušajmo sada doći do točne formule za površinu kruga. Umjesto podjele na kvadratiće, podijelimo krug polumjerima na jednake kružne isječke što manje površine. Složimo ove kružne isječke na sljedeći način:



$$\alpha \approx \frac{o}{2} = \frac{2r\pi}{2} = r\pi$$

Tako dobivamo lik koji svojim oblikom podsjeća na paralelogram. Zapravo, što „finije“ podjelimo krug, to ćemo točniji rezultat dobiti.

Zamislimo li da je podjela tako gusta da je polumjer kruga gotovo jednak visini karakterističnog trokuta v, površinu ovog lika možemo računati pomoću formule za površinu paralelograma:

površina kruga

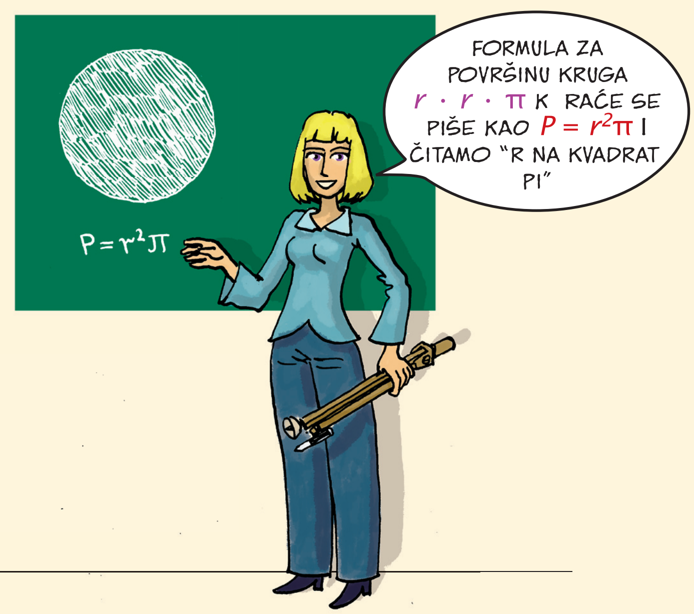
$P = a \cdot v$

$P = r\pi \cdot r$

$P = r \cdot r \cdot \pi$

Formula za površinu kruga s polumjerom r:

$P = r \cdot r \cdot \pi$



Primjer 2.
Izračunavanje površine kruga

Izračunaj površinu poprečnoga presjeka cijevi promjera 7.2 dm.

Rješenje:

Kako je promjer cijevi 7.2 dm, zaključujemo da je polumjer cijevi $r = 3.6$ dm. Podatak da je $r = 3.6$ dm uvrstimo u formulu za površinu kruga $P = r \cdot r \cdot \pi$. Stoga je površina kruga $P = 3.6 \cdot 3.6 \cdot \pi = 12.96\pi$ dm².

To je točna vrijednost tražene mjere površine i izražava se brojem π u rezultatu. Ako želimo vidjeti kolika je to *približna* površina, zaokružimo π i izračunamo. Primjerice, ako π zaokružimo na dvije decimale, površina je

$P \approx 12.96 \cdot 3.14 = 40.6944 \approx 40.69$ dm².

Podatke iz života obično prikazujemo približnim vrijednostima, pa je površina poprečnoga presjeka zadane cijevi 49.69 dm².

Točna vrijednost:	Približna vrijednost:
$P = r \cdot r \cdot \pi$	$P \approx r \cdot r \cdot 3.14$
$P = 12.96\pi$ dm²	$P \approx 40.69$ dm²

Zadaci

1. Napamet izračunaj točnu površinu kruga kojem je polumjer:
a) 3 cm; b) 1 cm; c) 10 m; d) 0.5 km; e) 0.7 mm.

2. Izračunaj površinu kruga (točno i približno) kojem je polumjer jednak:
a) 2 cm; b) 3.3 mm; c) 0.12 cm; d) $2\frac{2}{5}$ m; e) 0.002 dm.

3. Izračunaj opseg i površinu kruga (točno i približno) kojem je promjer jednak:
a) 12 dm; b) 6.3 cm; c) $\frac{7}{10}$ mm; d) 16.7 km; e) 0.802 dm.

4. Izračunaj duljinu polumjera kruga kojem je površina jednaka:
a) $P = 36\ \pi\ \text{cm}^2$; b) $P = 100\ \pi\ \text{cm}^2$;
c) $P = 0.81\ \pi\ \text{cm}^2$; d) $P = \frac{9}{64}\ \pi\ \text{cm}^2$.

5. Kolika je površina poprečnoga presjeka cijevi ako je njezin promjer:
a) 11 dm; b) 1.1 m; c) 0.13 cm; d) 140 mm.

6. Radiostanica šalje valove koji se mogu čuti u krugu polumjera 25 km. Koliku površinu područja pokrivaju valovi te radiostanice?

7. Opseg kružnoga dječjega bazena iznosi 60π cm. Kolika je površina dna bazena?

8. Kolika će biti površina poprečnoga presjeka balvana ako je njegov opseg:
a) 56.52 dm; b) 150.72 cm; c) 100.48 cm.

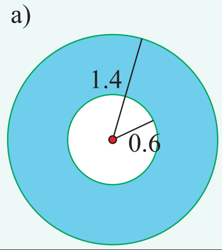
9. Konstruiraj $k(S, 1.5\text{ cm})$.
a) Izračunaj opseg i površinu pripadnoga kruga;
b) Konstruiraj $k(S, 3\text{ cm})$. Koliko je puta polumjer ove kružnice veći od polumjera početne kružnice? Koliko joj je puta veći opseg? Koliko joj je puta veća površina?

10. Matematički diktat:
- Nacrtaj jedan krug, izmjeri mu polumjer r, pa mu izračunaj opseg i površinu;
- Nacrtaj krug polumjera dvostruko većeg od r. Izračunaj mu opseg i površinu;
- Nacrtaj krug polumjera trostruko većeg od r. Izračunaj mu opseg i površinu;
- Nacrtaj krug polumjera dvostruko manjeg od r. Izračunaj mu opseg i površinu.

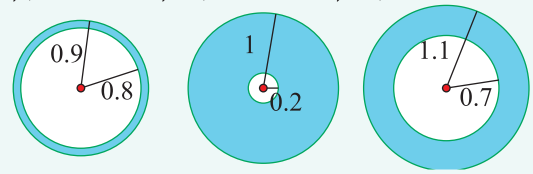
Što primjećuješ?

11. Kolika je površina obojenog lika:

a)



b) c) d)



Sve zadane veličine iskazane su u centimetrima.

12. Velika kazaljka sata duga je 16 cm, a mala 10 cm.
a) Kolika je površina kruga koju prelaze obje kazaljke?
b) Kolika je površina lika koju prelazi samo velika kazaljka? Koji je to lik?

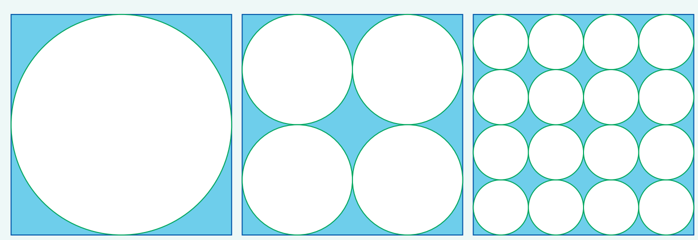
13. Vanjski poprečni presjek cijevi ima promjer 7.2 dm. Cijev je debela 1 dm. Kolika je površina šupljega dijela presjeka?

14. Izračunaj površinu jedne strane CD-a.

15. Nacrtaj $k(S, 3\text{ cm})$.
a) Toj kružnici upiši kvadrat;
b) Izračunaj opseg i površinu kvadrata;
c) Kolika je površina dijela kruga koji ne pripada kvadratu?

16. Zadan je kvadrat i u njemu su upisani krugovi kao na slikama. Koliki postotak površine kvadrata čini površina krugova na svakoj slici?

a) b) c)



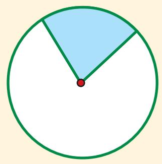
17. Iz kvadrata zadanih u prethodnom zadatku treba izrezati krugove. Koliki je postotak materijala višak koji preostaje nakon rezanja?

18. Maja je naslikala bojom krug promjera 7 cm. Sada želi nacrtati pravokutnik otprilike jednake površine, s jednom stranicom dugom 5 cm. Kolika bi otprilike trebala biti duljina druge stranice pravokutnika?
a) procijeni;
b) izračunaj.

19. Kvadrat i krug imaju jednake opsege. Imaju li oni i jednake površine? Poznat je polumjer kruga $r = 8$ mm.

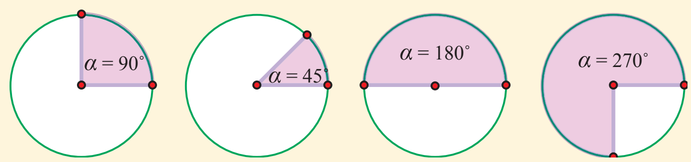
Primjer 3.
Površina kružnog isječka

Nacrtan je krug polumjera 1 cm. Kolika je površina istaknutoga kružnog isječka na slici?



Rješenje:

Znamo da je kružni isječak dio kruga, no pitanje je kako izračunati njegovu površinu. Pogledamo li ove slike, primijetit ćemo da je površina kružnog isječka proporcionalna veličini pripadnoga središnjega kuta:



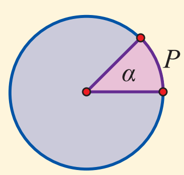
P=0.25 π cm^2 P=0.125 π cm^2 P=0.5 π cm^2 P=0.75 π cm^2

Ako je središnji kut dvostruko manji, i površina pripadnoga kružnog isječka biti će dvostruko manja. Ako je središnji kut dvostruko veći, i površina pripadnoga kružnog isječka biti će dvostruko veća. Provjerite uz pomoć programa za dinamičnu geometriju da ovaj odnos vrijedi i za druge koeficijente proporcionalnosti. Tada zapisujemo razmjer:

(površina kružnog isječka) : (površina cijeloga kruga) = (veličina središnjega kuta α) : (veličina punoga kuta 360º)

Ili, kraće:

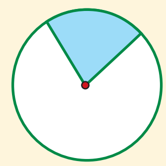
$$P_{isječka} : r \cdot r \cdot \pi = \alpha : 360^\circ$$



Iz ovog razmjera dobivamo da je formula za površinu kružnog isječka $P_{isječka} = r \cdot r \cdot \pi \cdot \dfrac{\alpha}{360}$.

Formula za površinu kružnog isječka koji pripada krugu polumjera r i koji ima središnji kut α: $P_{isječka} = r \cdot r \cdot \pi \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$.

Sada, kada znamo formulu, nije teško riješiti problem iz Primjera 3. Samo treba kutomjerom izmjeriti središnji kut zadanoga kružnog luka.



Središnji kut iznosi $\alpha = 71^\circ$, a polumjer zadanog kruga je 1 cm. Stoga je površina kružnog isječka

$$P_{isječka} = r \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} = 1 \cdot 1 \cdot \pi \cdot \frac{71^\circ}{360^\circ} \approx 0.62 \text{ cm}^2.$$

Formulu za površinu kružnog isječka možemo zapisati i ovako: $P_{isječka} = \dfrac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$

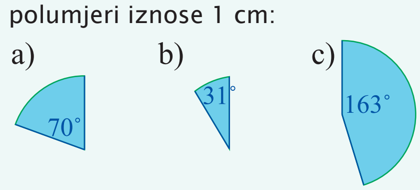
U prošlom smo poglavlju naučili da je duljina kružnog luka $l = \dfrac{r \pi \alpha}{180^\circ}$. Izdvojimo li te elemente iz formule za površinu kružnog isječka, dobit ćemo:

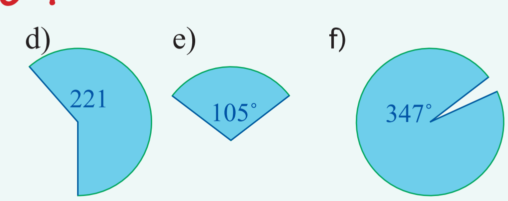
$$P_{isječka} = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} = \frac{r \cdot r \cdot \pi \cdot \alpha}{2 \cdot 180^\circ} = \frac{r \cdot l}{2}$$
$$= \frac{r \cdot l}{2}$$

Zadaci

20. Polumjer kružnice iznosi 4 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 60º; b) 10º; c) 25º; d) 33.5º; e) 229º.

21. Izračunaj površinu kružnog isječka sa slike ako svi polumjeri iznose 1 cm:

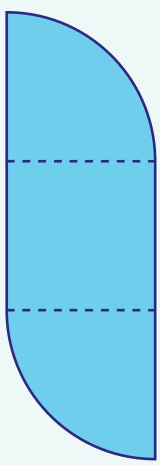




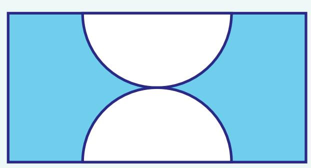
22. Polumjer kružnice iznosi 1.5 cm. Kolika je površina kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 180º; b) 90º; c) 360º; d) 45º; e) 60º.
Ovaj zadatak možeš riješiti na dva načina. Koja?

23. Polumjer kružnice je 4 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka koji iznosi:
    a) pola kružnice;
    b) trećinu kružnice;
    c) četvrtinu kružnice;
    d) šestinu kružnice;
    e) četiri petine kružnice.
24. Površina kruga iznosi 60π dm^2. Napamet izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut od:
    a) 90°; b) 180°; c)60°; d) 10°.
25. Opseg kruga iznosi 37.68 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
    a) 10°; b) 110°; c) 97°; d) 1°; e) 274°.
26. Izmjeri potrebne veličine i izračunaj površine likova označenih bojom:

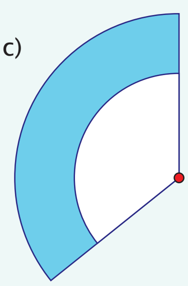
a)



b)

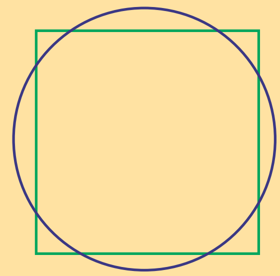


c)



27. Koliki je polumjer isječka ako je zadano:
    a) $P_{isječka} = 4\pi$ cm^2, $\alpha = 90°$;
    b) $P_{isječka} = 3\pi$ dm^2, $\alpha = 30°$;
    c) $P_{isječka} = 2\pi$ cm^2, $\alpha = 45°$.
28. Koliki je polumjer kruga ako je zadano:
    a) $P_{isječka} = 18.84$ cm^2, $\alpha = 60°$;
    b) $P_{isječka} = 37.68$ dm^2, $\alpha = 30°$;
    c) $P_{isječka} = 9.42$ cm^2, $\alpha = 120°$.
29. Krug polumjera 36 m ima jednaku površinu kao i kružni isječak polumjera 120 m. Izračunaj kut kružnog isječka.

Kvadratura kruga



Jedan od najvećih matematičkih problema u povijesti bio je problem. tzv. kvadrature kruga koji je postavljen prije otprilike 2000 godina:

Zadan je krug polumjera r. Ravnalom i šestarom treba konstruirati kvadrat čija je površina jednaka površini zadanog kruga.

Ovaj je problem stoljećima bio izazov matematičarima koji su pokušavali konstruirati taj kvadrat, ali tek je 1882. godine njemački matematičar Lindemann dokazao da je nemoguće konstruirati taj kvadrat jer je nemoguće točno konstruirati broj π.

Kvadratura kruga i u svakodnevnom je govoru postala simbol za bilo koji nerješiv problem.

30. Izračunaj opseg i površinu kružnog isječka ako je:
    a) $r = 3$ cm, $\alpha = 45^\circ$; b) $r = 5$ cm, $\alpha = 60^\circ$;
    c) $r = 2$ cm, $\alpha = 120^\circ$; d) $r = 4$ cm, $\alpha = 90^\circ$;
    e) $r = 3.5$ cm, $\alpha = 40^\circ$; f) $r = 5.1$ cm, $\alpha = 50^\circ$;
    g) $r = 12.8$ cm, $\alpha = 100^\circ$; h) $r = 1$ cm, $\alpha = 360^\circ$.
31. Izračunaj površinu kružnog isječka kojemu u krugu opsega 47.1 cm odgovara kružni luk duljine 3.932 cm.
32. Koliki je opseg kružnog isječka određenog kutom $\alpha = 45^\circ$ u krugu površine $P = 4\pi$ dm?
34. Majina baka ima u vrtu kružnu cvjetnu gredicu na koju želi posaditi tulipane. Promjer gredice je 3 m. Na 1 m2 sadi se 6 tulipana. Koliko je tulipana potrebno za tu cvjetnu gredicu?
35. Lukin tata priprema novi travnjak u vrtu. Travnjak je kružnog oblika promjera 6 m. Na travnjaku je potrebno posijati sjeme trava. Koliko je sjemena potrebno za cijeli travnjak ako se na 1 m2 stavlja 30 dag sjemena? Dok ne izraste trava treba travnjak ograditi. Koliko žice je potrebno?

Vježbalica

1. Izračunaj opseg kruga kojem je polumjer jednak:

   a) 4.3 cm; b) 3 dm; c) 0.2 m;

   d) 16 cm; e) 8 dm.

2. Izračunaj opseg kruga kojem je promjer jednak:

   a) 12 cm; b) 6.4 cm; c) $3\frac{2}{5}$ mm;

   d) 17 cm; e) 0.8 dm.

3. Izračunaj promjer kruga kojem je opseg:

   a) 31.4 dm; b) 43.96 cm; c) 18π cm;

   d) 24π m; e) 94.2 cm.

4. Izračunaj polumjer kruga kojem je opseg:

   a) 15.7 m; b) 15π cm; c) 19.468 dm;

   d) 22π m; e) 32.028 cm.

5. Promjer kotača automobila je 48 cm.

   a) Koliki je opseg kotača?

   b) Koliki put prijeđe automobil kada kotači naprave jedan puni okret?

   c) Koliko puta se kotači okrenu kada automobil prijeđe 5 km?

6. Promjer kotača bicikla je 45 cm. Koliki put prijeđe bicikl kada se kotač okrene 300 puta?

7. Promjer kotača bicikla je 55 cm. Koliki put prijeđe bicikl kada se kotač okrene 350 puta?

8. Popuni tablicu:

Središnji kut	Dio kružnice
60°	$\frac{1}{6}$ kružnice
36°	
20°	
25°	
10°	
108°	
144°	
90°	

9. Polumjer kružnice je 5.2 cm. Izračunaj duljinu ovog kružnog luka koji iznosi:

   a) pola kružnice; b) trećinu kružnice;

   c) četvrtinu kružnice; d) šestinu kružnice;

   e) četiri petine kružnice.

10. Opseg kruga iznosi 72 cm. Napamet izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut od:

    a) 90°; b) 180°; c) 60°; d) 10°.

11. Polumjer kružnice iznosi 3.4 cm. Kolika je duljina kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:

    a) 180°; b) 90°; c) 360°; d) 22.5°; e) 30°.

    Ovaj zadatak možeš riješiti na dva načina. Koja?

12. Polumjer kružnice iznosi 4.5 cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 65°; b) 120°; c) 24°; d) 18°; e) 270°.

13. Opseg kruga iznosi 18π cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 20°; b) 45°; c) 80°; d) 25°; e) 60°.

14. Koliki je polumjer kružnice ako je zadano (rješenje zaokruži na 2 decimale ako treba):
a) $l = 2.79$ cm, $\alpha = 20°$;
b) $l = 9.42$ dm, $\alpha = 60°$;
c) $l = 9.77$ cm, $\alpha = 56°$.

15. Koliki je polumjer kružnice ako je zadano:
a) $l = 3\pi$ cm, $\alpha = 60°$;
b) $l = \frac{14}{9}\pi$ dm, , $\alpha = 70°$;
c) $l = \frac{5}{3}\pi$ cm, $\alpha = 50°$.

16. Koliki je središnji kut koji pripada kružnom luku ako je zadano:
a) $l = \frac{2}{3}\pi$ cm, $r = 2$ cm;
b) $l = 4.71$ cm, $d = 12$ cm;
c) $l = 12.56$ m, $r = 6$ m.

17. Izračunaj površinu kruga kojem je polumjer jednak:
a) 2.4 cm; b) 35 mm; c) 1.3 dm;
d) 5.3 cm; e) 2 dm.

18. Izračunaj opseg i površinu kruga kojem je promjer jednak:
a) 18 dm; b) 42 cm; c) $\frac{78}{10}$ mm;
d) 34 cm; e) 0.8 dm.

19. Izračunaj duljinu polumjera kruga kojem je površina jednaka:
a) $P = 81\ \pi$ cm^2; b) $P = 121\ \pi$ cm^2;
c) $P = 0.64\ \pi$ cm^2; d) $P = \frac{16}{25}\pi$ cm^2.

20. Izračunaj duljinu polumjera kruga kojem je površina jednaka:
a) $P = 200.96$ cm^2; b) $P = 153.86$ cm^2;
c) $P = 314$ cm^2.

21. Polumjer kružnice iznosi 3 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 90°; b) 45°; c) 80°; d) 22.5°; e) 300°.

22. Polumjer kružnice iznosi 2.5 cm. Kolika je površina kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 180°; b) 30°; c) 60°; d) 57°; e) 64°.

23. Polumjer kružnice je 5 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka koji iznosi:
a) pola kružnice; b) trećinu kružnice;
c) četvrtinu kružnice; d) šestinu kružnice;
e) četiri petine kružnice.

24. Površina kruga iznosi 25π dm^2. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut od:
a) 10°; b) 36°; c) 6°; d) 120°.

25. Površina kruga iznosi 50.24 dm^2. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut od:
a) 20°; b) 45°; c) 60°; d) 12°.

26. Opseg kruga iznosi 50.24 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 20°; b) 120°; c) 72°; d) 100°; e) 270°.

27. Opseg kruga iznosi 10π cm. Izračunaj površinu kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
a) 120°; b) 12°; c) 72°; d) 140°; e) 27°.

28. Koliki je polumjer isječka ako je zadano:
a) $P_{isječka} = 8\pi$ cm^2, $\alpha = 60°$;
b) $P_{isječka} = \frac{16}{3}\pi$ dm^2, $\alpha = 30°$;
c) $P_{isječka} = 9\pi$ cm^2, $\alpha = 40°$.

29. Koliki je polumjer kruga ako je zadano:
a) $P_{isječka} = 25.12$ cm^2, $\alpha = 80°$;
b) $P_{isječka} = 37.68$ dm^2, , $\alpha = 120°$;
c) $P_{isječka} = 14.13$cm^2, , $\alpha = 20°$.

30. Koliki je središnji kut kruga kojem je:
a) $P_{isječka} = 9.8125$ cm^2, $r = 5$ cm;
b) $P_{isječka} = \frac{8}{15}\pi$ dm^2, $r = 4$ cm;
c) $P_{isječka} = 42.39$cm^2, $r = 9$ cm;
d) $P_{isječka} = 2\pi$ dm^2, $r = 3$ cm.

7.7. Ponavljanje

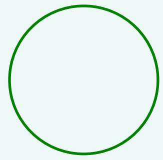
Pitanja za ponavljanje:

1. Objasni što znači $k(T, 3.5 \text{ mm})$.
2. Zadana je $k(A, 5 \text{ cm})$. Koliki joj je promjer?
3. Što je kružnica?
4. Što je krug?
5. Što je polumjer kružnice? Kako se još naziva polumjer?
6. Što je promjer kružnice? Kako se još naziva promjer?
7. Koja je veza između polumjera i promjera kružnice?
8. Što je tetiva kružnice?
9. Prepiši, pa dopuni rečenicu: Tetiva dijeli krug na dva ____________________.
10. Što je kružni luk?
11. Koje likove koji su dijelovi kružnice ili kruga poznaješ?
12. Prepiši, pa dopuni rečenice:
    a) Kružnice koje imaju zajedničko središte nazivaju se ____________________;
    b) Kružni vijenac je dio ravnine između dviju ______________ kružnica.
13. U kojem položaju mogu biti dvije kružnice u ravnini?
14. Prepiši, pa dopuni rečenice: Pravac je određen s ____________ točke, a kružnica je određena s ______ ____________ točke.
15. Koja je razlika između središnjeg i obodnog kuta?
16. Kako glasi poučak o središnjem i obodnom kutu?
17. Ako je središnji kut ispruženi kut, onda obodni iznosi ______. Taj se poučak naziva ____________ ______________.
18. Koji je međusobni položaj pravca i kružnice u ravnini?
19. Prepiši, pa dopuni rečenice:
    a) Pravac koji siječe kružnicu se naziva ______________;
    b) Pravac koji dodiruje kružnicu se naziva ______________.
20. Koliko iznosi broj π zaokružen na dvije decimale?
21. Kako glasi formula za opseg kruga?
22. Kako glasi formula za površinu kruga?

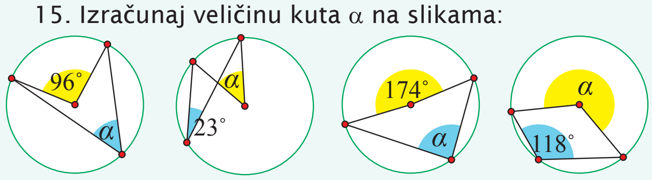
Zadaci za ponavljanje:

1. Nacrtaj $k(V, 3.5 \text{ cm})$, istakni jedan njegov promjer i bojom označi polukrug, polukružnicu te jednu njegovu tetivu $\overline{CD}$.
2. Nacrtaj kružnice $k(A, 2 \text{ cm})$ i $k(B, 2.5 \text{ cm})$ tako da se one:
   a) sijeku; b) dodiruju; c) ne sijeku i ne dodiruju.
   Koliko im moraju biti udaljena središta tako da se one ne sijeku i ne dodiruju?
3. Konstruiraj kružnicu $k(S, 3.2 \text{ cm})$.
   a) Konstruiraj njezinu tetivu duljine 2 cm;
   b) Zaokruži tetive koje nije moguće nacrtati zadanoj kružnici.
   Duljine tetiva su: 1 cm, 4 cm, 3.5 cm, 7 cm, 6 cm, 6.5 cm.
4. Nacrtaj kružnicu $k(B, 2 \text{ cm})$ i njezinu tetivu duljine 2 cm. Konstruiraj simetralu te tetive.

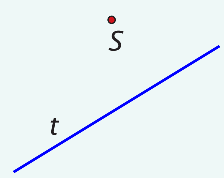
5. Nacrtana je kružnica bez središta. Precrtaj, pa konstrukcijom pronađi središte te kružnice.



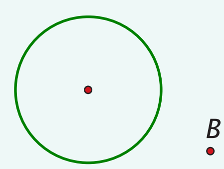
6. Nacrtaj trokut i konstruiraj mu opisanu kružnicu. Što su stranice trokuta toj kružnici?
7. Nacrtaj dužinu $|AC|$=2.3 cm. Konstruiraj tri kružnice kojima je dužina $\overline{AC}$ tetiva.
8. Nacrtaj središnji kut neke kružnice koji ima veličinu:
   a) 72°; b) 34°; c) 120°; d) 180°; e) 238°.
9. Konstruiraj kružnicu $k(S$, 1.9 cm) i njezinu tetivu $\overline{RT}$. Izmjeri veličinu središnjega kuta ako je tetiva duga:
   a) 16 mm; b) 3 cm; c) 3.8 cm; d) 5 mm.
10. Nacrtaj kružnicu $k(V$, 2.5 cm) i na njoj istakni točke A, B i C.
   a) Procijeni veličine središnjih kutova $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ i $\sphericalangle CVA$;
   b) Izmjeri veličine središnjih kutova $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle BVC$ i $\sphericalangle CVA$;
   b) Bez računanja odgovori koliki je zbroj ova tri središnja kuta.
11. Nacrtaj $k(S$, 3.1 cm). Nacrtaj jedan njezin obodni kut od 44°.
12. Nacrtaj $k(R$, 2.5 cm) i njezinu tetivu duljine 2.7cm.
   a) Nacrtaj središnji kut koji pripada toj tetivi;
   b) Istakni 5 obodnih kutova koji pripadaju toj tetivi.
13. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji:
   a) 100°; b) 200°; c) 50°; d) 28°; e) 122°.
14. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni:
   a) 37°; b) 4°; c) 130°; d) 20.5°; e) 90°.
15. Izračunaj veličinu kuta α na slikama:



   Bojom istakni pripadni kružni luk.
16. Nacrtaj kružnicu, središnji i nekoliko obodnih kutova ako je veličina središnjega kuta:
   a) 18°; b) 130°.
17. Nacrtaj kružnicu, središnji i nekoliko obodnih kutova ako je veličina obodnoga kuta:
   a) 13°; b) 81°.
18. Konstruiraj $k(S$, 2.8 cm). Zatim nacrtaj nekoliko njezinih obodnih kutova veličine 90°.
19. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je:
   a) Hipotenuza duga 7 cm, a jedna kateta 3.9 cm;
   b) Hipotenuza duga 6.5 cm, a jedan kut iznosi 45°.
20. Zadan je pravokutan trokut ΔABC s hipotenuzom $|AB| = 52$ mm kojem je jedna kateta duga 2 cm. Prvo konstruiraj taj trokut, a zatim izračunaj njegov opseg i površinu.
21. Koristeći se Talesovim poučkom konstruiraj jednakokračan pravokutan trokut s hipotenuzom $|AB| = 60$ mm.
22. Konstruiraj pravokutnik kojem je jedna stranica duga 3.2 cm, a dijagonala 5 cm.
23. Polumjer kružnice je 2 cm. Koji od ovih pravaca siječe kružnicu, a koji je dodiruje ako je pravac udaljen od središta:
   a) 10 mm; b) 2.1 cm; c) 3.2 cm; d) 0.2 dm;
   e) 1.92 cm.
   Nacrtaj te pravce i kružnice.
24. Konstruiraj kružnicu polumjera 35 mm i istakni jednu točku na kružnici. Konstruiraj tangentu iz te točke na kružnicu.
25. Nacrtan je pravac t i točka S.
   Pronađi kružnicu kojoj je S središte, takvu da joj je t tangenta. Koliki je polumjer te kružnice?



26. Precrtaj, pa konstruiraj kružnicu polumjera 2.6 cm i istakni jednu točku izvan kružnice. Konstruiraj tangente iz te točke na kružnicu.
27. Precrtaj, pa skiciraj, a zatim i konstruiraj tangente iz ove točke:



28. Propeler helikoptera ima promjer 9.2 m. Koliki put prijeđe točka na kraju propelera:
   a) pri jednom punom okretu propelera;
   b) pri 250 okreta propelera?
29. a) Izračunaj promjer kruga kojem je opseg 50.24 cm;
   b) Izračunaj polumjer kruga kojem je opseg 113.04 mm.
30. Promjer kotača bicikla je 52 cm. Koliki put prijeđe bicikl kada se kotač okrene 185 puta?

31. Uže je dugo 40 m. Može li se njime opasati kružna kula promjera 18 m?
32. Polumjer kružnice iznosi 3 cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine:
    a) 30°; b) 70°; c) 45°.
33. Izračunaj opseg i površinu kruga (točno i približno) kojem je promjer jednak:
    a) 40 dm; b) 100 cm.
34. Kolika je površina poprečnog presjeka cijevi ako je njen promjer 16 cm?
35. Kolika će biti površina poprečnog presjeka balvana ako je njegov opseg 31.4 dm?
36. Polumjer kružnice iznosi 2.3 cm. Kolika je površina kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine:
    a) 180°; b) 90°; c) 360°; d) 45°; e) 60°.

Primjerak oglednog testa:

1. Dopuni rečenice:
   a) Kružnica je ______________________________ ______________________________;
   b) Veličina ____________________ je dvostruko manja od veličine pripadnog središnjeg kuta nad istim kružnim lukom;
   c) Tangenta kružnice je ________________ ________________;
   d) Najdulja tetiva kružnice se naziva ______ ____________.
2. Konstruiraj $k(D, 2.5\text{ cm})$ i pravac p koji je njena sekanta.
3. Izračunaj opseg i površinu kruga kojem je polumjer dug 7.2 dm.
4. Nacrtaj kružnicu promjera 4 cm i njen središnji kut veličine 68°. Zatim nacrtaj tri pripadajuća obodna kuta. Kolike su njihove veličine?
5. Nacrtaj kružnicu i točku izvan kružnice. Konstruiraj tangente iz te točke na kružnicu.
6. Opseg kruga iznosi 75.36 cm. Izračunaj površinu kružnog isječka i duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine 45°.
7. Konstruiraj pravokutan trokut kojem je hipotenuza duga 5.7 cm, a jedan kut iznosi 60°.
8. Propeler helikoptera ima promjer 20.6 m. Koliki put prijeđe točka na kraju propelera:
   a) pri jednom punom okretu propelera;
   b) pri 4000 okreta propelera?
9. Promjer kružne, cvjetne gredice je 8 m. Izračunaj koliko se tulipana može posaditi na tu gredicu ako na 1 m2 stane 5 sadnica. Uz rub gredice treba posaditi ukrasno zelenilo - koliko je biljaka potrebno nabaviti ako ih se na 1 m sade 4 biljke?
10. Nacrtaj neku kružnicu i točku na njoj. Konstruiraj tangentu kružnice u toj točki.
11. Polumjer kruga iznosi 4.4 dm. Izračunaj točno i približno:
    a) opseg tog kruga;
    b) površinu tog kruga;
    c) duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine 110°.
12. U kružnicu polumjera 15 cm upisan je pravilni mnogokut. Duljina kružnog luka nad jednom njegovom stranicom je 7.85 cm. Koliko vrhova ima taj mnogokut?
13. Opseg kruga iznosi 14π m. Izračunaj njegovu površinu.
14. Površina kruga je 16π dm2. Izračunaj njegov opseg.

8. Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

Važni pojmovi

sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

rješenje sustava.

metoda supstitucije ili zamjene

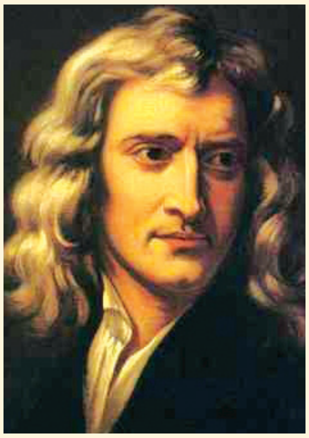
metoda suprotnih koeficijenata

Dio matematike koji se bavi izrazima koji sadrže brojeve, nepoznanice i računske operacije naziva se **algebrom**.

U 17. i 18. stoljeću matematičari su se intenzivno bavili rješavanjem raznih jednadžbi. Tada su uvedene i oznake koje upotrebljavamo i danas: $<$, $>$, $\geq$, $\leq$ te slova x, y i z za označavanje **nepoznanica.** Matematičari su razne probleme iz svakodnevnog života zapisivali i obliku jednadžbi i tražili načine kako ih što jednostavnije riješiti.

Engleski matematičar Isaac Newton (1643. - 1727.), švicarski matematičar Gabriel Cramer (1704. - 1752.) i njemački matematičari Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. - 1716.) i Friedrich Carl Gauss (1777. - 1855.) znatno su pridonijeli današnjim postupcima rješavanja **sustava linearnih jednadžbi**.

Neke njihove metode uspješno su uklopljene u rad raznih matematičkih programa, tako da mnoge vrste jednadžbi može rješavati i računalo.



Isaac Newton

Gabriel Cramer

Gottfried Wilhelm Leibniz

Carl Friedrich Gauss

U ovom ćeš poglavlju, primjerice, naučiti:

- Kako izgleda linearna jednadžba s dvije nepoznanice
- Što je sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice
- Kako upotrijebiti metodu supstitucije da bi odredio rješenje sustava
- Kako upotrijebiti metodu suprotnih koeficijenata da bi odredio rješenje sustava
- Zapisati problemske zadatke u obliku linearnih jednadžbi, a zatim ih riješiti

Brzinski zadaci za ponavljanje:

1. Koji broj je za 5 veći od 10?
2. Koji broj je 5 puta veći od 10?
3. Koji broj je za 5 manji od 10?
4. Koji broj je 5 puta manji od 10?
5. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je 20, a njihova razlika 4. Koji su to brojevi?
6. Temperatura je ujutro bila 4°C. Do podneva je porasla za 7°C. Kolika je temperatura bila u podne?
7. Koliko je x? $3x - 6 = 18$
8. Koliko je x? $25 - 4x = 10 + x$
9. Koji broj je 2.5 puta manji od broja 7.5?
10. Zamisli jedan broj. Dodaj mu 15. Udvostruči rezultat. Od toga oduzmi dvostruku vrijednost zamišljenog broja. Sigurno si dobio 30. Objasni zašto.
11. Riješi jednadžbe:

    a) $2x + 6 = 2$; b) $2x + 10 = 0$;
    c) $7x + 9 = 2$; d) $4x + 2 = 2$;
    e) $3x + 10 = 7$; f) $2x + 9 = 1$;
    g) $7x + 10 = 3$; h) $3x + 8 = 2$;
    i) $2x + 1 = 9$; j) $3x + 1 = 10$;
    k) $9x + 9 = 0$; l) $2x + 1 = 9$;
    m) $2x + 12 = 16$; n) $3x + 7 = 7$.

12. Riješi jednadžbe:

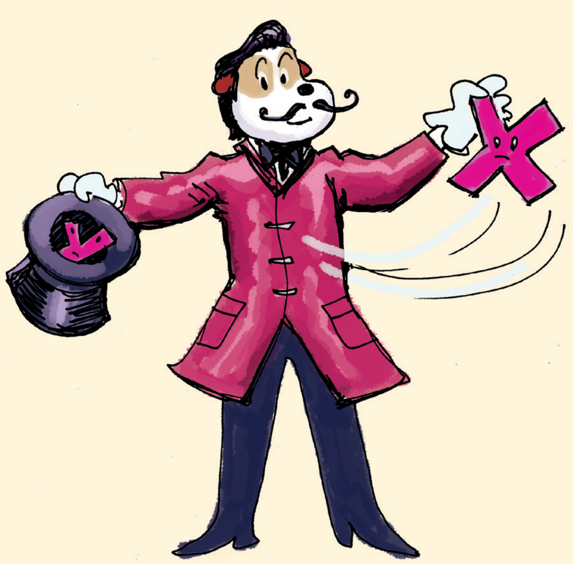
    a) $3x + 1 = 9 - 2x$; b) $5x + 6 = 2 - 6x$;
    c) $-7x + 4 = 5 + 7x$; d) $8x + 5 = -8x + 6$;
    e) $10x + 1 = 2 - 2x$; f) $5x + 5 = 8 - 3x$;
    g) $8x + 2 + 7x = 8$; h) $-7x - 6 = -10 + 5x$;
    i) $9 = -4x + 7 - 7x$; j) $3x + 6 = 10 - 5x$.

13. Riješi jednadžbe:

    a) $2(y + 10) - 3y = 10$; b) $8(y + 3) - 10y = 6$;
    c) $3(y + 7) - 6y = 9$; d) $6(y + 3) - 10y = 10$;
    e) $4(y + 3) - 7y = 0$.

14. Riješi jednadžbe:

    a) $3x + 2(9x - 9) = 1$; b) $5x + 1(6x - 9) = 5$;
    c) $4x + 6(7x - 5) = 0$; d) $5x + 8(6x - 4) = 1$;
    e) $10x + 5(7x - 8) = 2$.



8.1. Linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom - ponavljanje

Tajni broj

Beni je zamislio jedan broj. Taj broj zbrojen sa svojim dvokratnikom daje 15. Koji je broj Beni zamislio?

Važno

Linearna jednadžba s jednom nepoznanicom je svaka jednadžba oblika $ax = b$, gdje su a i b zadani brojevi, $a \neq 0$, a x nepoznanica.

U 6. razredu naučili smo kako zapisati i riješiti linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom. Prisjetimo se što smo naučili.

Primjer 1. Matematički izrazi

PoKad imamo zadatak zapisan riječima (problemski zadatak) najprije ga moramo „prevesti“ na matematički jezik. Zapiši ove zadatke odgovarajućim matematičkim izrazom:

a) Trokratnik nekog broja;

b) Dvostruko manji od nekog broja;

c) Neki broj uvećan za 12;

d) Količnik broja 20 i tog broja;

e) Neki broj umanjen za 7.

Rješenje:

a) Trokratnik nekog broja zapisujemo množenjem: 3x;

b) Dvostruko manji od nekog broja zapisujemo dijeljenjem: x : 2;

c) Neki broj uvećan za 12 zapisujemo zbrajanjem: x + 12;

d) Količnik broja 20 i tog broja zapisujemo dijeljenjem: 20 : x;

e) Neki broj umanjen za 7 zapisujemo oduzimanjem: x - 7.

Z a d a c i

1. Napiši jednadžbe za zadane rečenice.
   a) Ako dvokratnik nekog broja x oduzmemo od 211 dobit ćemo 71.
   b) Peterokratnik broja z povećan za 2 je 27.
   c) Broj y povećan 8 puta jednak je zbroju tog broja y i broja 40.
   d) Pribrojiš li dvokratniku broja x broj 200, dobit ćeš 160.
   e) Zbroj nekog broja i broja 2 je 9.
   f) Neki broj podijeljen s dvanaest daje 3.
   g) Ako broj sedam umanjimo za neki broj, dobit ćemo pet.
   h) Peterokratnik nekog broja je 30.

Primjer 2. Provjera rješenja

Je li rješenje jednadžbe $2 \cdot x = 14$ broj 7?

Rješenje:

Točnost rješenja provjeravamo tako da u jednadžbu umjesto x uvrstimo broj 7.

$x = 7$

$2 \cdot x = 14$

$2 \cdot 7 = 14$

$14 = 14.$

Dobili smo točnu, istinitu jednakost pa zaključujemo da broj 7 jest rješenje te jednadžbe.

Primijetimo da bismo isto rješenje dobili i da je početna jednadžba bila primjerice $6 \cdot x = 42$ ili $10 \cdot x = 140$. Prisjetimo se da množenjem ili dijeljenjem jednadžbe s brojem različitim od nule dobivamo jednakovrijednu jednadžbu, tj. rješenje jednadžbe ostaje isto.

Z a d a c i

2. Spoji parove jednadžbe i njenog rješenja.

Jednadžba	Rješenje
$x : 2.5 = 100$	0
$5x - 14 = -69$	250
$250.15 - 3y = 2y$	-11
$100 - 4z = 300$	50.03
$11 + 2x + 5x = 7x + 11$	-50

Primjer 3. Rješavanje linearne jednadžbe

Koji broj je rješenje jednadžbe $x + 6 = 18 - 5x$?

Rješenje:

U toj jednadžbi pomiješani su članovi s nepoznanicom i bez nje. Najprije moramo sve članove s nepoznanicom prebaciti na jednu stranu jednadžbe, a sve bez nepoznanice na drugu stranu jednadžbe. Najprije moramo sve izraze s nepoznanicom prebaciti na jednu stranu jednadžbe, a sve bez nepoznanice na drugu stranu jednadžbe.

$x \boxed{+\,6} = 18 \boxed{-\,5x}$

Svaki pribrojnik koji prebacujemo mora promijeniti predznak. Pribrojnike koji se nalaze na odgovarajućoj strani jednadžbe samo prepišemo.

Broj 6 moramo prebaciti na desnu stranu jednadžbe, a izraz $-5x$ na lijevu.

$x + 5x = 18 - 6$

Zbrajamo izraze na lijevoj strani, a brojeve na desnoj strani oduzimamo.

$6x = 12$ /:6 Dijelimo s brojem koji množi nepoznanicu.

$x = 12 : 6 = 2.$

Rješenje jednadžbe je broj 2.

Provjera:

$x + 6 = 18 - 5x$

$2 + 6 = 18 - 5 \cdot 2$

$8 = 18 - 10$

$8 = 8.$ Rješenje je točno.

Z a d a c i

3. Riješi jednadžbe.

a) $7y + y = 64$;

b) $z + 6z = -63$;

c) $-3x - 5x = 152$;

d) $10 - 30y - 150 = -200y + 20y + 500$;

e) $-1.2(0.9 + 3x) = -10.8$.

f) $4x - 114 - (6x - 120) - (8x - 74) = 0$;

g) $\frac{2x+1}{5} + \frac{3x-2}{4} = \frac{2x-5}{2} - \frac{x+1}{10} - \frac{37}{20}$;

h) $10\left(x + \frac{2}{3}\right) - 4(6x - 1) = 6$;

Primjer 4. Problemski zadatak

Luka je dvije gumice i tri olovke platio 22.20 kn. Cijena olovke je za 90 lipa veća od cijene gumice. Kolika je cijena olovke?

Rješenje:

Pri rješavanju problemskih zadataka slijedimo ove korake:

1. Pročitaj zadatak.

2. Odredi pitanje.

Označimo sa x cijenu gumice. Cijena olovke je za 90 lp, tj. 0.90 kn veća od cijene gumice.

Cijena gumice x

Cijena olovke $x + 0.9$

3. Odredi koji su podaci zadani.

Cijena 2 gumice $2x$

Cijena 3 olovke $3 \cdot (x + 0.90)$

Sve zajedno košta 22.20 kn.

4. Napiši jednadžbu

$2x + 3 \cdot (x + 0.90) = 22.20$

5. Riješi jednadžbu.

$2x + 3x + 2.70 = 22.20$

$5x = 22.20 - 2.70$

$5x = 19.50 \quad /:5$

$x = 19.50 : 5$

$x = 3.90$ – cijena gumice

$x + 0.90 = 3.90 + 0.90 = 4.80$ – cijena olovke

6. Provjeri rezultat.

$2x + 3 \cdot (x + 0.90) = 22.20$

$2 \cdot 3.90 + 3 \cdot (3.90 + 0.90) = 22.20$

$22.20 = 22.20$. Rješenje je točno.

7. Napiši odgovor riječima.

Cijena gumice je 3.90 kn, a cijena olovke 4.80 kn.

Z a d a c i

4. Temperatura se od podneva snizila za 7°C. Sadašnja temperatura je 11°C. Kolika je bila temperatura u podne?

5. Nakon što je prodao 324 bilježnice, prodavaču je ostalo još 126 bilježnica. Koliko je bilježnica imao na početku?

6. Marko je prodao svoju nogometnu loptu za 51.50 kn. To je 12.50 kn manje od cijene koju je Marko platio za novu loptu. Kolika je bila cijena nove lopte?

7. Širina pravokutnika je 37 cm kraća od njegove dužine. Širina je 75 cm. Kolika je dužina pravokutnika?

8. Majin tata je vozio 120 km i zatim napravio stanku za ručak. Dotad je prešao $\frac{1}{3}$ ukupne duljine puta. Kolika je ukupna duljina puta?

9. Marko je riješio 2 zadatka. To je $\frac{1}{5}$ cijele zadaće iz matematike. Koliko ukupno zadataka Marko mora riješiti?

10. Za osam sladoleda treba platiti 36 kn. Kolika je cijena jednoga sladoleda?

11. Na polici ima 54 cm slobodnog prostora za knjige. Koliko se knjiga može staviti na policu ako za svaku knjigu treba 4.5 cm prostora?

8.2. Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

Godine

Maji su u posjet došle sestrične Iva i Tea. Kad ih je Luka pitao koliko imaju godina, Tea je rekla: "Zajedno imamo 26 godina". Maja mu je šapnula: " Tea je dvije godine starija od Ive."

Pomozi Luki odrediti koliko godina ima Iva, a koliko Tea.

Primjer 1. Jednadžba s dvije nepoznanice

Luka je kupio 5 bilježnica i 8 omota i sve zajedno platio 81 kunu. Zapiši tu rečenicu u obliku jednadžbe.

Rješenje:

Da bismo taj zadatak zapisali pomoću jednadžbe potrebne su nam dvije nepoznanice. Označimo:

x - cijena jedne bilježnice

y - cijena jednog omota.

Zadatak zapisujemo ovako: $5 \cdot x + 8 \cdot y = 81$; odnosno $5x + 8y = 81$.

Važno

Linearna jednadžba s dvije nepoznanice je svaka jednadžba oblika $ax + by = c$, gdje su a, b i c zadani brojevi, $a \neq 0, b \neq 0$, a x i y nepoznanice.
Brojeve a, b i c nazivamo koeficijentima.
Oblik $ax + by = c$, nazivamo standardnim oblikom linearne jednadžbe s dvije nepoznanice.

Z a d a c i

1. Zapiši zadane rečenice u obliku linearne jednadžbe s dvije nepoznanice.
   a) Luka je 5 čokolada i 3 žvakaće platio 38 kn;
   b) Opseg pravokutnika je 50 cm;
   c) Zbroj broja djevojčica i broja dječaka je 27;
   d) Razlika peterokratnika jednog broja i trokratnika drugog broja je 0.
   e) Opseg jednakokračnoga trokuta je 15 dm;
   f) Maja je 6 bilježnica i 5 olovaka platila 35 kn;
   g) Matija je 4 kilograma trešanja i 2 kilograma salate platio 50 kn;
   h) Ana je dva sira i pet peciva platila 29 kn.
   i) Lucija je 5 kilograma banana i 3 kilograma jagoda platio 100 kn;
   j) Brat i sestra zajedno su uštedjeli 652 kn.

Primjer 2. Rješenje jednadžbe

Majin tata je kupio 3 kg banana i 2 kg jabuka i zajedno platio 23 kn. Kolika je cijena kilograma banana, a kolika kilograma jabuka?

Rješenje:

Označimo: x - cijena kilograma banana y - cijena kilograma jabuka. Pripadna jednadžba je: $3x + 2y = 23$.

U zadatku nema nikakvih dodatnih uputa o cijenama pa zaključujemo da zadatak može imati više rješenja. Neka od njih navedena su u tablici.

x – cijena kilograma banana	y – cijena kilograma jabuka	Ukupan iznos $3x + 2y$	Uređeni par
5	4	$3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 = 23$	(5, 4)
3.5	6.25	$3 \cdot 3.5 + 2 \cdot 6.25 = 23$	(3.5, 6.25)
3	7	$3 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 23$	(3, 7)

Vidimo da smo rješenja mogli zapisati u obliku uređenog para u kojem je prvi član vrijednost nepoznanice x, a drugi vrijednost nepoznanice y.

Smisli i ti još neko rješenje. Koji brojevi ne dolaze u obzir kao rješenja ovog zadatka?

Važno

Rješenje linearne jednadžbe s dvije nepoznanice jest svaki uređeni par koji uvršten u jednadžbu daje točnu jednakost.

Primjer 3. Provjera rješenja

Je li uređeni par (–1, 5) rješenje jednadžbe
$2 \cdot x - 5 \cdot y = -27$?

Rješenje:

Točnost rješenja provjeravamo tako da u **jednadžbu umjesto** x **uvrstimo prvi član uređenog para, a umjesto** y **drugi član uređenog para**.

Dakle umjesto x uvrštavamo –1, a umjesto y 5.

$2 \cdot x - 5 \cdot y = -27$

$2 \cdot (-1) - 5 \cdot 5 = -27$

$-2 - 25 = -27$

$-27 = -27$

je rješenje

Dobili smo točnu, istinitu jednakost, pa zaključujemo da uređeni par (–1, 5) jest rješenje te jednadžbe.

Primjer 4.

Je li uređeni par (4, 6) rješenje jednadžbe
$3 \cdot x - 4 \cdot y = 50$?

Rješenje:

Točnost rješenja provjeravamo tako da u jednadžbu umjesto x uvrstimo prvi član uređenog para, a umjesto y – drugi član uređenog para. Dakle, umjesto x uvrštavamo 4, a umjesto y 6.

$3 \cdot x - 4 \cdot y = 50$

$3 \cdot 4 - 4 \cdot 6 = 50$

$12 - 24 = 50$

$-12 = 50$

$-12 \neq 50$

nije rješenje

Dobili smo netočnu, neistinitu jednakost, pa zaključujemo da uređeni par (4, 6) nije rješenje te jednadžbe.

Z a d a c i

2. Provjeri je li zadani uređeni par rješenje jednadžbe.
   a) (3, 0); $5x + 3y = 15$;
   b) (2, –4); $6x - 2y = 1$;
   c) (5, 1); $x + 5y = 10$;
   d) (2, 11); $4x - 5y = -47$;

3. Provjeri je li zadani uređeni par rješenje jednadžbe.
   a) (2.5, 1.5); $2x + 3y = 9$;
   b) (–1.4, 2); $3x - y = -6.2$;
   c) (1, –2.2); $2.3x + 5y = 8.7$;
   d) (0.5, 0.75); $x - 3y = -1.75$.

4. Provjeri je li zadani uređeni par rješenje jednadžbe.

a) $(\frac{2}{3}, 2)$; $3x - \frac{1}{2}y = -1$;

b) $(1\frac{1}{4}, -0.5)$; $2x - \frac{3}{4}y = 2\frac{7}{8}$;

c) $(-3\frac{1}{2}, \frac{3}{5})$; $3x + 5y = -\frac{15}{2}$;

d) $(-2\frac{5}{6}, -\frac{2}{3})$; $\frac{3}{17}x + \frac{3}{2}y = -1.5$.

Primjer 5. Sustav

Majin tata kupio je 4 kg šljiva i 5 kg jabuka i sve zajedno platio 59 kn. Lukin tata je na istom mjestu kupio 2 kilograma šljiva i 3 kilograma jabuka i sve zajedno platio 31 kn. Zapiši te rečenice u obliku jednadžbi.

Rješenje:

Da bismo zadatak zapisali pomoću jednadžbi označimo sa x cijenu kilograma šljiva, a s y cijenu kilograma jabuka. Zapišemo li obje rečenice u obliku jednadžbe, dobivamo:

$4x + 5y = 59$
$2x + 3y = 35.$

sustav dvije jednadžbe

Važno

Ako u zadatku istovremeno promatramo dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice, onda govorimo **o sustavu dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.**

Primjer 6. Rješenje sustava

Luka je kupio 5 bilježnica i 8 omota i sve zajedno platio 81 kunu. Matija je u istoj knjižari kupio 12 bilježnica i 10 omota i sve zajedno platio 130 kn. Zapiši te rečenice u obliku jednadžbi, a zatim provjeri je li uređeni par (5, 7) rješenje tog sustava.

Rješenje:

Označimo:
x - cijena jedne bilježnice
y - cijena jednog omota.
Zadatak zapisujemo ovako:
$5x + 8y = 81$
$12x + 10y = 130.$
Provjerimo je li uređeni par (5, 7) rješenje ovog sustava.
Točnost rješenja provjeravamo tako da u obje jednadžba umjesto x uvrstimo prvi član uređenog para, a umjesto y – drugi član uređenog para. Dakle, umjesto x uvrštavamo 5, a umjesto y 7.

Provjerimo za prvu jednadžbu:
$5 \cdot 5 + 8 \cdot 7 = 81$
$25 + 56 = 81$
$81 = 81$
Dobili smo iste brojeve na obje strane jednadžbe, dakle, uređeni par (5, 7) je rješenje prve jednadžbe.
Provjerimo za drugu jednadžbu
$12 \cdot 5 + 10 \cdot 7 = 130$
$60 + 70 = 130$
$130 = 130$
Dobili smo iste brojeve na obje strane jednadžbe, dakle, uređeni par (5, 7) je rješenje druge jednadžbe.
Obzirom da je uređeni par (5, 7) rješenje obiju jednadžbi zaključujemo da je rješenje tog sustava.

Važno

Rješenje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice je svaki uređeni par brojeva koji je rješenje i jedne i druge jednadžbe sustava.

Zadaci

5. Provjeri je li uređeni par (3, −2) rješenje sustava.

a) $-7x - 3y = -8$
$x + 5y = 18$

b) $5x + 3y = 9$
$-3x + 4y = -17$

c) $-4x + 2y = -18$
$-2x + 6y = 18$

d) $-4x - 2y = -8$
$10x + 6y = 18$

6. Provjeri je li uređeni par (0.5, −1.2) rješenje sustava.

a) $3x + 2y = -0.9$
$-2x - 5y = 5$

b) $1\frac{1}{2}x + y = -\frac{9}{20}$
$-x + y = -1$

c) $3.5x - y = 3$
$4x + 5y = -4$

d) $6x - 5y = 9$
$\frac{3}{2}x + \frac{5}{4}y = -\frac{6}{5}$

7. Provjeri je li uređeni par $(2, \frac{1}{2})$ rješenje sustava.

a) $x + y = 1$
$x - y = 1\frac{1}{2}$

b) $2x + 2y = 5$
$-x + 3y = -0.5$

c) $\frac{3}{4}x + 2y = 2\frac{1}{2}$
$\frac{2}{3}x - \frac{2}{7}y = 1\frac{4}{21}$

d) $x + y = 2.5$
$\frac{1}{2}x + 2y = 1$

8. Provjeri je li uređeni par $(-\frac{1}{6}, -\frac{4}{3})$ rješenje sustava.

a) $x + y = -1\frac{1}{2}$
$x - y = 1\frac{1}{6}$

b) $6x + 3y = -5$
$\frac{1}{2}x - 3y = 3\frac{11}{12}$

c) $-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y = 1$
$2x + 3y = -4$

d) $-6x + 3y = -3$
$12x - 3.3y = 2.4$

U sustavu dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:
$ax + by = c$
$dx + ey = f$
Brojeve a i d nazivamo koeficijenti ma uz x, brojeve b i e koeficijentima uz y, a c i f slobodnim koeficijentima.

9. U sustavima u zadacima 5. i 6. pročitaj:

a) koeficijente uz x;

b) koeficijente uz y;

c) slobodne koeficijente.

Primjer 7. Svođenje sustava na standardni oblik

Promotrimo sustave u tablici

Zadano	Standardni oblik
a) $x = 3y$ $2y = x - 3$	$x - 3y = 0$ $-x + 2y = -3$
b) $\frac{2x+y}{5} - 2(x-2y) = 2y - 3x + 2$ $x - 2(x - 3y - 2) - \frac{3x+y}{2} = 1 - 2x + 4y$	$7x + 11y = 10$ $-x + 3y = -6$

Rješenje:

Prije rješavanja sustava obično ga sređujemo tako da obje jednadžbe budu napisane u standardnom obliku. Ponekad je taj postupak jednostavan i dovoljno je članove s nepoznanicama prebaciti na lijevu stranu, a članove bez nepoznanica na desnu, kao što je učinjeno sa sustavom u a) zadatku.

No sa sustavom u b) zadatku ima puno više posla pa ćemo taj postupak opisati detaljnije. Pri sređivanju jednadžbe najprije je moramo "osloboditi" zagrada

$$\frac{2x+y}{5} - 2x + 4y = 2y - 3x + 2$$
$$x - 2x + 6y + 4 - \frac{3x+y}{2} = 1 - 2x + 4y$$

Zatim se rješavamo razlomaka tako da cijele jednadžbe pomnožimo najmanjim zajedničkim nazivnikom.

$$2x + y - 10x + 20y = 10y - 15x + 10$$
$$2x - 4x + 12y + 8 - (3x + y) = 2 - 4x + 8y$$

Uklonimo preostalu zagradu.

$$2x + y - 10x + 20y = 10y - 15x + 10$$
$$2x - 4x + 12y + 8 - 3x - y = 2 - 4x + 8y$$

Prebacimo članove s nepoznanicama lijevo, a one bez nepoznanica desno.

$$2x + y - 10x + 20y - 10y + 15x = 10$$
$$2x - 4x + 12y - 3x - y + 4x - 8y = 2 - 8$$

Zbrojimo što se može.

$$7x + 11y = 10$$
$$-x + 3y = -6$$

I dobili smo sustav zapisan u standardnom obliku.

standardni oblik sustava
$ax + by = c$
$dx + ey = f$

Zadaci

Svedi sustave na standardni oblik

10. a) $y - 5 = 2x$
    $12 + x = 3y$

    b) $y = 4x$
    $14 = x - y$

    c) $0 = 2x - 3y + 4$
    $4y - 5x - 6 = 0$

11. a) $x + 2x - 6 = 7y$
    $5y - 3x = 4y + 5$

    b) $4x - 3y + 3y + 2x = 11 - 4$
    $10 + 2x - 5y = 3x + 4y - 14$

    c) $10 + 2x = 5y - 5 - 3y$
    $x + x = y + y$

12. a) $3(2x + y - 1) - 2(x - y) = 3y - 1$
    $2 - 3(x + 2y) - 4y = 9$

    b) $2(3x + 2y - 3) - 3(x + y) = 3 - 5y$
    $1 - 2(x + y - 4) + 3y = y - x$

    c) $2(x + 3) - 3(y - 1) = 20$
    $-5(x - 1) + 4(y + 2) = -4$

    d) $5(x + 1) - 2(y + 3) + 8 = 0$
    $-3(x - 2) + 5(y - 4) + 6 = 0$

13. Svedi sustave na standardni oblik

a) $\dfrac{x+y}{4} - \dfrac{2y+1}{3} = x + \dfrac{5}{24}$
$4y + \dfrac{6x-1}{7} = 1$

b) $\dfrac{4x-2y}{11} + \dfrac{3}{4}(5y - \dfrac{1}{2}) = 1$
$2y - \dfrac{1}{5}\left[2x - \dfrac{1}{2}(1-3y)\right] = \dfrac{7}{5}$

c) $\dfrac{x+4y}{5} + \dfrac{2}{15}(y+1) = \dfrac{3+x}{5}$
$\dfrac{4x-3y}{3} = \dfrac{49}{6} - 3x$

d) $\dfrac{2-\frac{1}{3}}{5}x + 9y = \dfrac{\frac{1}{5}x - y}{3} - \dfrac{4}{9}$
$\dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{5} = 5(1 + \dfrac{y}{25})$

e) $\dfrac{x+2y}{2} - 3(x-y) = 2y + x - 1$
$1 - 4(2x + y - 5) - \dfrac{7x-2}{3} = 2 - 2x - 3y$

f) $3x - y + 4 = 0$
$7 - 6x - 2(y-3) = \dfrac{y-1}{4}$

g) $3x + 2y - 3 = 0$
$7 - 9x - 4(y+1) = \dfrac{y-8}{3}$

8.3. Metoda supstitucije

Maja je kupila 3 bilježnice i 4 omota i sve zajedno platila 19 kn. Kolika je cijena bilježnice ako je cijena omota 1 kn?

Metoda supstitucije ili zamjene način je rješavanja sustava u kojem jednu nepoznanicu zamjenjujemo nekim izrazom. Najjednostavnija je mogućnost da nepoznanicu zamjenimo brojem – obično kažemo da uvrštavamo vrijednost. To je vrlo slično uvrštavanju vrijednosti uređenog para, što smo radili kod provjeravanja rješenja sustava.

Primjer 1. Zamijeni nepoznanicu brojem

Riješi sustav:

$x = 5$

$2x - 3y = 7.$

Rješenje:

Primijetimo da u ovom sustavu prva jednadžba odmah daje rješenje za nepoznanicu x. Da bismo dobili nepoznanicu y, u drugoj jednadžbi moramo x zamijeniti s 5.

$x = 5$

$\underline{2x - 3y = 7.}$

$2 \cdot 5 - 3y = 7$

Umjesto x napisali smo 5, a sve ostalo smo prepisali. Dalje rješavamo kao linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom y.

$10 - 3y = 7$

$-3y = 7 - 10$

$-3y = -3 \;/ : (-3)$

$y = 1$

Rješenje je uređeni par (5, 1).

Provjera:

Da bismo provjerili točnost rješenja u sustav uvrštavamo umjesto x 5 i umjesto y 1.

$5 = 5$ ✓

$2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7$

$10 - 3 = 7$

$7 = 7.$ ✓

Rješenje je točno.

Z a d a c i

1. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $x = -2$, $3x + y = -4$

b) $x = 0.8$, $x - 2y = -3$

c) $x = -\frac{3}{4}$, $4x - 3y = 6$

d) $x = 2\frac{1}{3}$, $2x + \frac{1}{3}y = 2$

e) $x = 0$, $2x - 4y = 7$

f) $x = 3$, $-3x + 4y = 5$

g) $x = -10$, $x - y = 0$

h) $x = -6$, $-4x - 8y = 56.$

2. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $y = 3$, $-x + y = -1$

b) $y = -2$, $2x - y = 3$

c) $y = 1.4$, $x - 2y = 0$

d) $y = -\frac{1}{6}$, $-2x - 3y = -\frac{1}{6}$

e) $y = 0$, $-4x - 8y = 56.$

f) $y = 6$, $-3x + 4y = 5$

g) $y = -10$, $6x - y = 0$

h) $y = -6$, $2x - 4y = 4.$

3. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $x + 4 = 0$
$-3x + 4y = 16$

b) $x - 3 = 0$
$2x - 0.5y = 2$

c) $x + 2.5 = 0$
$-3x + y = 3.5$

d) $x - \frac{1}{3} = 0$
$3x + 2y = 4$

e) $x + 6 = 0$
$-3x + 6y = 16$

f) $x - 4 = 0$
$4x - 6y = 12$

g) $x + 5 = 0$
$10x + 5y = 100$

f) $x - 10 = 0$
$15x - 6y = 200.$

4. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $y - 3 = 0$
$2x + y = 1$

b) $y + 1 = 0$
$-3x + 2y = -3.5$

c) $y - 2.1 = 0$
$0.5x - y = 3.1$

d) $y + \frac{1}{7} = 0$
$3x - 7y = 1$

e) $y + 7 = 0$
$-7x + 6y = 14$

f) $y - 4 = 0$
$4x - 6y = 12$

g) $y + 1 = 0$
$10x + 5y = 100$

f) $y - 3 = 0$
$9x - 6y = 21.$

Primjer 2. Zamijeni nepoznanicu izrazom – koeficijent 1

Riješi sustav:

$2x + 5y = 19$
$3x + y = 9$

Rješenje:

U ovom sustavu nemamo jednostavnu situaciju kao u prošlom primjeru, zato najprije promotrimo sustav i uočimo nepoznanicu s koeficijentom 1.

Potraži nepoznanicu s koeficijentom 1

$2x + 5y = 19$
$3x + y = 9$

Vidimo da uz y u drugoj jednadžbi imamo koeficijent 1. Zato ćemo odabrati taj y za supstituciju. U drugoj jednadžbi y ostavimo na lijevoj strani, a sve ostale članove prebacimo na desnu stranu jednakosti. Često kažemo da smo: "Iz druge jednadžbe izvukli y". Ne zaboravite promijeniti predznake kad izraze prebacujete na drugu stranu!

Ako mijenjaš stranu – mijenjaj predznak

$3x + y = 9$
$y = 9 - 3x$

U prvoj jednadžbi zamijenimo y sa $(9 - 3x)$. Ne zaboravite da ovdje y zamjenjujemo dvočlanim izrazom, pa taj izraz obavezno stavljamo u zagradu!

$2x + 5y = 19$
$2x + 5(9 - 3x) = 19$

Dalje rješavamo kao linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom x. Računamo izraz sa zagradom

$2x + 45 - 15x = 19$

Prebacujemo članove s nepoznanicom lijevo, a ostale desno.

$2x - 15x = 19 - 45$

Računamo izraze na lijevoj i desnoj strani.

$-13x = -26$

Dijelimo s brojem uz nepoznanicu.

$x = -26 : (-13)$

$x = 2$. Dobili smo rješenje Za nepoznanicu x. Dobiveno rješenje uvrštavamo u jednadžbu za y.

$y = 9 - 3x = 9 - 3 \cdot 2 = 9 - 6 = 3$

Rješenje je uređeni par (2, 3)

metoda supstitucije

$2x + 5y = 19$
$\underline{3x + y = 9}$
$y = 9 - 3x$
$2x + 5(9 - 3x) = 19$
$2x + 45 - 15x = 19$
$2x - 15x = 19 - 45$
$-13x = -26$
$x = 2$
$y = 9 - 3x$
$y = 9 - 3 \cdot 2$
$y = 9 - 6$
$y = 3$
rješenje je (2,3)

Provjera:

Da bismo provjerili točnost rješenja u sustav uvrštavamo umjesto x 2 i umjesto y 3.

$2x + 5y = 19$
$\underline{3x + y = 9}$
$2 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 19$
$\underline{3 \cdot 2 + 3 = 9}$
$4 + 15 = 19$
$\underline{6 + 3 = 9}$
$19 = 19$ ✓
$9 = 9$ ✓
Dakle, rješenje je točno.

Z a d a c i

5. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $x + y = 8$
   $2x - 6y = 8$

b) $x + 2y = 4$
   $3x + 4y = 11$

c) $2x + y = -1$
   $x - y = -2$

d) $2x + y = 2$
   $3x - 4y = 14$

6. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $4x - 3y = 0$
   $x + 5y = 23$

b) $3x - 5y = -28$
   $2x + y = 3$

c) $x - 4y - 4 = 0$
   $3x - 7y = 7$

d) $7x + y - 38 = 0$
   $11x - 4y - 43 = 0$

7. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $-6x - 4y - 14 = 0$
   $x + 5y - 2 = 0$

b) $x + 3y = 11$
   $2x - 4y = -8$

c) $x + 4y = 21$
   $3x - 2y = 7$

d) $x + 2y = 9$
   $3x + 4y = 17$

e) $x + 4y = 14$
   $-3x + 2y = 14$

8. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $-3x + 2y = 5$
   $-4.2x + y = 5.2$

b) $x - 0.2y = 2$
   $2x - \frac{1}{2}y = 4.1$

Primjer 3. Koeficijent −1

Riješi sustav:

$-x + 5y = -14$

$-3x - 2y = -8$

Rješenje:

Najprije promotrimo sustav i uočimo nepoznanicu s koeficijentom −1.

Potraži nepoznanicu s koeficijentom −1

$-x + 5y = -14$

$-3x - 2y = -8$

Vidimo da uz x u prvoj jednadžbi imamo koeficijent −1. Zato ćemo odabrati taj x za supstituciju. U prvoj jednadžbi −x ostavimo na lijevoj strani, a sve ostale članove prebacimo na desnu stranu jednakosti.

$-x + 5y = -14$

$-x = -14 - 5y$

No, to još nije dovoljno da bismo mogli napraviti zamjenu u drugoj jednadžbi. Još moramo cijelu jednadžbu podijeliti s −1, tako da s lijeve strane piše samo x. Podijeliti s −1 zapravo znači svim članovima u jednadžbi promijeniti predznak

$-x = -14 - 5y \; / : (-1)$

$x = 14 + 5y$

U drugoj jednadžbi zamijenimo x s $(14 + 5y)$.
Taj izraz obavezno stavljamo u zagradu!

$-3x - 2y = -8$

$-3(14 + 5y) - 2y = -8$

Dalje rješavamo kao linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom y.

$-42 - 15y - 2y = -8$

$-15y - 2y = -8 + 42$

$-17y = 34 \; / : (-17)$

$y = -2$

Dobili smo rješenje za nepoznanicu y.
Dobiveno rješenje uvrštavamo u jednadžbu za x.

$x = 14 + 5y$

$x = 14 + 5 \cdot (-2) = 14 - 10 = 4$

Rješenje je uređeni par (4, −2)

Provjerom utvrdimo da je rješenje točno.

Zadaci

9. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $2x - y = -5$
$3x + 8y = 2$

b) $2x + 3y = 27$
$-x + 2y = 11$

c) $-2x + 4y = -6$
$3x - y = 4$

d) $-x + 5y = 8$
$2x - 3y = -2$

e) $3x - 2y = -8$
$4x - y = -9$

f) $2x - 3y = -2$
$-x + 6y = 2.5$

g) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{2}$
$2x - y = 3$

10. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $4x + 3y = 8$
$-8x + y = -2$

b) $3x - 2x = 8$
$-x + 4y = -1$

c) $4x - \frac{1}{2}y = 1\frac{3}{8}$
$x - y = 1$

d) $4x - y = 7$
$\frac{2}{3}x - 4y = \frac{5}{3}$

Primjer 4. Zajednički djelitelj svih koeficijenata

Riješi sustav:

$3x - 3y = 6$
$\underline{2x + 9y = -7}$

Rješenje:

Najprije promotrimo sustav i uočimo nepoznanicu s koeficijentom koji je djelitelj ostalih koeficijenata u jednadžbi. Imamo dva takva člana u prvoj jednadžbi: $3x$ i $-3y$.

Potraži nepoznanicu s koeficijentom koji je djelitelj ostalih

Odabrat ćemo y iz prve jednadžbe.

Podijeli cijelu jednadžbu s brojem uz nepoznanicu

$3x - 3y = 6$

$-3y = 6 - 3x$ / : (−3)

Da bi nam s lijeve strane ostao samo y moramo cijelu jednadžbu podijeliti s (−3).

$y = -2 + x$

U drugoj jednadžbi y zamjenjujemo sa $(-2 + x)$

$2x + 9y = -7$

$2x + 9(-2 + x) = -7$

$2x - 18 + 9x = -7$

$2x + 9x = -7 + 18$

$11x = 11$ / : 11

$x = 1$

Dobiveno rješenje uvrštavamo u jednadžbu za y.

$y = -2 + x$

$y = -2 + 1 = -1$

Rješenje je $(1, -1)$

Provjerom utvrdimo da je rješenje točno.

Svaku jednadžbu možemo podijeliti ili pomnožiti brojem različitim od nule. Pritom rješenja jednadžbe ostaju ista.

Zadaci

11. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $2x + 3y = 4$
$4x - 4y = 28$

b) $3x - 2y = 1$
$2x - 4y = -2$

c) $-2x + 3y = 8$
$2x + 2y = 2$

d) $3x + 2y = 5$
$2x - 6y = 18$

e) $7x - 2y = 5.5$
$3x + 3y = -1.5$

12. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $3x - 2y = 4$
$3x + 3y = 9$

b) $5x - 3y = 4$
$2x - 6y = 0$

c) $-2x + 3y = -10$
$-4x - 2y = 4$

d) $2x - 4y = -7$
$2x + 2y = 6.8$

e) $3x + 3y = 3$
$-2x + 4y = 2$

f) $2x + y = 2$
$3x - 4y = 14$

g) $4x - 3y = 0$
$x + 5y = 23$

h) $x + y = 20$
$2x + 5y = 20$

i) $9x + 7y = 4$
$3x + y = 16$

j) $x - 5y = -4$
$-3x + 7y = 4$

13. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $3x - 2y = -2$
$\frac{1}{2}x - 2y = 3$

b) $\frac{1}{2}x - 2y = 3$
$\frac{1}{2}x + 2y = -1$

c) $x - \frac{1}{3}y = 0$
$2x - \frac{1}{3}y = 1$

Primjer 5. Razlomci

Riješi sustav

$3x + 4y = 6$
$5x - 6y = -28$

Rješenje:

U zadanom sustavu ne uočavamo nijedan od prije spomenutih koeficijenata. Dakle, možemo odabrati bilo koju nepoznanicu – odaberemo x iz druge jednadžbe.

$5x - 6y = -28$
$5x = -28 + 6y \;/ : 5$

$$x = -\frac{28}{5} + \frac{6}{5}y$$

U prvoj jednadžbi zamjenjujemo x sa

$\left(-\frac{28}{5} + \frac{6}{5}y\right)$.

$3x + 4y = 6$

$$3\left(-\frac{28}{5} + \frac{6}{5}y\right) + 4y = 6$$

$$-\frac{84}{5} + \frac{18}{5}y + 4y = 6 \;/ \cdot 5$$

$$-84 + 18y + 20y = 30$$

$$18y + 20y = 30 + 84$$

$$38y = 114 \;/ : 38$$

$$y = 3$$

Dobiveno rješenje uvrštavamo u jednadžbu za x.

$$x = -\frac{28}{5} + \frac{6}{5}y$$

$$x = -\frac{28}{5} + \frac{6}{5} \cdot 3 = x = -\frac{28}{5} + \frac{18}{5} = -\frac{10}{5} = -2$$

Rješenje je uređeni par $(-2, 3)$

Provjerom utvrdimo da je rješenje točno.

Zadaci

14. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $2x + 3y = 5$
$5x - 6y = -28$

b) $-7x + 4y = -19$
$3x - 2y = 8$

c) $3x - 2y = -1$
$6x + 7y = -13$

d) $-3x + 12y = 52.5$
$6x - 6y = -33$

e) $5x + 7y = 9$
$-4x - 3y = -2$

f) $3x + 2y = 7$
$-7x + 2y = -23$

15. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $5x - 4y + 11 = 0$
$5x + 2y = 5$

b) $3x + 4y - 4 = 0$
$2x - 4y - 1 = 0$

c) $\frac{4}{3}x + 2y = -\frac{4}{3}$
$-7x - \frac{1}{2}y = 7$

d) $1.5x - 2y = -1$
$\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}y - 1 = 0$

e) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$
$\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y - 3 = 0$

16. Riješi sustave metodom supstitucije:

a) $2(x - 3) - 3(2y + 4) = 0$
$4(x - 1) - (y + 2) = -14$

b) $2(x - 2) + 4(y - 1) = -2$
$-2(x + 1) - 2(y + 3) = -12$

c) $-(x + 3) - 2(y - 1) = -5$
$5(x - 3) + (2y - 3) - 22 = 0$

d) $3(2x - 1) - 2(y + 1) = -4$
$4(x + 2) - (3y - 1) = 8$

e) $2(x - y) - (3x + y) + 9 = 2$
$3x - (2x + 4y) - 5 = -12$

Vježbalica

Riješi sustave metodom supstitucije

1. $x = 3$
$4x + 2y = 19$

2. $y = -4$
$3x - 2y = -14$

3. $x = -3$
$2x - \frac{x + y}{2} = 3$

4. $y = \frac{1}{2}$
$3x - 2y = 2$

5. $2x + y = 3$
$-3x + 2y = -1$

6. $x - 3y = 5$
$2x + 2y = 2$

7. $3(x + y) - 2(x - y) = 6$
$2(x - y) + 3(x + y) = 6$

8. $\frac{2x+1}{3} - \frac{3y-1}{2} = 0$
$\frac{x+1}{2} - \frac{2y-1}{3} = \frac{2}{3}$

9. $\frac{x+3}{2} - \frac{2y+1}{5} = \frac{6}{5}$
$\frac{2x-1}{4} + \frac{y+1}{2} = -\frac{3}{4}$

10. $\frac{x+1}{2} - \frac{y-1}{3} = \frac{17}{6}$
$\frac{x+1}{6} - \frac{y-1}{8} = 1$

11. $\frac{2x+3}{5}-\frac{3y+2}{6}=\frac{23}{30}$

$\frac{x-7}{4}-\frac{2y}{3}=-1\frac{1}{12}$

12. $\frac{x+2}{7}+y=1\frac{4}{7}$

$\frac{x-2}{3}-\frac{2y+1}{4}=-\frac{3}{4}$

13. $\frac{x+1}{4}+\frac{y-1}{6}=\frac{1}{3}$

$\frac{2x-1}{5}-\frac{3y+2}{4}=-3\frac{7}{20}$

14. $\frac{x+3}{4}-\frac{y-2}{5}=-\frac{1}{10}$

$\frac{x-1}{6}+\frac{3y+1}{8}=\frac{5}{3}$

15. $\frac{3x+5}{4}-\frac{2y+7}{3}=-\frac{15}{4}$

$\frac{5x-1}{6}+\frac{y+1}{3}=\frac{3}{2}$

16. $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=\frac{11}{6}$

$\frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$

17. $\frac{x-y}{5}+\frac{2x-y}{3}=\frac{1}{3}$

$\frac{2x-y}{3}-\frac{x+y}{5}=-\frac{1}{15}$

18. $\frac{x+2y}{3}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{12}$

$\frac{2x-y}{2}+\frac{x-1}{3}=1$

8.4. Metoda suprotnih koeficijenata

Zbroj dva broja je 10, a njihova razlika 2. Koji su to brojevi?

suprotni brojevi
−4 i 4
12 i −12
a i −*a*
x i −*x*

Metoda suprotnih koeficijenata zasniva se na činjenici da je zbroj suprotnih brojeva jednak 0. To znači da je:

−2 + 2 = 0
5 + (−5) = 0 i sl.

Da bi se pri rješavanju sustava mogla primijeniti ta metoda, potrebno je uočiti u sustavu par suprotnih koeficijenata uz istu nepoznanicu, a ako ih nema, onda treba pomnožiti jednadžbe da bi se dobili suprotni koeficijenti.

Da bismo sustav mogli rješavati ovom metodom on mora biti zapisan u standardnom obliku!

Primjer1. Postoje suprotni koeficijenti

Riješi sustav:

$5x - 4y = -17$

$7x + 4y = 5$

Rješenje:

Promotrimo sustav i uočimo suprotne koeficijente uz nepoznanicu y.

$5x - 4y = -17$

$\underline{7x + 4y = 5}$

$$\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= -17 \\ \underline{7x + 4y} &\underline{= 5} \end{aligned}\right\} +$$

Zbrajamo posebno:

- članove sa x – njihov zbroj je $12x$;
- članove sa y – njihov zbroj je 0 jer se radi o zbroju suprotnih brojeva pa nepoznanica y nestaje;
- brojeve zdesna – njihov zbroj je – 12.

$$\left.\begin{aligned} 5x - 4y &= -17 \\ \underline{7x + 4y} &\underline{= 5} \end{aligned}\right\} +$$

$12x = -12$

Nakon zbrajanja preostala nam je samo nepoznanica x. Dobivenu jednadžbu podijelimo s 12 i dobivamo:

$12x = -12 \,/ :12$

$x = -1$

Rješenje za nepoznanicu x je –1. Dobiveno rješenje uvrštavamo u jednu od početnih jednadžbi – odabrat ćemo drugu jednadžbu.

$7 \cdot (-1) + 4y = 5$

Nakon uvrštavanja dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom koju rješavamo na uobičajen način.

$-7 + 4y = 5$

$4y = 5 + 7$

$4y = 12 \,/ : 4$

$y = 3$

Rješenje je uređeni par (–1, 3).

Provjera:

$5x - 4y = -17$

$7x + 4y = 5$

$5 \cdot (-1) - 4 \cdot 3 = -17$

$7 \cdot (-1) + 4 \cdot 3 = 5$

$-17 = -17 \checkmark$

$5 = 5 \checkmark$

Dakle rješenje je točno.

Z a d a c i

1. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
   - a) $3x + 2y = 5$, $-4x - 2y = -6$
   - b) $-5x + 7y = -8$, $5x - 4y = 11$
   - c) $6x + y = -11$, $-3x - y = 5$
   - d) $12x - 3y = -27$, $4x + 3y = -5$
   - e) $6x - 2y = -4$, $-6x - 3y = -6$
   - f) $-3x - 3y = 0$, $3x - 12y = -15$

2. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
   - a) $7x + 3y = 8$, $-7x - 4y = -6$
   - b) $3x + 3y = 3$, $2x - 3y = -8$
   - c) $4x - 5y = -7$, $-3x + 5y = 9$

3. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
   - a) $5x - 4y = -5$, $-5x + 7y = 5$
   - b) $3x - 2y = -6$, $4x + 2y = 6$
   - c) $2x + 5y = 1$, $4x - 5y = 1$

4. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
   - a) $5x + 6y = 2.8$, $-5x - 2y = -1.6$
   - b) $2x - 3y = 1$, $5x + 3y = 6$
   - c) $2x + 6y = -7.4$, $6x - 6y = -10.2$
   - d) $2x + 3y = 8$, $-2x + 4y = 6$
   - e) $3x + 2y = 7$, $-3x + 4y = 5$
   - f) $4x - 5y = -2$, $3x + 5y = 16$.

Primjer 2. Množenje jedne jednadžbe

Riješi sustav:

$2x + 3y = -10$
$4x + 5y = -16$

Rješenje:

Primjećujemo da u ovom sustavu nema suprotnih koeficijenata, no ima jedan par koeficijenata kod kojeg je jedan koeficijent višekratnik od drugog – koeficijenti uz x.

$2x + 3y = -10$

$4x + 5y = -16$

Da bismo dobili suprotne koeficijente uz nepoznanicu x, postojeće koeficijente trebamo proširiti na najmanji zajednički višekratnik. NZV (2, 4) = 4. Dakle, prvu jednadžbu trebamo pomnožiti sa (–2), a drugu ćemo prepisati.

$2x + 3y = -10 \;/ \cdot (-2)$
$4x + 5y = -16$

$$\left.\begin{aligned} -4x - 6y &= 20 \\ 4x + 5y &= -16 \end{aligned}\right\} +$$

Imamo suprotne koeficijente uz x pa jednadžbe možemo zbrojiti.

$-1y = 4 \;/ : (-1)$
$y = -4$

Dobiveno rješenje uvrstimo u jednu od početnih jednadžbi.

$2x + 3y = -10$

$2x + 3 \cdot (-4) = -10$

$2x - 12 = -10$

$2x = -10 + 12$

$2x = 2 \;/ :2$

$x = 1$

Rješenje je uređeni par (1, –4).

Provjerom utvrdimo da je rješenje točno.

Zadaci

5. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $4x - 2y = 20$
 $-8x - 3y = -68$

b) $5x + 4y = -2$
 $3x + 2y = 0$

c) $-10x + 5y = 15$
 $2x - 2y = -4$

d) $12x - 3y = -27$
 $4x - 7y = -15$

e) $-3x - 3y = 0$
 $4x - 12y = -16$

f) $5x + y = 14$
 $-3x + y = -10$

6. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $2x + 2y = 3$
 $4x - 3y = -5$

b) $3x - 2y = 2$
 $7x + 6y = 26$

c) $2x + 3y = 4$
 $4x - 4y = 28$

7. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $3x + 2y = 5$
 $2x - 6y = 18$

b) $-2x + 3y = -10$
 $-4x - 2y = 4$

c) $-7x + 4y = -19$
 $3x - 2y = 8$

8. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $3x + 6y = 5$
 $-9x - 3y = -5$

b) $x - y = 1.8$
 $5x + 7y = 12.6$

c) $1.2x - 3.4y = -1$
 $12x + 5y = 29$

d) $2x + 5y = 9$
 $-4x + 3y = -5$

e) $3x + 2y = 8$
 $-6x + 3y = -9$

f) $5x - 6y = -1$
 $4x + 6y = 10.$

Primjer 2.
Množenje obiju jednadžbi

Riješi sustav:

$5x + 6y = 5$

$7x + 9y = 7$

Rješenje:

Primjećujemo da u ovom sustavu nema suprotnih koeficijenata, a nema nijednog para koeficijenata kod kojeg je jedan koeficijent višekratnik od drugog. U takvu slučaju odabiremo jednu nepoznanicu, određujemo najmanji zajednički višekratnik te množimo obje jednadžbe.

$5x + 6y = 5$

$7x + 9y = 7$

Odabiremo nepoznanicu y. NZV (6, 9) = 18. To znači da prvu jednadžbu trebamo množiti s 3, a drugu s 2. Budući da oba koeficijenta imaju jednak predznak, potrebno je jednu jednadžbu pomnožiti s negativnim brojem

$5x + 6y = 5 \ / \cdot (-3)$

$7x + 9y = 7 \ / \cdot 2$

$$\left.\begin{aligned} -15x - 18y &= -15 \\ 14x + 18y &= 14 \end{aligned}\right\} +$$

Imamo suprotne koeficijente uz y pa jednadžbe možemo zbrojiti.

$-1x = -1 \ / : (-1)$

$x = 1$

Dobiveno rješenje uvrstimo u jednu od početnih jednadžbi.

$5x + 6y = 5$

$5 \cdot 1 + 6y = 5$

$5 + 6y = 5$

$6y = 5 - 5$

$6y = 0 \ / :6$

$y = 0$

Rješenje je uređeni par (1, 0).

Provjerom utvrdimo da je rješenje točno.

Z a d a c i

9. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
   - a) $2x + 3y = 8$, $3x - 2y = -1$
   - b) $4x - 5y = 1$, $2x + 3y = -5$
   - c) $2x - 7y = -3$, $3x + 5y = 11$
   - d) $3x - 2y = 3$, $2x - 3y = -3$
10. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
    - a) $2x - 3y = -14$, $5x + 2y = 3$
    - b) $6x + 7y = 5$, $5x - y = 11$
    - c) $3x - 5y = -22$, $4x + 2y = 14$
    - d) $5x - 3y = 9$, $3x + 4y = -12$
11. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
    - a) $5x - 4y + 11 = 0$, $5x + 2y = 5$
    - b) $1.5x - 2y = -1$, $\frac{5}{2}x - \frac{2}{3}y - 1 = 0$
    - c) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$, $\frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y - 3 = 0$
    - d) $\frac{4}{3}x + 2y = -\frac{4}{3}$, $-7x - \frac{1}{2}y = 7$
12. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:
    - a) $3x + 2y = 1.1$, $-2x + 3y = 5.5$
    - b) $1.3x - y = 0.73$, $x + 2.4y = 6.9$
    - c) $2.3x + 3y = 1$, $-4x - 2.7y = 0.9$
    - d) $2.4x - 0.6y = 1.5$, $1.8x + 1.8y = 1.5$
13. Riješi sustave iz 13. zadatka poglavlja "Metoda supstitucije" metodom suprotnih koeficijenata. Jesi li dobio (dobila) ista rješenja? Kojom si metodom prije došao do rješenja?

14. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y-\frac{5}{6}=0$

$\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y-\frac{8}{15}=0$

b) $\frac{5}{2}x-\frac{4}{3}y=1\frac{1}{3}$

$0.2x+4y=-\frac{23}{25}$

c) $\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y+\frac{1}{2}=0$

$\frac{4}{5}x-0.6y=-\frac{3}{5}$

15. Riješi sustave metodom kojom želiš.

a) $2(x+1)-3(y-2)=13$

$4(x+2)-2(y-1)=16$

b) $-(x+2)+(y-3)=-2x$

$2(2x+1)-3(y+3)=y-3$

c) $-3(x+2y)-2(x-y)=-5+7y$

$2(x+3y)-4(x-2)=6(1+y)$

d) $3(x-y)-2(x+y)=3x+1$

$x+2y-3(x-2y)=-6x$

Vježbalica

Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata

1. $2x-3y=5$

$x+3y=1$

2. $12x+5y=7$

$4x-3y=7$

3. $3x+2y=-5$

$4x-3y=-1$

4. $\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y=1\frac{1}{15}$

$\frac{4}{5}x-\frac{1}{3}y=\frac{2}{15}$

5. $2(2x-1)-3(y+2)=-8$

$3(x-2)-2(y-1)=-4$

6. $\frac{x+2}{5}-\frac{y-1}{3}=-\frac{2}{3}$

$\frac{x-1}{4}+\frac{y+1}{2}=\frac{5}{4}$

7. $\frac{x+5}{3}-\frac{y-2}{2}=\frac{9}{2}$

$\frac{x-4}{4}+\frac{y+1}{2}=-\frac{7}{4}$

8. $\frac{2(x+2)}{3}-\frac{y-1}{2}=\frac{1}{3}$

$\frac{x+5}{2}+\frac{2(y+3)}{4}=\frac{11}{2}$

9. $\frac{2x+3}{4}-\frac{y+1}{3}=-\frac{11}{12}$

$\frac{x-1}{3}+\frac{2y+5}{2}=2.5$

10. $\frac{x+2}{3}-\frac{y+1}{6}=\frac{2}{3}$

$\frac{x-3}{2}-\frac{2(x+1)}{5}=-\frac{9}{5}$

11 $\frac{x+y}{2}-\frac{3(x+y)}{4}=-1$

$\frac{2x+1}{3}-\frac{x-y}{2}=1$

12. $\frac{x+y}{3}-\frac{x-y}{2}=\frac{11}{6}$

$\frac{x-y}{3}+\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$

13. $\frac{x-y}{5}+\frac{2x-y}{3}=\frac{1}{3}$

$\frac{2x-y}{3}-\frac{x+y}{5}=-\frac{1}{15}$

14. $$\frac{x+2y}{3}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{12}$$
$$\frac{2x-y}{2}+\frac{x-1}{3}=1$$

15. $$\frac{x+y}{4}-\frac{x-y}{2}=-\frac{5}{2}$$
$$\frac{2x+1}{3}-\frac{y-3}{2}=4$$

8.5. Primjena sustava linearnih jednadžbi

Maja i njezina mama zajedno imaju 48 godina. Koliko godina ima mama, a koliko Maja ako je mama tri puta starija od Maje?

Poznavanje načina rješavanja sustava uvelike nam može olakšati rješavanje različitih problemskih zadataka. Najvažnije je dobro pročitati zadatak i pažljivo ga zapisati u obliku jednadžbi. Daljnje rješavanje najčešće nije komplicirano.

Primjer 1. Problemski zadatak

U uredu radi 28 zaposlenika. Muškaraca ima tri puta više nego žena. Koliko žena radi u tom uredu? Koliko muškaraca radi u tom uredu?

Rješenje:

Postupak rješavanja problemskih zadataka isti je kao i kod rješavanja zadataka s linearnom jednadžbom.

1. Pročitaj zadatak.
2. Odredi pitanje.

   Označimo sa x broj muškaraca, a sa y broj žena u tom uredu.
3. Odredi koji su podaci zadani.

   Ukupno ima 28 zaposlenika

   Muškaraca ima tri puta više nego žena
4. Napiši jednadžbe

   $x + y = 28$; $y = 3x$
5. Riješi sustav.

   $x + y = 28$

   $\underline{-3x + y = 0 \;/ \cdot (-1)}$

   $\left.\begin{array}{l} x+y=28 \\ \underline{3x-y=0} \end{array}\right\} +$

   $4x = 28 \;/ : 4$

   $x = 7$

   $y = 3x$

   $y = 3 \cdot 7 = 21$

   Rješenje je (7, 21)
6. Provjeri rezultat.

   $x + y = 28$

   $\underline{y = 3x}$

   $7 + 21 = 28$

   $\underline{21 = 3 \cdot 7}$

   $28 = 28$ ✓

   $21 = 21$ ✓

   Rješenje je točno.
7. Napiši odgovor riječima.

   U uredu radi 7 žena i 21 muškarac.

Zadaci

1. U školi radi dvostruko više učiteljica nego učitelja. Koliko učiteljica radi u toj školi ako je ukupno zaposleno 30 učitelja i učiteljica?
2. Tijekom ljeta Matija je radio pet puta više dana nego Luka. Obojica su ukupno radila 72 dana. Koliko je dana radio svaki?
3. Cijeli kamion ima masu 5.5 t. Masa karoserije kamiona je četiri puta veća od mase njegova motora. Kolika je masa motora? Kolika je masa karoserije kamiona?
4. Lukina mama je četiri puta starija od Luke. Mama i Luka zajedno imaju 60 godina. Koliko godina ima mama, a koliko Luka?
5. Lucija je napravila 9 čestitaka više nego Luka. Zajedno su napravili 75 čestitaka. Koliko je napravio svaki od njih?
6. Dva odijela stoje 780.55 kn. Jedno odijelo stoji 120.11 kn više nego drugo. Koliko košta svako od tih odijela?
7. Matija ima 12.5 kg više nego Lucija. Zajedno su teški 114 kg. Koliko kilograma ima svaki od njih?
8. Ana ima 16 knjiga manje nego Maja. Zajedno imaju 150 knjiga. Koliko knjiga ima Ana, a koliko Maja?
9. Luka i Matija zajedno su teški 170 kg. Matijina težina je za 40 kg manja od dvostruke Lukine težine. Koliko je težak svaki dječak?
10. Lucija i Ana zajedno su uštedjele 732.56 kn. Ana je uštedjela 50.24 kn više od trostrukog iznosa Lucijine ušteđevine. Koliko je uštedjela svaka djevojčica?
11. Stolar je prerezao dasku koja je dugačka 15 m na dva dijela. Jedan je komad 2 m kraći od četverostruke duljine drugog komada. Koliko je dugačak svaki komad daske?
12. U 7.a razredu ima 27 učenika. Djevojčica ima za 5 manje nego dječaka. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka u tom razredu?
13. Opseg pravokutnika je 120 cm. Duljina jedne stranice pet je puta veća od duljine druge stranice. Kolike su duljine stranica? Kolika je površina toga pravokutnika?
14. Duljina jedne stranice pravokutnika je 5 cm veća od druge. Opseg pravokutnika je 25 cm. Kolike su duljine njegovih stranica?
15. Duljina jedne stranice pravokutnika je 5 cm manja od druge. Opseg pravokutnika je 21 cm. Kolike su duljine njegovih stranica?
16. Duljina jedne stranice pravokutnika je 5 puta manja od druge. Opseg pravokutnika je 24 cm. Kolike su duljine njegovih stranica?
17. U jednakokračnom trokutu kut nasuprot osnovice dvostruko je veći od kuta uz osnovicu. Koliki su unutarnji kutovi toga trokuta?
18. Opseg jednakokračnog trokuta je 39 cm. Kolika je duljina kraka ako je duljina osnovice za 9 cm dulja od kraka?
19. Tijekom ljeta Luka je radio četiri puta više dana nego Ana. Ukupno su radili 25 dana. Koliko je dana radio svaki od njih?
20. Lukina baka je šest puta starija od njega. Baka i Luka zajedno imaju 77 godine. Koliko godina ima svatko od njih?
21. Dva para cipela stoje 680.98 kn. Jedan par stoji 99.12 kn više nego drugi. Koliko stoji svaki par cipela?
22. Lucija i Ana su zajedno uštedjele 632.50 kn. Ana je uštedjela 35.50 kn više od četverostrukog iznosa Lucijine ušteđevine. Koliko je uštedjela svaka djevojčica?
23. U 8.a razredu ima 28 učenika. Djevojčica ima za 2 manje nego dječaka. Koliko je djevojčica, a koliko dječaka u tom razredu?
24. Na nekom natjecanju iz matematike bilo je deset zadataka. Za svaki točno riješen zadatak učenik dobiva 10 bodova. Za svaki netočno riješen ili neriješen zadatak gubi 5 bodova. Ako je učenik dobio 40 bodova, koliko je zadataka točno riješio?
25. Brat i sestra zajedno su uštedjeli 4326 kn. Koliko je uštedio svaki od njih, ako je sestrina ušteđevina pet puta veća od bratove?
26. Zbroj dvaju brojeva je 130. Ako veći broj podijelimo s manjim, dobit ćemo količnik 2 i ostatak 28. Koji su to brojevi?
27. Kolika je površina pravokutnika čiji je opseg

30 dm ako je duljina kraće stranice 2 puta manja od duljine veće stranice?

28. Sanduk s jabukama ima masu 85 kg. Same jabuke imaju masu za 65 kg veću od sanduka. Koliku masu ima sanduk, a koliku jabuke?
29. Zbroj dvaju brojeva je 22, a njihova razlika 8. koji su to brojevi?
30. Luka i Matija zajedno imaju 280 kn. Kad Luka potroši $\frac{3}{4}$ svojeg novca, a Matija $\frac{2}{3}$ svojeg imat će jednako. Koliko je novaca imao svaki dječak?
31. Zbroj dvaju brojeva iznosi 37.29. Jedan broj veći je od drugog 2.3 puta. Koji su to brojevi?
32. Razlika dvaju brojeva jednaka je 6.1. Jedan od brojeva manji je od drugog 1.5. puta. Koji su to brojevi?
33. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 12. Ako znamenke zamijene mjesta, dobiva se broj veći za 18. Koji je to broj?
34. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 11. Ako tom broju dodamo 63, dobit ćemo dvoznamenkasti broj zapisan istim znamenkama, ali obrnutog poretka od polaznog. Koji je to broj?
35. Broj desetica nekog dvoznamenkastog broja upola je manji od broja jedinica. Ako tom broju dodamo zbroj njegovih znamenaka, dobit ćemo broj 60. Koji je to broj?
36. Nazivnik razlomka je za 5 veći od brojnika. Ako brojniku dodamo 14, a od nazivnika oduzmemo 1, dobit ćemo razlomak recipročan zadanom. Koji je to razlomak?
37. Brojnik nekog razlomka je za 3 manji od nazivnika. Dodamo li brojniku i nazivniku broj 5, dobit ćemo razlomak $\frac{3}{4}$. Koji je to razlomak?
38. 6 vrećica Frutolina i 7 vrećica Čokolina zajedno stoje 185.99 kn. 8 vrećica Frutolina i 8 vrećica Čokolina zajedno stoje 212.56 kn. Koliko stoji jedna vrećica Frutolina, a koliko jedna vrećica Čokolina?
39. 5.5 kg jabuka i 3.5 kg marelica treba platiti 69.50 kn . 7 kg jabuka i 7 kg marelica treba platiti 119 kn. Kolika je cijena jednog kilograma jabuka, a kolika jednog kilograma marelica?
40. Buket s pet ruža i četiri tulipana stoji 76.50 kn. Buket sa sedam ruža i 5 tulipana stoji 100.50 kn. Kolika je cijena jedne ruže, a kolika jednoga tulipana?
41. Koliko litara alkohola jakosti 60% treba pomiješati s alkoholom jakosti 30% da se dobije 60 litara jakosti 50%?
42. Djed je 50 godina stariji od svoje unuke. Prije 5 godina djed je bio 6 puta stariji od unuke. Koliko godina ima unuka, a koliko djed?
43. U dvije kutijice nalaze se bomboni. U prvoj je kutijici 8 bombona manje nego u drugoj. Ako iz prve kutijice premjestimo 4 bombona u drugu, u drugoj će ih biti dvostruko više nego u prvoj. Koliko je bombona bilo u svakoj kutijici?
44. Luka je račun za mobitel u prosincu i siječnju platio 270 kn. Koliki je bio siječanjski račun ako znamo da je za 20% manji od prosinačkog?
45. Ana je za proslavu rođendana kupila 5 boca soka i 4 pizze, što je platila 180 kn. Da je kupila 2 soka više i 3 pizze više, platila bi 294 kn. Kolika je cijena jedne pizze i jednoga soka?
46. Maja zadaje zadatak Luki: "Zamislila sam dva broja. Prvi je za 3 manji od drugoga. Kad se prvi pomnoži s 4 pa od umnoška oduzme 18, dobije se drugi broj." Koje je brojeve Maja zamislila?
47. U tvornici radi 4158 muškaraca i žena. Broj žena je 65% broja muškaraca. Koliko žena radi u toj tvornici?
48. Riječni parobrod treba za 60 km dugačak put uzvodno 4 sata i 10 min, a nizvodno 2 sata 40 min. Kolika je brzina parobroda, a kolika rijeke?
49. Dvije zgrade zajedno imaju 28 prozora. Na prvoj je 4 prozora manje nego na drugoj. Koliko prozora ima svaka zgrada posebno?
50. U dvije omotnice je 3016 kn. Ako se iz svake omotnice izvadi 248 kn u prvoj će biti 9 puta više novca nego u drugoj. Koliko je bilo novca u svakoj omotnici?
51. Na pilani je bilo 70 stalnih i povremenih radnika. Sljedeće godine broj stalnih radnika povećao se tri puta, a povremenih dva puta. Tada je na pilani bilo 165 radnika. Koliko je bilo stalnih, a koliko povremenih radnika na početku?
52. U dvije prostorije je 18 ljudi. Prijeđe li iz jedne prostorije u drugu njih troje, onda je društvo

raspolovljeno. Koliko je ljudi bilo na početku u svakoj prostoriji?

53. U cirkusu je prodano 225 skupljih karata i 456 jeftinijih karata. Zarađeno je 34 020 kn. Koliko je stajala skuplja, a koliko jeftinija karta ako je cijena skuplje karte za 15 kn veća od cijene jeftinije karte?

54. Škola je kupila ukupno 150 kg špinata i krumpira. Koliko je bilo špinata, a koliko krumpira ako je cijena 1 kg špinata 13 kn, 1 kg krumpira 16 kn, a cijeli je račun iznosio 2319 kn?

55. Koliko treba uzeti 30-postotnog alkohola, a koliko 40-postotnog alkohola da bi se dobilo 20 litara 35-postotnog alkohola?

56. Koliko treba uzeti 60-postotnog alkohola, a koliko 20-postotnog alkohola da bi se dobilo 40 litara 58-postotnog alkohola?

57. Koliko treba uzeti 20-postotne kiseline, a koliko 40-postotne kiseline da bi se dobilo 30 litara 27-postotne kiseline?

58. Koliko treba uzeti 25-postotnog srebra, a koliko 35-postotnog srebra da bi se dobilo 300 grama 32-postotnog srebra?

59. Dva majstora dijele zaradu u omjeru 3 : 5. Koliko je dobio svaki ako račun iznosi 2568 kn?

60. Rastavi 12789 na dva pribrojnika čiji je omjer 1 : 8.

61. Da bi se dobila neka slitina treba pomiješati dva metala u omjeru 5 : 12. Koliko pojedinog metala treba za 170 kg te slitine?

62. Riješi sustave

a) $\frac{1x+7}{4}-\frac{y-7}{6}=2$
$\frac{x+3}{12}-\frac{y-10}{9}=0$

b) $3y-\frac{2x+3y}{4}=x-6$
$\frac{3x-2y}{4}=\frac{3y+2x}{8}+2$

c) $3(x-y)=5(x+3)-13$
$2(2x-3y-10)=5(y+2)$

63. Riješi sustave

d) $\frac{x-2y}{3}-x=\frac{y+2}{2}$
$\frac{x+y}{3}-2.5=\frac{y}{2}$

e) $\frac{3(8x+y)}{16}=x-3(3-x)$
$\frac{9}{2}x-\frac{y-x}{2}=19$

f) $0.5x-\frac{y-4}{5}=0.3x-\frac{y-4}{2}$
$0.5y-\frac{x-4}{6}=\frac{7y}{12}-\frac{x-3}{3}$

64. Riješi sustave

g) $\frac{y}{2}-\frac{x+y}{5}=0.1$
$\frac{y}{5}-\frac{x-y}{2}=0.1$

h) $\frac{1-x}{5}+\frac{2y-1}{6}=\frac{1}{2}$
$\frac{5+x-3y}{7}=x-y+1$

i) $x-\frac{1}{2}(2y-1)+2.5=0$
$y-\frac{x-y}{3}=2$

65. a) $\frac{3x-2y}{4}=-4$
$\frac{x+4y}{5}=\frac{1}{3}$

b) $\frac{-6+5x}{4y-7}=\frac{8}{10}$
$\frac{2y+10}{3x-2}=4$

c) $\frac{-6x+5y}{8}=2$
$\frac{-2x-y}{3}=-4$

66. a) $\frac{3-2x}{3}+\frac{8-y}{2}=1$
$\frac{7+2y}{5}-\frac{3+5x}{6}=0$

b) $\frac{2x+6}{10}+\frac{-5+y}{4}=5$
$\frac{x+5}{2}-\frac{y-8}{3}=3$

c) $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{3}=8$
$\frac{x+y}{3}-11=\frac{-x+y}{4}$

8.6. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

1. Navedi primjer neke linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom.
2. Navedi primjer neke linearne jednadžbe s dvije nepoznanice.
3. Navedi primjer nekoga sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice.
4. Što je rješenje dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice?
5. Pročitaj koeficijente uz x u ovom sustavu: $2x + 2y = -6$; $3x + 7y = -17$
6. Pročitaj koeficijente uz y u ovom sustavu: $4x - 8y = -20$; $-3x - 5y = -7$
7. Opiši metodu supstitucije.
8. Opiši metodu suprotnih koeficijenata.
9. Koju bi metodu upotrijebio za rješavanje ovoga sustava i zašto?
   $4x + y = 10$
   $2x - 3y = -9$
10. Koju bi metodu upotrijebio za rješavanje ovoga sustava i zašto?
   $3x - 3y = 9$
   $4x + 3y = -2$

Zadaci za ponavljanje:

1. Nacrtaj rješenja ovih sustava u koordinatnom sustavu u ravnini, spoji ih i dobit ćeš jedan lik.
   A $2x + 2y = -6$; $3x + 7y = -17$;
   B $3x - 5y = 13$; $4x + 8y = -12$;
   C $3x - 6y = 3$; $-2x + 7y = -2$;
   D $10x - 5y = 40$; $-3x + 2y = -12$;
   E $x + 3y = 7$; $4x - 3y = -2$;
   F $5x - 4y = 7$; $4x - 2y = 8$;
   G $6x - y = 2$; $x + 7y = 29$;
   H $4x + 2y = 16$; $-3x + 9y = 30$;
   I $x + y = 6$; $x + 2y = 12$;
   J $-9x + 3y = 30$; $6x - 4y = -28$;
   K $7x - 14y = -63$; $2x - 5y = -22$;
   L $x - 3y = -9$; $4x + 2y = -8$;
   M $4x - 8y = -20$; $-3x - 5y = -7$;
   N $-10x + 5y = 40$; $2x + 2y = -8$;
   P $-11x + 2y = 11$; $3x - y = -3$;
2. Nacrtaj rješenja ovih sustava u koordinatnom sustavu u ravnini, spoji ih i dobit ćeš jedan lik.
   A $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = -2$; $x + y = -5$;
   B $0.2x + 0.3y = -0.7$; $1.3x + 2.2y = -5.3$;
   C $\frac{1}{5}x + 2y = 7$; $2x + \frac{1}{3}y = 11$;
   D $x - y = 0$; $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}y = -\frac{5}{6}$;
   E $2(x - 3) + y = -5$; $3x - 2(y + 2) = -20$;
   F $3x + 2y - 4x - 9 = 5 - 2y$; $5y - 4x = 23$;
   G $y + x = 5$; $x - y = -1$;
3. Provjeri je li zadani uređeni par rješenje sustava:
   a) $(2, -2)$;
   $2x + 3y = -2$
   $3x - 3y = 10$;
   b) $(0, -1)$;
   $x + y = -1$
   $x - 2y = 2$;
   c) $(3, -3)$;
   $3x + 4y = -3$
   $x - \frac{1}{3}y = 4$;
   d) $(1, -1)$;
   $\frac{1}{6}x + \frac{1}{5}y = 11$
   $x - y = 2$.
4. Provjeri je li zadani uređeni par rješenje sustava:
   a) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$;
   $x - y = -\frac{1}{4}$
   $x + y = \frac{1}{4}$;
   b) $(0.2, -\frac{1}{2})$;
   $2x + 2y = 5$
   $-x + 3y = -0.5$

c) $(-2, \frac{5}{6})$;
$\frac{1}{3}x + 6y = 4\frac{1}{3}$
$x + 2y = -\frac{1}{3}$;

d) $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$;
$3x + 3y = -3$
$2x - y = 1$.

5. Riješi metodom supstitucije

a) $2x = 0$
$4x + 6y = 12$

b) $2y - 12 = 0$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 4$

c) $x + y = 8$
$x - 3y = 4$

d) $3x - y = 8$
$4x + 6y = 40$

6. Riješi metodom supstitucije

a) $2.5x + 2y = -4$
$-5x - 6y = 7$;

b) $1.5x - 1.5y = 1$
$-2x + 3y = -\frac{5}{3}$;

c) $\frac{2}{3}x + 1y = 3$
$3x - 2y = -19$;

d) $\frac{2}{9}x - \frac{1}{3}y = 1$
$3x - 2y = -19$;

7. Riješi metodom supstitucije

a) $2x - 3y = \frac{3}{4}$
$\frac{1}{2}x - 4y = 1$;

b) $2x - 3y = 9.5$
$0.2x + 2y = 1\frac{1}{3}$;

c) $x + \frac{3}{2}y - 10 = 0$
$6x - 2y - 16 = 0$;

d) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y = \frac{15}{4}$
$\frac{1}{2}x + \frac{2}{6}y = \frac{9}{2}$;

8. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata

a) $x + y = 13$
$x - y = -3$;

b) $2x + 3y = 7$
$2x - y = 3$;

c) $2x - 3y = 5$
$-4x + y = -5$;

d) $6x + y = 15$
$3x + 2y = 18$;

9. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata

a) $x - 4y + 22 = 0$
$\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}y - 17 = 0$;

b) $0.6x - y + 3 = 0$
$6x - 3.5y - 9 = 0$;

c) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 1$
$7x - 7y = 0$;

d) $\frac{2}{7}x - y = -6$
$\frac{3}{4}x + 2y = 12$;

10. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata

a) $x + 1.5y - 1 = 0$
$0.6x + y - 0.4 = 0$;

b) $8x - 13.5y = 10$
$x - 3.6y = -6.4$;

c) $\frac{3}{4}x + 20y = 95$
$\frac{8}{25}x - 25y = 7$;

d) $2x + \frac{3y}{2} = 1\frac{1}{2}$
$\frac{4x}{3} - 3y = -\frac{1}{3}$;

11. Riješi sustave metodom po želji

a) $2x - 3y = 5$
$4x + 5y = -1$;

b) $x + y = 13$
$2x - y = 12.5$;

c) $4x - 7y = \frac{8}{3}$
$3x + 0.5y - 2 = -y$;

d) $2(3x + y) + 2 - 3(x + 5y) = -9$
$3(x - 7y) + 33 - 2(5x - 9y) = -8$;

12. Svedi sustave na standardni oblik i riješi metodom kojom brže dobiješ rješenje

a) $x + 2y = 8 - y$
$2x - 4y = 6$;

b) $x : y = 1 : 2$
$5x - 4y = -30$;

c) $x : y = 3 : 4$
$(x + 1) : (y - 1) = 2 : 5$;

d) $\frac{x}{2} - y = 2$

$\frac{5y}{3} = \frac{2x}{3} - y$;

e) $x - (y - \frac{2}{3}y) - 5 = -\frac{2}{3}x$

$4x - 3(2y - x) = 3 \cdot 6 - 4y$;

f) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} - 1 = 0$

$\frac{x}{12} - \frac{y}{6} = 0$;

g) $3(2x + y) - 8 = 2(x + 3y)$

$2(x - y + 1) - 18 = -3(2x + 3y)$;

h) $\frac{1}{3}(2x - y) - \frac{1}{6}(x + y) = -\frac{1}{2}$

$x + 2y = 14$;

13. Ako prvi član nekog omjera uvećamo, a drugi član tog omjera umanjimo za 4, vrijednost omjera biti će 7. A ako prvi član uvećamo za 5, a drugi za 3, vrijednost tog omjera će biti 1. Koji je prvi, a koji drugi član tog omjera?
14. U razredu od 32 učenika je trostruko više dječaka nego djevojčica. Koliko je dječaka, a koliko djevojčica u tom razredu?
15. Vrećica od 10 dag sušenih smokava košta 14 kn. Sama vrećica je za 10.5 kn jeftinija od smokava. Koliko koštaju smokve bez vrećice?
16. Ana ima 12 knjiga manje nego Maja. Zajedno imaju 224 knjige. Koliko knjiga ima Ana, a koliko Maja?
17. Majina mama je 4 puta starija od Maje, a za 22 godine će biti dvostruko starija. Koliko godina imaju Majina mama i Maja sada?
18. Lukin bratić je tri puta stariji od Lukine sestrične. Za 4 godine će biti dva puta stariji od nje. Koliko godina imaju Lukini bratić i sestrična?
19. Opseg pravokutnika je 26 cm. Duljina jedne stranice je za 3 cm veća od duljine druge stranice. Kolike su duljine stranica? Kolika je površina tog pravokutnika?
20. Opseg jednakokračnog trokuta je 16 cm, a osnovica se prema kraku odnosi kao 2 : 3. Kolike su stranice trokuta?
21. U jednakokračnom trokutu je kut nasuprot osnovice i kut uz osnovicu odnose se kao 2 : 5. Koliki su unutarnji kutovi tog trokuta?
22. Tijekom ljeta Ana je radila 8 puta više dana nego Luka. Ukupno su radili 27 dana. Koliko dana je radio svatko od njih?
23. Na nekom natjecanju iz matematike bilo je 25 zadataka. Za svaki točno riješeni zadatak učenik dobiva 10 bodova. Za svaki netočno riješen ili neriješen zadatak gubi 5 boda. Ako je učenik dobio 130 bodova, koliko zadataka je točno riješio?
24. Brat i sestra zajedno su uštedjeli 750 kn. Koliko je uštedio svaki od njih, ako je sestrina ušteđevina peterostruko veća od bratove?
25. Sanduk s jabukama ima masu 10.7 kg. Same jabuke imaju masu za 8.3 kg veću od sanduka. Koliku masu ima sanduk, a koliku jabuke?
26. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 10. Ako znamenke zamijene mjesta dobiva se broj veći za 18. Koji je to broj?
27. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 7. Ako znamenke zamijene mjesta dobiva se broj veći za 27. Koji je to broj?
28. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 9. Ako znamenke zamijene mjesta dobiva se broj manji za 63. Koji je to broj?
29. Ako brojnik i nazivnik nekog razlomka uvećamo za 4, dobit ćemo $\frac{7}{8}$, a ako brojnik tog razlomka uvećamo dvostruko, a nazivnik umanjimo za 3 dobit ćemo 6. Koji je to razlomak?
30. Omjer dva broja je 5 : 6. Ako prvi uvećamo za 4, a drugi umanjimo za 1, omjer im je 9 : 5. Koji su to brojevi?
31. Zbroj dva broja je 17. Ako ta dva broja podijelimo dobijemo količnik 2 i ostatak 2. Koji su to brojevi?
32. Razlika dva broja je 19. Ako ta dva broja podijelimo dobijemo količnik 3 i ostatak 3. Koji su to brojevi?
33. 3.6 kg krušaka i 2.4 kg banana treba platiti 46.74 kn. 2.2 kg krušaka i 0.8 kg banana treba platiti 24.57 kn. Kolika je cijena jednog kilograma krušaka, a kolika jednog kilograma banana?
34. U tvornici radi 45 muškaraca i žena. Broj žena i broja muškaraca su u omjeru 2 : 3. Koliko žena radi u toj tvornici?

35. Luka je račun za mobitel u prosincu i siječnju platio 175 kn. Koliki je bio siječanjski račun, ako znamo da je za 25% manji od prosinačkog?
36. Koliko treba uzeti 24-postotnog alkohola, a koliko 63-postotnog alkohola da bi se dobilo 15 litara 50-postotnog alkohola?
37. Koliko treba uzeti 32-postotnog srebra, a koliko 61-postotnog srebra da bi se dobilo 145 grama 42-postotnog srebra?
38. Da bi se dobilo neku slitinu treba miješati dva metala u omjeru 7 : 9. Koliko kojeg metala treba za 80 g te slitine?
39. Da bi se dobilo neku slitinu treba miješati dva metala u omjeru 11 : 19. Koliko kojeg metala treba za 180 kg te slitine?
40. Stolar je prerezao dasku koja je dugačka 15.8 m na dva dijela. Jedan komad je za 3.2 m kraći od trostruke duljine drugog komada. Koliko je dugačak svaki komad daske?

Igre

Zagonetni lik

Zajednički nacrtajte neki lik u koordinatnoj ravnini i odredite koordinate točaka koje ga određuju. Smislite sustave čija rješenja će biti baš te točke. Igru može igrati grupa učenika. Nakon zadavanja sustava grupe razmjenjuju zadatke i rješavaju ih.

Slučajni sustav

Svaki član para smisli jednu linearnu jednadžbu s dvije nepoznanice, pa zatim zajednički rješavaju dobiveni sustav. Igru mogu igrati parovi učenika. Nakon zadavanja parovi mogu međusobno razmijeniti zadatke.

Primjerak oglednog testa:

1. Riješi metodom zamjene (supstitucije)

   $x + y = 7$

   $4x + 12y = 36.$

2. Riješi metodom suprotnih koeficijenata

   $-3x - 5y = -1$

   $3x - 2y = 8.$

3. Riješi sustave

   a) $3x + 2y = 11$

   $5x + 3y = 19;$

   b) $2x - 2y = 16$

   $4x + 7y = 43.$

4. Provjeri je li uređeni par (2, −1) rješenje sustava

   $2x + 3y = 1$

   $-7x - 8y = -6.$

5. Opseg pravokutnika je 28 cm, jedna stranica je za 6 cm duža od druge. Kolike su duljine stranica tog pravokutnika? Izračunaj njegovu površinu.

6. Koliko treba uzeti 50-postotnog alkohola, a koliko 30-postotnog alkohola da bi se dobilo 50 litara 38-postotnog alkohola?

7. Luka je kupio 5 kg krumpira i 2.5 kg salate i platio 47.5 kn. Maja je kupila 2 kg krumpira i 4.5 kg salate i platila 47 kn. Kolika je cijena 1 kg krumpira, a koliko 1 kg salate?

8. Spomenik mase 2150 kg izrađen je do bronce koja je slitina bakra i kositra u omjeru 47 : 3. Kolika je masa svake kovine u spomeniku?

9. Linearna funkcija i jednadžba pravca

Linearna funkcija prva je funkcija s kojom se susrećete. Funkcije u matematici zauzimaju važno mjesto. Pomoću funkcija matematičari objašnjavaju razne pojave iz prirode i događanja u svakodnevnom životu. Poznavanje **funkcija** omogućava predviđanje promjena u svakodnevnom životu. U proučavanju raznih funkcija važno mjesto ima koordinatni sustav. Prikazivanje funkcija u koordinatnom sustavu omogućuje povezivanje brojeva s grafičkim prikazom.

Latinski *linea* znači **pravac**, a u ovoj ćeš cjelini i ti naučiti zašto je linearna funkcija dobila baš takvo ime.

Važni pojmovi

linearna funkcija
vrijednost funkcije
graf linearne funkcije
eksplicitni oblik jednadžbe pravca
nul-točka
nagib pravca
rastuća funkcija
padajuća funkcija
pravac
nagib pravca
usporednost pravaca
presjek pravaca
sjecište
koordinate sjecišta

U ovom ćeš poglavlju, primjerice, naučiti:

- Što je linearna funkcija
- Kako nazivamo koeficijente linearne funkcije i koje je njihovo značenje
- Nacrtati pravac
- Prepoznati usporedne pravce po njihovoj jednadžbi
- Kako odlučiti koja je ponuda majstora, prijevoznika ili telefonske kompanije povoljnija
- Kako bez rješavanja znati koji sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice ima rješenje, a koji ga nema

Brzinski zadaci za ponavljanje:

1. Što je pravokutni koordinatni sustav u ravnini i koji su njegovi dijelovi?
2. U koordinatnom sustavu ucrtaj točke $A(1, 2)$, $B(-2, 4)$, $C(-3, -2)$ i $D(3, -4)$.
3. Odredi u kojem se kvadrantu nalazi pojedina točka iz prethodnog zadatka.
4. Maja je u kasicu ubacivala kovanice od 5 kn. Izračunaj koliko novca ima u kasici ako je u njoj: 5, 10 ili 100 kovanica.
5. 1 kg krumpira treba platiti 2 kn. Koliko treba platiti: 2, 3 i 4 kg krumpira? Nacrtaj grafički prikaz te proporcionalnosti.
6. Riješi linearne jednadžbe:
   a) $2x - 4 = 0$; b) $-3x + 9 = 0$: c) $\frac{4}{3}x + 2 = 0$.

9.1. Linearna funkcija

Bilježnice

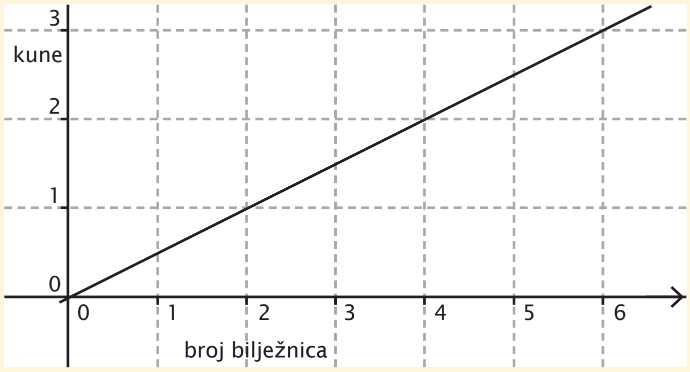
Grafički prikaz pokazuje koliko treba platiti za određeni broj bilježnica. Uz pomoć tog grafičkog prikaza odgovori na ova pitanja:

a) Koliko treba platiti za 3 bilježnice?

b) Koliko treba platiti za 4 bilježnice?

c) Kolika je cijena jedne bilježnice?

d) Koliko bilježnica se može kupiti za 3 kn?



Za opisivanje veza između raznih veličina matematičari upotrebljavaju **funkcije**. Primjere funkcija upoznali ste kad ste učili o proporcionalnim i obrnuto proporcionalnim veličinama, postotnom i kamatnom računu. U matematici postoji puno različitih funkcija, no njima se ne bave samo matematičari, nego i fizičari, ekolozi, programeri i mnogi drugi stručnjaci i znanstvenici. Upoznavanje s funkcijama počinjemo linearnom funkcijom, a ostale funkcije učit ćete u daljnjem školovanju.

Z a d a c i

1. Napiši nekoliko primjera vrijednosti obiju veličina za ove funkcije
   a) Svakoj europskoj državi pridruži njezin glavni grad;
   b) Svakom učeniku 7. razreda pridruži njegovu ocjenu iz matematike na kraju 6.r;
   c) Svakom prirodnom broju pridruži dvostruko veći broj;
   d) Svakom prirodnom broju pridruži njegov umnožak sa samim sobom (tj. njegov kvadrat).
2. Smisli nekoliko primjera funkcija kao što su u 1. zadatku
3. 5 kg jabuka plaćeno je 30 kn.
   a) Izračunaj koeficijent proporcionalnosti;
   b) Zapiši vezu između iznosa računa i kupljene količine jabuka;
   c) Koliko treba platiti za 7 kg jabuka?
4. Neki posao 6 radnika može završiti za 10 dana.
   a) Izračunaj koeficijent obrnute proporcionalnosti;
   b) Zapiši vezu između vremena trajanja posla i broja radnika;
   c) Za koliko dana taj posao može završiti 3 radnika?

Primjer 1. Taksi prijevoz

Početna cijena vožnje taksijem u Dubrovniku je 25 kn i još 8 kn po kilometru vožnje. Izračunaj cijene vožnje za zadane udaljenosti od dubrovačke zračne luke Ćilipi.

	Udaljenost	Cijena
Cavtat	7 km	
Vrata od Ploča	10 km	
Luka Gruž	18 km	
Lapad	21 km	

Rješenje:

Da bismo izračunali cijenu prijevoza, trebamo broj kilometara pomnožiti s 8 i umnošku dodati 25.

	Udaljenost	Cijena
Cavtat	7 km	$8 \cdot 8 + 25 = 89$ kn
Vrata od Ploča	10 km	$10 \cdot 8 + 25 = 105$ kn
Luka Gruž	18 km	$8 \cdot 8 + 25 = 169$ kn
Lapad	21 km	$21 \cdot 8 + 25 = 193$ kn

Formula funkcije

$y = 8x + 25$

Označimo li sa x udaljenost, a s y cijenu prijevoza, možemo izračun cijene zapisati formulom $y = 8x + 25$. Kažemo da smo cijenu prijevoza y prikazali kao funkciju od broja prijeđenih kilometara x.

Uoči da je cijena prijevoza veća što je veći broj prijeđenih kilometara. Za svaki sljedeći prijeđeni kilometar cijena poraste za 8 kn. Kažemo da cijena linearno ovisi o broju prijeđenih kilometara.

Po toj formuli možemo računati cijenu prijevoza za bilo koju udaljenost. Možemo izračunati vrijednost y i ako je x negativni racionalan broj, no s obzirom na zadatak to ne bi imalo smisla.

Primjer 2. Telefoniranje

Luka ima na štednoj knjižici 2500 kn. Odlučio je dio tog novca potrošiti za vrijeme ljetovanja, i to svaki dan 50 kn. Formulom zapiši izračun za preostali iznos Lukine ušteđevine

Rješenje:

Označimo sa x – broj dana ljetovanja, a sa y – iznos ušteđevine.

Vrijedi $y = 2500 - 50x$ ili $y = -50x + 2500$.

Iznos ušteđevine prikazali smo kao funkciju broja dana ljetovanja. Uoči da je iznos ušteđevine manji što je više dana Luka proveo na ljetovanju. Za svaki dan ljetovanja taj se iznos umanjuje za 50 kn. Kažemo da ušteđevina linearno ovisi o broju dana provedenih na ljetovanju.

Primijetimo da funkcije u primjerima 1 i 2 imaju zajednički oblik. Takav oblik funkcije općenito zapisujemo ovako: $f(x) = ax + b$ ili $y = ax + b$. Funkcije takva oblika nazivamo linearnim funkcijama. Linearne funkcije su primjerice:

$f(x) = 5x + 6$

$f(x) = 7x - 2$

$f(x) = -4x + 3.5$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3.6$.

Linearna funkcija

$f(x) = ax + b$

Važno

Linearna funkcija zadana je formulom ***f(x) = ax + b***, gdje su *a, b, x* i *f(x)* racionalni brojevi. Brojeve *a* i *b* nazivamo koeficijentima linearne funkcije. Broj *x* nazivamo **argument funkcije**, a broj *f(x)* **vrijednost funkcije**. Pritom *f(x)* označava da je vrijednost funkcije ovisna o vrijednosti argumenta *x*.

Linearnu funkciju često zapisujemo i formulom ***y = ax + b.***

Zadaci

Napiši formule za zadane linearne funkcije.

5. Za račun za struju naplaćuje se stalna naknada 15 kn te 0.25 kn po potrošenom kW struje.
6. Taksi služba naplaćuje početnih 15 kn te 9 kuna po prijeđenom kilometru.
7. Za autobusni prijevoz plaća se naknada 200 kn te 30 kn po osobi.
8. Foto studio naplaćuje 15 kn razvijanje filma te 1.50 kn po fotografiji.
9. Telefonska kompanija naplaćuje pretplatu prema odabranoj brzini za povezivanje s internetom te određeni iznos po svakom GB prometa. Napiši formulu za izračun cijene računa za internet za svaki od ponuđenih paketa.

Paket	Brzina	Pretplata	Iznos po GB prometa
Surf	1024/192 Kbps	79.00 kn	20 kn
Giga	2048/256 Kbps	199.00 kn	11 kn
Flat	3072/384 Kbps	369.00 kn	0 kn

Primjer 3.
Izračunavanje vrijednosti funkcije

Izračunaj vrijednosti linearne funkcije
f(x) = 5x - 9 za ove vrijednosti argumenta:

a) x = 0;

b) x = -2;

c) x = 4.6;

d) $x=\frac{3}{4}$.

Rješenje:

Vrijednost funkcije

f(0) = 5 · 0 - 9 = 0 - 9 = -9;

f(-2) = 5 · (-2) - 9 = -10 - 9 = -19;

f(4.6) = 5 · 4.6 -9 = 23 - 9 = 14;

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=5\cdot\frac{3}{4}-9=\frac{15}{4}-9=\frac{15-36}{4}=-\frac{21}{4}.$$

Z a d a c i

10. Izračunaj vrijednosti linearnih funkcija (tablicu precrtaj u bilježnicu):

a) $f(x) = 3x + 1$;

x	f(x)
-3	
-2	
0	
2	
3	

b) $f(x) = 2x - 4$;

x	f(x)
-5	
-1	
1	
4	
6	

c) $f(x) = -4x + 5$;

x	f(x)
-4.5	
-2	
0.6	
2.5	
3.9	

d) $f(x) = -x - 2.5$;

x	f(x)
-10	
-5	
2	
10	
30	

e) $f(x)=\frac{1}{2}x-10$;

x	f(x)
-10	
-2	
$\frac{3}{4}$	
1	
4	

f) $f(x)=-\frac{2}{3}x+1$

x	f(x)
-18	
$-\frac{3}{2}$	
0	
$\frac{3}{5}$	
3	

11. Za autobusni prijevoz plaća se naknada 50 kn te 25 kn po prijeđenom kilometru.
Izračunaj koliko treba platiti za put duljine: 20 km, 50 km, 100 km, 500 km.

12. Fotostudio naplaćuje 10 kn razvijanje filma te 2.50 kn po fotografiji.
Izračunaj koliko treba platiti za izradu filma s: 12, 24 i 36 fotografija.

13. Telefonska kompanija zaračunava pretplatu 69 kn te 0.45 kn po minuti razgovora.
Izračunaj koliki će biti telefonski račun za: 120, 400, 1200, 10 000 minuta razgovora.

14. Frizerka dobiva plaću 1000 kn plus 10 kn po svakom šišanju.
Izračunaj koliku plaću dobiva ako je napravila 50 šišanja.

15. Prodavač na tržnici prodaje krumpir po cijeni 3 kn za 1 kilogram. Za svoje mjesto na tržnici treba platiti “placovinu” 200 kn.
Kolika će biti njegova zarada ako proda:

a) 300 kg krumpira;

b) 100 kg krumpira;

c) 1 tonu krumpira;

d) 500 kg krumpira?

Primjer 4. Izračunavanje argumenta funkcije

U rent-a-caru iznajmljivanje automobila naplaćuju 500 kn plus 4.5 kn po prijeđenom kilometru. Koliki se put može prijeći za 1625 kn?

Rješenje:

Najprije formulom zapišimo zadanu linearnu funkciju. x – broj kilometara, $f(x)$ – iznos koji treba platiti.

$$f(x) = 4.5x + 500$$

Zadan nam je iznos koji treba platiti, dakle $f(x) = 1625$ kn. Uvrstimo li u formulu funkcije umjesto $f(x) = 1625$, dobivamo linearnu jednadžbu koju rješavamo na uobičajen način.

$1625 = 4.5x + 500$

$-4.5x = 500 - 1625$

$-4.5x = -1125 \;/ : (-4.5)$

$x = 250.$

Dakle za navedeni iznos možemo unajmiti auto za put dug 250 km.

Zadaci

16. Taksi služba naplaćuje početnu cijenu 30 kn te 6 kn po prijeđenom kilometru. Koliko kilometara možemo prijeći u jednoj vožnji za 480 kn?
17. Maja je za rođendan dobila 475 kn. Namjerava taj novac potrošiti na skijanju i to 75 kn dnevno. Za koliko će se dana skijanja Majina ušteđevina smanjiti na 100 kn?
18. Telefonska kompanija Petar Pan zaračunava pretplatu 50 kn te 0.25 kn po minuti razgovora. Telefonska kompanija Zvončica ne naplaćuje pretplatu, a po minuti razgovora naplaćuje 1 kn.
    a) Za obje ponude formulom prikaži iznos računa ($f(x)$) ovisno o broju minuta razgovora (x);
    b) Izračunaj koliko je minuta razgovora uključeno u cijenu računa od 100 kn za obje kompanije.
19. Slastičar Nikola dobio je ponudu za posao. Slastičarna Kremšnita nudi mu 1000 kn plus 2 kn po svakoj prodanoj kremšniti. Koliko kremšnita treba prodati da bi dobio plaću 2000 kn?
20. U rent-a-caru Papiga iznajmljivanje automobila naplaćuju 150 kn plus 15 kn po danu unajmljivanja. Lukin tata ima na raspolaganju 495 kn. Na koliko dana može unajmiti automobil?
21. Majstor Karlo naplaćuje svoj dolazak 60 kn te svaki sat rada 40 kn. Koliko je trajao posao ako je majstor ispostavio račun na 380 kn?
22. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = 0.6x - 4.3$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) -4.3; b) -1.3; c) 10.7.
23. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = -3x - 9$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) 0; b) -12; c) -16.5.
24. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = 6x + 3.6$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) 0; b) 33.6; c) -16.8.
25. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = -\frac{3}{4}x + 5$.
    Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) 0; b) 2; c) $\frac{17}{4}$.
26. Vodoinstalater naplaćuje svoj dolazak 65 kn, te svaki sat rada 50 kn.
    a) Zapiši formulom ovisnost iznosa njegove zarade o broju radnih sati;
    b) Koliko treba platiti izradu vodoinstalacija ako je posao trajao 6 sati;
    c) Koliko dugo vodoinstalater treba raditi da bi zaradio 565 kn?
27. U bazenu je 9000 l vode. Tijekom jednog sata iz njega se ispusti 150 l vode.
    a) Zapiši formulom ovisnost količine vode u bazenu o broju sati pražnjenja bazena;
    b) Koliko će vode biti u bazenu nakon10 sati pražnjenja;
    c) Koliko je vremena potrebno da se bazen isprazni?
28. Pizza-majstor dobiva plaću 1500 kn plus 8 kn po svakoj prodanoj pizzi.
    a) Zapiši formulom ovisnost njegove zarade o broju prodanih pizza;
    b) Koliku plaću dobiti će ako se proda 100 pizza;
    c) Koliko pizza mora prodati da bi dobio plaću 3420 kn?
29. Prodavač na tržnici prodaje jabuke po cijeni 4.5 kn za 1 kilogram. Za svoje mjesto na tržnici treba platiti “placovinu” 500 kn.
    a) Zapiši formulom ovisnost njegove zarade o prodanoj količini jabuka;
    b) Koliko jabuka mora prodati da bi nadoknadio plaćenu “placovinu”;
    c) Koliko će zaraditi ako proda 350 kg jabuka?

Vježbalica

1. Napiši formule za zadane linearne funkcije:
   a) Za račun za struju naplaćuje se stalna naknada 14 kn te 0.26 kn po potrošenom kW struje;
   b) Taksi služba naplaćuje početnih 12 kn te 10 kuna po prijeđenom kilometru;
   c) Za autobusni prijevoz plaća se naknada 250 kn te 25 kn po osobi;
   d) Foto studio naplaćuje 10 kn razvijanje filma te 1.70 kn po fotografiji;
   e) Za autobusni prijevoz plaća se naknada 55 kn te 22 kn po prijeđenom kilometru. Izračunaj koliko treba platiti za put duljine: 20 km, 50 km, 100 km, 500 km;
   f) Foto studio naplaćuje 8 kn razvijanje filma te 2.10 kn po fotografiji. Izračunaj koliko treba platiti za izradu filma sa: 12, 24 i 36 fotografija;
   g) Telefonska kompanija zaračunava pretplatu 59 kn te 0.41 kn po minuti razgovora. Izračunaj koliki će biti telefonski račun za: 120, 400, 1200, 10 000 minuta razgovora;
   h) Frizerka za plaću dobiva 1500 kn plus 15 kn po svakom šišanju. Izračunaj koliku plaću dobiva ako je napravila 50 šišanja.;
   i) Prodavač na tržnici prodaje krumpir po cijeni 3.99 kn za 1 kilogram. Za svoje mjesto na tržnici treba platiti “placovinu” 220 kn. Kolika će biti njegova zarada ako proda 300 kg krumpira?

2. Izračunaj vrijednosti linearne funkcije (tablicu precrtaj u bilježnicu) $f(x) = -x + 1$

x	$f(x)$
−3	
−2	
0	
2	
−5	

3. Izračunaj vrijednosti linearne funkcije (tablicu precrtaj u bilježnicu) $f(x) = 2x - \frac{1}{2}$

x	$f(x)$
−4	
$-\frac{1}{2}$	
0	
2.5	

4. Izračunaj vrijednosti linearne funkcije (tablicu precrtaj u bilježnicu) $f(x) = \frac{3}{4}x + 1$

x	$f(x)$
−4	
−2	
0	
3	

5. Izračunaj vrijednosti linearne funkcije (tablicu precrtaj u bilježnicu) $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$

x	$f(x)$
−3	
−6	
0	
2	

6. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = 4x - 2$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
   a) 6; b) −1; c) 10.

7. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = -6x - \frac{1}{2}$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
   a) 0; b) −1; c) $-\frac{1}{2}$.

8. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = \frac{2}{3}x - 1$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
   a) −4; b) −1; c) $\frac{5}{6}$.

9. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = x - 1.2$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
   a) −2.5; b) −1; c) 0.

10. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) −4; b) −1; c) 0.

11. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = 0.2x - 3$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
    a) −3; b) $-\frac{1}{2}$; c) 0.

9.2. Graf linearne funkcije i jednadžba pravca

Cijena 1 kg krumpira je 3 kn. Izračunaj koliko treba platiti:
1, 2, 3, 4 i 5 kg krumpira.
Nacrtaj grafički prikaz te proporcionalnosti .

Učeći o proporcionalnim veličinama, naučili smo da je njihov grafički prikaz polupravac iz ishodišta jer kod proporcionalnih veličina nije imalo smisla računati vrijednosti za negativne brojeve. Kod linearne funkcije možemo računati vrijednosti za bilo koji racionalni broj.

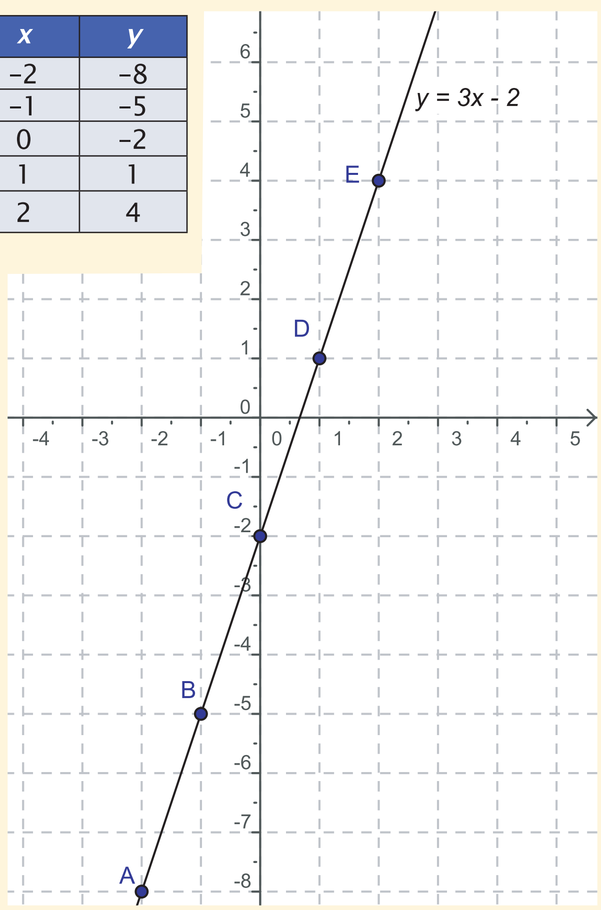
Primjer 1. Crtanje pomoću tablice

Nacrtaj skup svih točaka (x, y) u koordinatnoj ravnini ako za njihove koordinate vrijedi $y = 3x - 2$.

x	y
−2	
−1	
0	
1	
2	

Rješenje:

x	y
−2	−8
−1	−5
0	−2
1	1
2	4



Primijetimo da ucrtane točke pripadaju jednom pravcu. U tablici smo izdvojili samo nekoliko vrijednosti za x, mogli smo odabrati i neke druge vrijednosti – bilo koje racionalne brojeve. Za sve te brojeve mogli smo izračunati vrijednost funkcije. Dakle, dobili bismo beskonačno mnogo točaka i sve bi pripadale nacrtanom pravcu. Kažemo da smo nacrtali pravac čija je jednadžba

$y = 3x - 2$. Taj je **pravac** ujedno i grafički prikaz, tj. **graf linearne funkcije** $f(x) = 3x - 2$ u koordinatnoj ravnini.

graf

pravac

Važno

Graf funkcije ***f(x) = ax + b***
u **pravokutnom koordinatnom sustavu**
u ravnini je **pravac.**
Njegova je jednadžba ***y = ax + b***

Često poistovjećujemo zapis linearne funkcije $f(x) = ax + b$ s jednadžbom pripadnog pravca $y = ax + b$.

Linearnu funkciju možemo prikazati:
- formulom
- tablicom
- grafom.

Zadaci

1. Prepiši tablice pa izračunaj:

a) $f(x) = 2x + 1$

x	$y = f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

b) $f(x) = x - 2.5$

x	$y = f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

c) $f(x) = -3x$

x	$y = f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

2. Nacrtaj grafove linearnih funkcija.

a) $f(x) = -x + 1$;

b) $f(x) = -3x + 4.5$;

c) $f(x) = x$;

d) $f(x) = 2x - 2$;

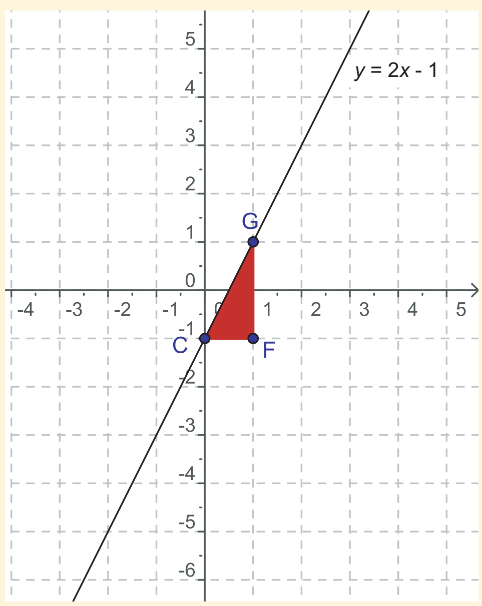
e) $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$;

f) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$.

Odaberi x-eve s kojima ćeš lakše računati.

Primjer 2.
Eksplicitna jednadžba pravca

Promotrimo graf linearne funkcije $f(x) = 2x - 1$ prikazan na slici.



Graf linearne funkcije je pravac, a njegova je jednadžba $y = 2x - 1$. Takav oblik jednadžbe pravca nazivamo **eksplicitnom jednadžbom** pravca. U njoj se uvijek s lijeve strane nalazi samo y, a s desne najprije član sa x.

Eksplicitna jednadžba pravca $y = ax + b$

Primjeri eksplicitne jednadžbe pravca su:

$y = 4x - 1$, $y = -2x - 1.5$; $y = \frac{2}{7}x - \frac{8}{3}$ ili općenito $y = ax + b$.

Eksplicitna jednadžba pravca uvijek je određena s dva broja, tj. koeficijenta: a i b.

Važno

Jednadžba $y = ax + b$ naziva se eksplicitnom jednadžbom pravca. Koeficijent a nazivamo koeficijentom smjera ili nagibom, a koeficijent b odsječkom na osi ordinata.

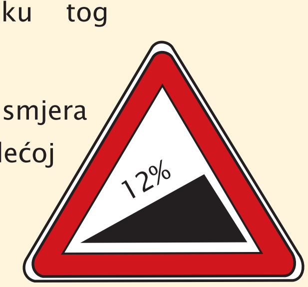
Odsječak na osi ordinata

Odsječak na osi ordinata, tj. b, određuje mjesto točke C na našoj slici. Točka C ima koordinate $(0, -1)$. Primijetimo da je druga koordinata jednaka koeficijentu b i da se točka C nalazi na osi ordinata. Zato je taj koeficijent dobio ime odsječak na osi ordinata – on određuje točku u kojoj pravac siječe os y.

Koeficijent smjera

Koeficijent smjera ili nagib, tj. a, određuje trokut ΔCFG na našem grafu. Taj trokut je uvijek pravokutan s hipotenuzom na pravcu, a koeficijent smjera nam određuje duljine njegovih kateta. U našem primjeru kateta $|CF|$ je 1, a kateta $|FG|$ je 2. Zapišemo li koeficijent smjera u obliku razlomka $2 = \frac{2}{1}$, vidimo da se duljine tih kateta pojavljuju u nazivniku i brojniku tog razlomka.

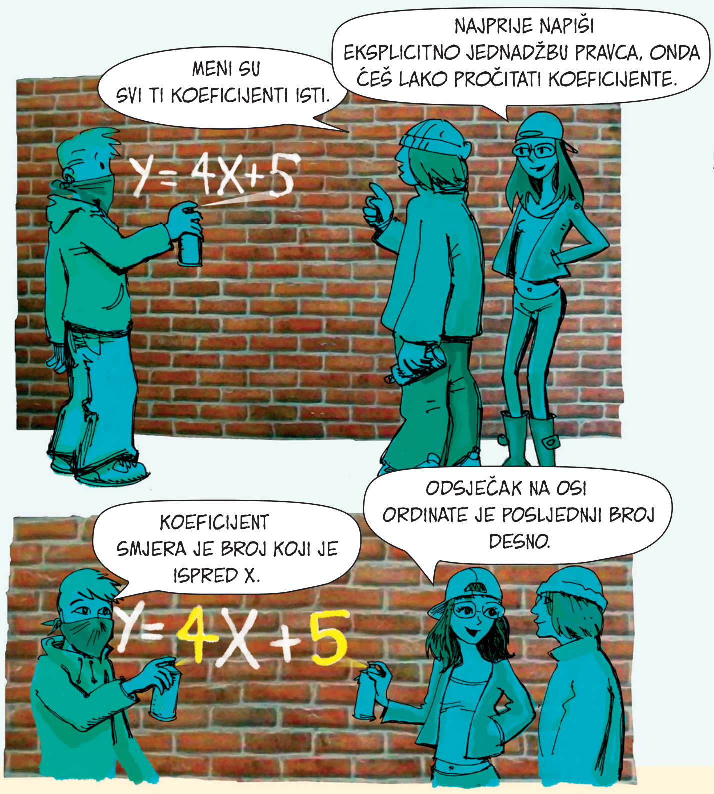
Značenjem koeficijenta smjera više ćemo se baviti u sljedećoj nastavnoj jedinici.



Zadaci

3. Ispiši koeficijente smjera i odsječke na osi ordinata iz zadanih jednadžbi pravaca

jednadžba pravca	*a*	*b*
$y = 5x + 6$		
$y = 7x - 2$		
$y = -4x + 3.5$		
$y = \frac{1}{2}x + 3.6$		



4. Prepiši, pa napiši koordinate točke u kojoj pravac siječe os ordinata. Prvi je redak riješen.

jednadžba pravca	sjecište s osi ordinata
$y = 2x - 3$	(0, −3)
$y = -7x + 4$	
$y = -4x + 3.7$	
$y = \frac{1}{2}x + 6$	
$y = -\frac{3}{2}x - \frac{4}{7}$	

5. Prepiši, pa napiši koeficijent smjera u obliku razlomka.

jednadžba pravca	koeficijent smjera (razlomak)
$y = -3x - 3$	$\frac{-3}{1}$
$y = 4x + 1$	
$y = -5x + 2.4$	
$y = \frac{1}{2}x + 6$	
$y = -\frac{3}{5}x - \frac{4}{7}$	

Primjer 3. Crtanje pravca pomoću koeficijenata

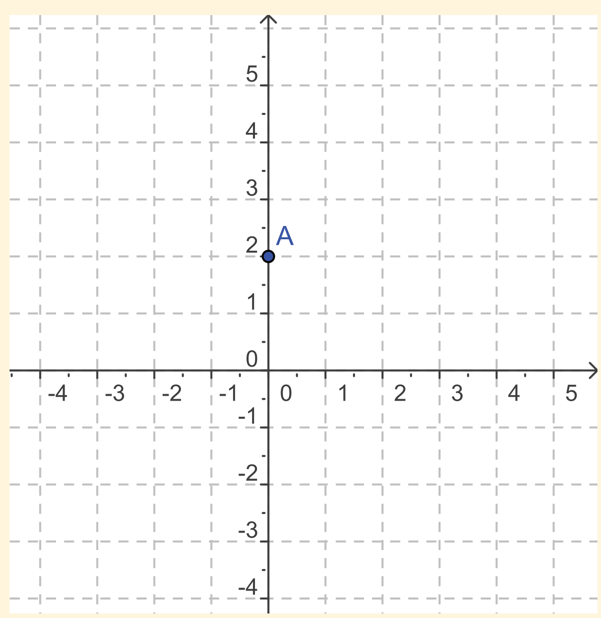
Nacrtaj pravac $y = -\frac{1}{3}x + 2$

Rješenje:

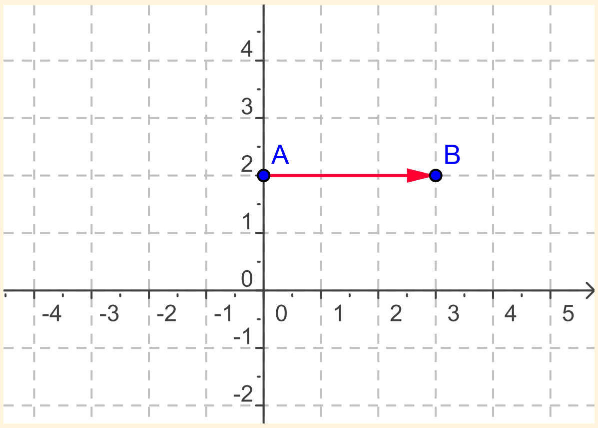
Najprije ispišemo koeficijente iz jednadžbe pravca.

$a = -\frac{1}{3}$

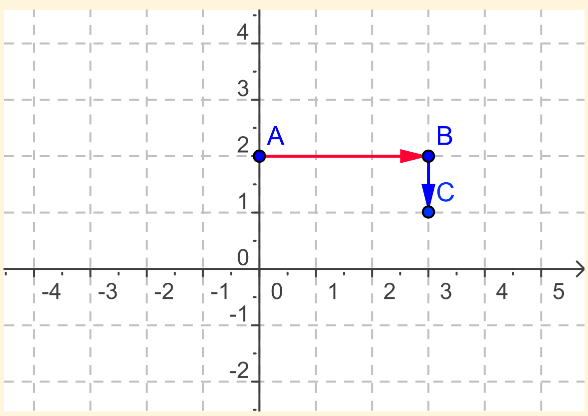
$b = 2.$



Prema koeficijentu $b = 2$ odredimo sjecište s osi ordinata – točka $A\,(0, 2)$.

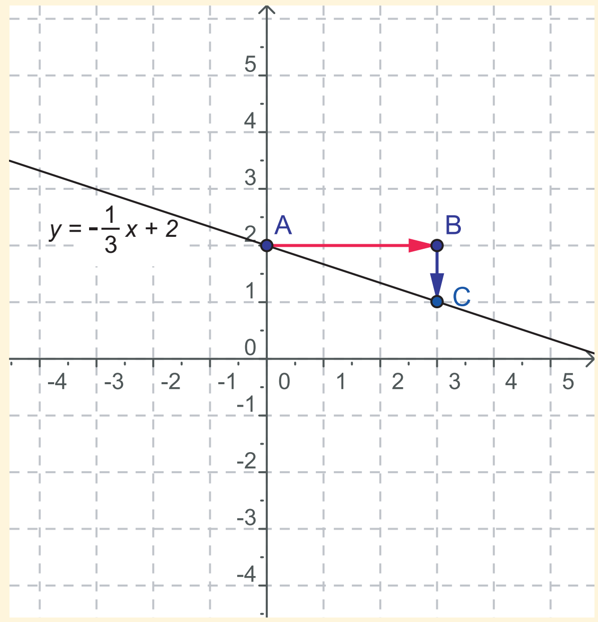


Određujemo pravokutan trokut zadan koeficijentom smjera $a = -\frac{1}{3}$. Najprije od točke A izbrojimo 3 kvadratića desno (nazivnik 3) i dobijemo točku B.



Zatim od točke B brojimo 1 kvadratić dolje (brojnik −1) i dobijemo točku C.

Nacrtamo pravac kroz točke A i C. To je traženi pravac $y = -\frac{1}{3}x + 2$.



Nazivnik desno

Brojnik – dolje ako je negativan

– gore ako je pozitivan

Z a d a c i

6. Nacrtaj pravce

a) $y = \frac{1}{2}x + 1$; b) $y = -\frac{1}{2}x + 1$;

c) $y = \frac{3}{4}x - 2$; d) $y = -\frac{3}{4}x - 2$;

e) $y = -\frac{2}{3}x + 3$; f) $y = -\frac{2}{3}x - 3$.

Ako je odsječak 0, počni crtati od ishodišta

7. Nacrtaj pravce

a) $y = 2x - 1$; b) $y = -2x - 1$;

c) $y = 3x + 2$; d) $y = -4x + 3$;

e) $y = x$; f) $y = 5x$;

g) $y = -6x$.

8. Nacrtaj pravce

a) $y = \frac{1}{2}x + 1.5$; b) $y = -\frac{3}{7}x + \frac{3}{4}$;

c) $y = \frac{3}{4}x$; d) $y = -0.75x - 1.8$;

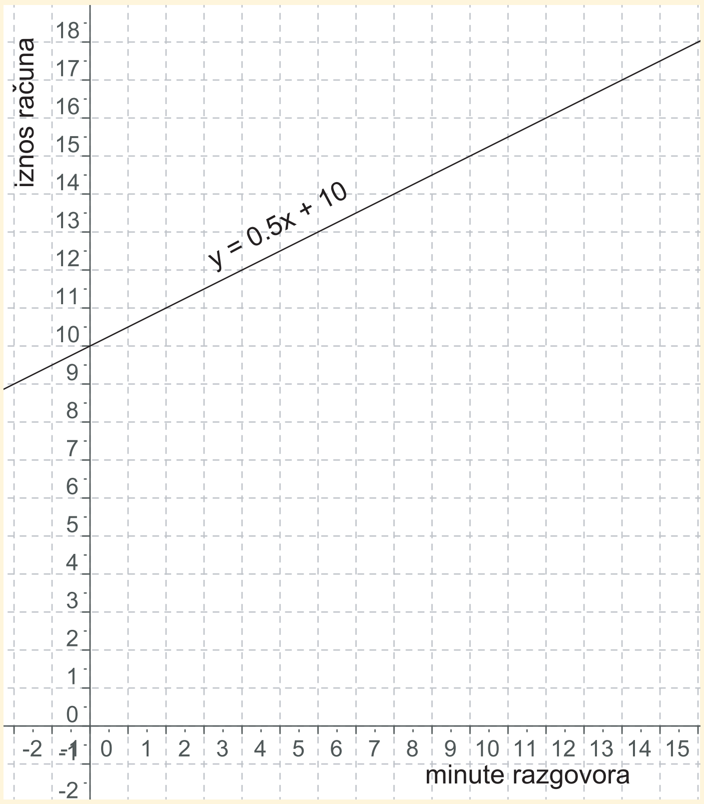
e) $y = 1.5x + 3.6$; f) $y = 0.25x$;

g) $y = \frac{2}{3}x + 2$; h) $y = \frac{2}{3}x - 3$;

i) $y = \frac{1}{2}x - 3$; k) $y = -\frac{1}{2}x - 2$; l) $y = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{2}$.

Primjer 4. Čitanje vrijednosti s grafa

Na slici je nacrtan graf linearne funkcije $y = 0.5x + 10$ koji prikazuje izračun telefonskog računa s pretplatom 10 kn plus 0.50 kn po minuti razgovora.



Pomoću grafa odredi:

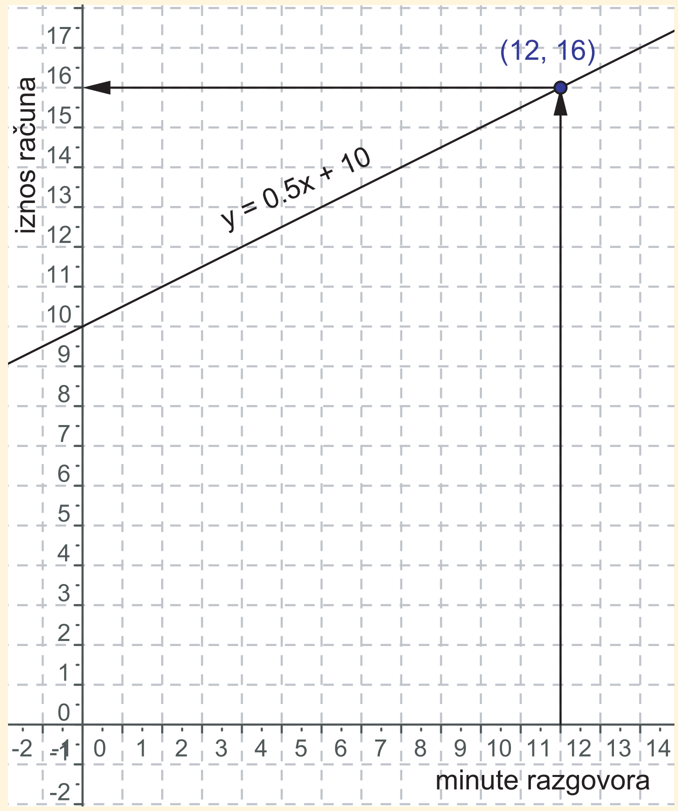
a) Koliki račun treba platiti za 12 minuta razgovora;

b) Koliko je minuta razgovora potrošeno ako je iznos računa 20 kn?

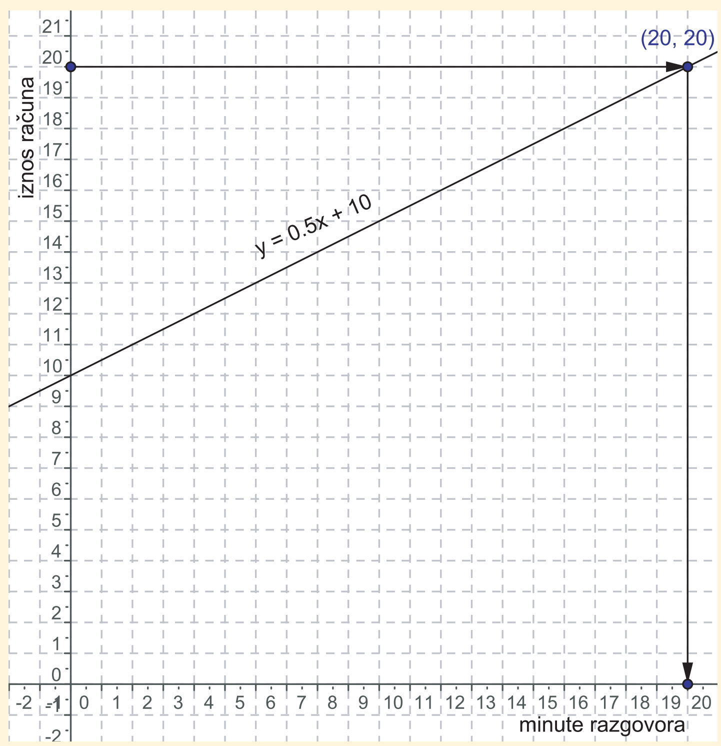
Rješenje:

Da bismo odredili rješenja, trebamo pronaći odgovarajuće točke na pravcu i očitati njihove koordinate. Na x osi prikazane su minute razgovora, a na y osi iznos računa.

a) Pronađemo točku na pravcu koja ima x koordinatu 12. To je točka (12, 16). y koordinata te točke određuje iznos računa. Dakle, za 12 minuta razgovora račun će biti 16 kn.



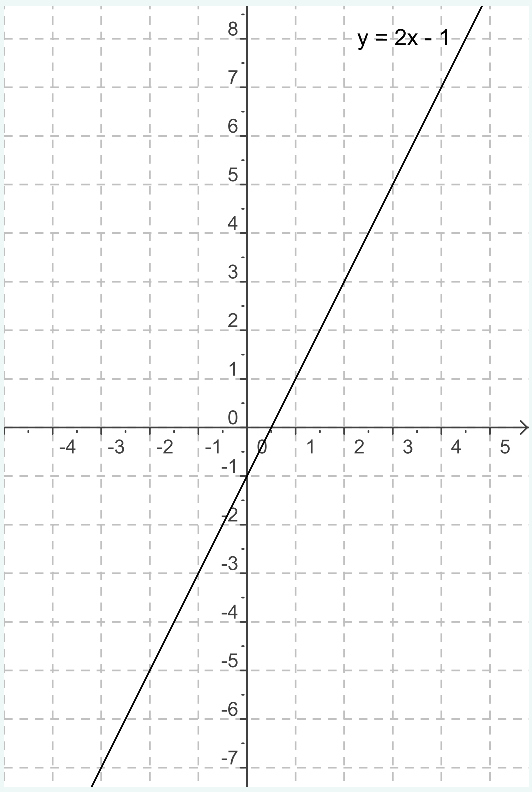
b) Pronađemo točku na pravcu koja ima y koordinatu 20. To je točka (20, 20). x koordinata te točke određuje broj minuta razgovora. Dakle, za 20 kn razgovara se 20 minuta.



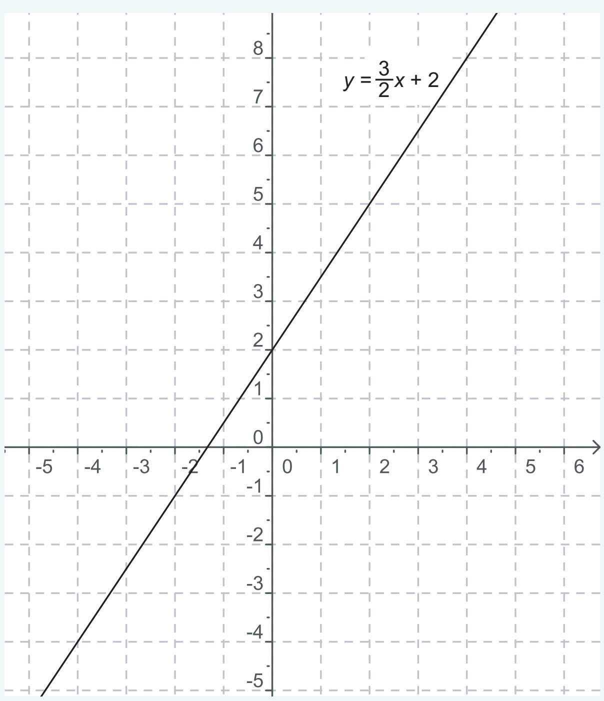
Zadaci

9. Prepiši točke u bilježnicu. Koristeći nacrtane pravce odredi koordinate točaka na tim pravcima.

a) $A(-1,\_\_)$; $B(3,\_\_)$; $C(\_\_, -5)$, $D(\_\_,7)$



b) $A(-4,\_\_)$; $B(2,\_\_)$; $C(\_\_, -4)$, $D(\_\_,3.5)$.



10. Prepiši točke u bilježnicu. Nacrtaj graf funkcije $y = x + 1$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.
$A(1,\_\_)$; $B(3,\_\_)$; $C(\_\_, 3)$, $D(-2, \_\_)$,
$F(\_\_, -3)$; $G(\_\_, 0)$.

11. Prepiši točke u bilježnicu. Nacrtaj graf funkcije $y = 5x - 2$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.
$A(2,\_\_)$; $B(-1,\_\_)$; $C(\_\_, -2)$, $D(0, \_\_)$,
$F(\_\_, \frac{1}{2})$; $G(\_\_, -\frac{1}{3})$.

12. Servis za kućanske aparate naplaćuje dolazak u stan 60 kn, a svaki sat rada 40 kn.

a) Zapiši formulom ovisnost cijene popravka o broju radnih sati;

b) Nacrtaj graf te funkcije;

c) Koristeći graf odredi cijenu popravka od 2 sata rada;

d) Koristeći graf odredi koliko je trajao popravak ako je plaćeno 260 kn.

13. Luka ima na štednoj knjižici 1500 kn. Odlučio je dio tog novca potrošiti za vrijeme ljetovanja i to svaki dan 50 kn.

a) Zapiši formulom ovisnost preostalog iznosa Lukine ušteđevine o broju dana na ljetovanju;

b) Nacrtaj graf te funkcije;

c) Koristeći graf odredi koliko novca će Luki preostati nakon 5 dana ljetovanja;

d) Koristeći graf odredi koliko dana Luka može provesti na ljetovanju ako želi da mu ostane 500 kn ušteđevine.

14. Najprije napiši formulu , a zatim nacrtaj linearne funkcije čiji su koeficijenti:

a) a = 2, b = 3; b) a = -1, b = 2;
c) a = 3, b = -2; d) a = -4, b = -1;

e) $a = \frac{1}{2}, b = 1.5$; f) $a = -\frac{3}{2}, b = -1$;
g) $a = -3, b = \frac{-1}{2}$; h) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{11}{4}$.

15. Nacrtaj graf linearne funkcije y = -2x + 2. Očitaj točku tog grafa kojoj je:

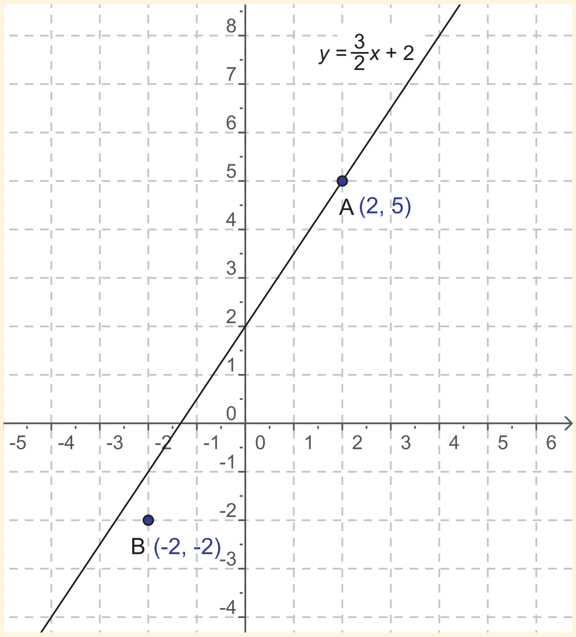
a) x-koordinata 1; b) y-koordinata 2;
c) apscisa 0; d) ordinata 4;
e) obje koordinate jednake.

Primjer 5. Pripada li točka grafu funkcije

Pripadaju li točke $A(2, 5)$ i $B(-2, -2)$ grafu linearne funkcije $y=\frac{3}{2}x+2$?

Rješenje:

Zadatak možemo riješiti grafički i računski. Da bismo ga riješili grafički, najprije nacrtajmo graf zadane funkcije pa prikažimo zadane točke.



Na slici vidimo da točka A pripada pravcu, a točka B ne.

Da bismo računski provjerili pripada li neka točka grafu funkcije, moramo koordinate točke uvrstiti u formulu funkcije. Ako dobijemo istinitu jednakost, znači da točka pripada grafu; a ako dobijemo neistinitu jednakost, znači da točka ne pripada grafu.

Provjerimo za točku A:

$$y=\frac{3}{2}x+2$$
$$5=\frac{3}{2}\cdot 2+2$$
$$5=3+2$$
$$5=5$$

Dakle- točka A pripada grafu funkcije.

Provjerimo za točku B:

$$y=\frac{3}{2}x+2$$
$$-2=\frac{3}{2}\cdot(-2)+2$$
$$-2=-3+2$$
$$-2=-1$$

Dakle točka B ne pripada grafu funkcije.

Važno

Točka $T(x,y)$ pripada pravcu $y = ax + b$ ako njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu toga pravca

Z a d a c i

14. Računski provjeri pripadaju li točke grafu linearne funkcije $y = 25x–7$.
$A(1, 18)$; $B(-3, -42)$; $C(0, -7)$, $D(-2,-57)$, $F(2, -3)$; $G(-14, 0)$.

15. Računski provjeri pripadaju li točke pravcu $y = -45x + 126$
$A(10, -324)$; $B(0, 126)$; $C(5, -7)$, $D(-2,-57)$, $F(2, 36)$; $G(-10, 576)$.

16. Grafički provjeri pripadaju li točke grafu linearne funkcije $y = -4x + 1$
$A(1, 5)$; $B(0, 1)$; $C(-2, 9)$, $D(-3,-5)$, $F(2, -7)$; $G(-1, 0)$.

17. Grafički provjeri pripadaju li točke pravcu $y = 2x -3$
$A(2, 1)$; $B(-2, 0)$; $C(-2, -7)$, $D(1,-1)$, $F(2, -3)$; $G(-3, 9)$.

18. Koje od ovih točaka pripadaju grafu funkcije $y=-\frac{3}{2}x$
$A(2, -3)$; $B(-2, 3)$; $C(3, 5)$, $D(-8,12)$, $F(-6, 15)$; $G(6, -9)$.

19. Točke: A(1, 3); B(−1, −5); C(2, 7), D(2, −2), F(0, 8)
Pravci: $y = 4x - 1$ i $y = -5x + 8$

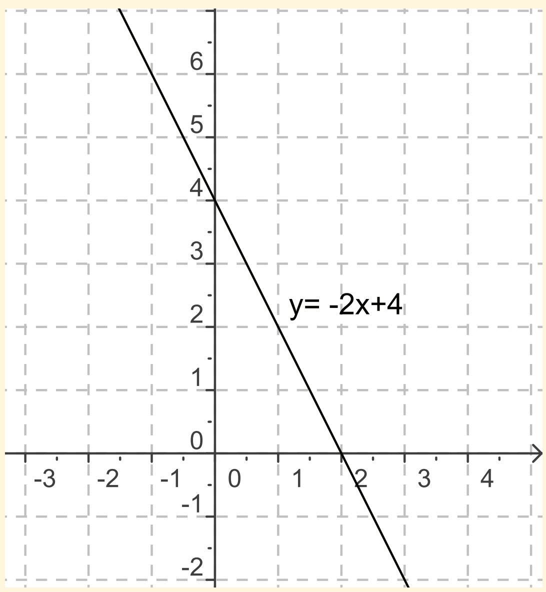
a) Zadane točke razdvoji u skupine ovisno o pravcu kojem pripadaju.

b) Koja točka pripada i jednom i drugom pravcu?

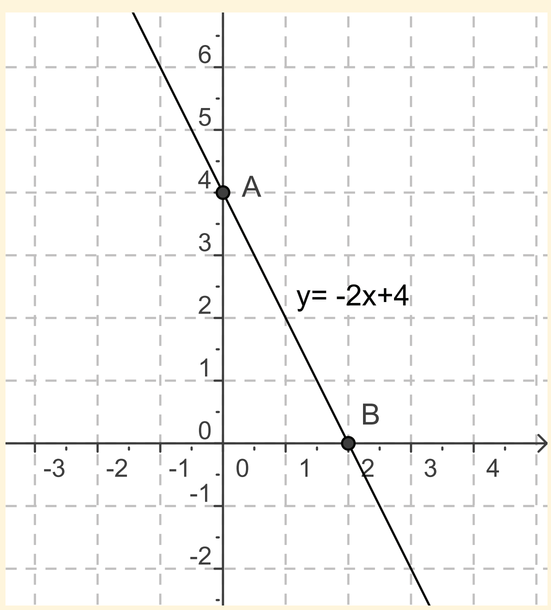
c) Nacrtaj grafički prikaz i uoči gdje se nalazi zajednička točka.

Primjer 6. Sjecišta s koordinatnim osima

Pogledaj graf linearne funkcije $y = -2x + 4$. Očitaj na njemu točke u kojima taj pravac siječe koordinatne osi.



Rješenje:



Sjecišta s osima

Na slici uočavamo da pravac siječe os ordinata u točki $A(0, 4)$, a os apscisa u točki $B(2, 0)$.

Sjecište s osi ordinata odredili bismo tako da u jednadžbu pravca uvrstimo $x = 0$.

$y = -2 \cdot 0 + 4;$

$y = 4$

Sjecište s osi ordinata: $A(0, 4)$.

Vidimo da je ordinata te točke jednaka odsječku na osi ordinata, tj. koeficijentu b iz eksplicitne jednadžbe pravca.

Sjecište s osi apscisa određujemo tako da u jednadžbu pravca uvrstimo $y = 0$.

$y = -2x + 4$

$-2x + 4 = 0$

$-2x = -4 \; / : (-2)$

$x = 2.$

Sjecište s osi apscisa $B(2, 0)$.

Sjecište pravca i osi apscisa naziva se nul-točka jer je ordinata te točke nula. Slično kažemo da je **nultočka linearne funkcije** ona vrijednost od x za koju je vrijednost funkcije $f(x)$ nula.

Važno

Nultočku funkcije $f(x) = ax + b$ određujemo rješavanjem linearne jednadžbe $ax + b = 0$

Pravac $y = ax + b$.

Sjecište s osi ordinata $A(0, b)$.

Sjecište s osi apscisa $N\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.

Z a d a c i

20. Grafički odredi sjecišta pravaca s koordinatnim osima:

a) $y = -4x - 8$; b) $y = 3x - 6$;

c) $y = \frac{3}{2}x - 3$; d) $y = -\frac{2}{3}x + 2$.

21. Računski odredi sjecišta pravaca s koordinatnim osima:

a) $y = -2x - 6$; b) $y = 4x - 7$;

c) $y = \frac{3}{2}x - 5$; d) $y = -\frac{2}{7}x + 12$;

e) $y = 5x - 20$; f) $y = -6x - 3.6$;
g) $y = -\frac{2}{5}x + 40$.

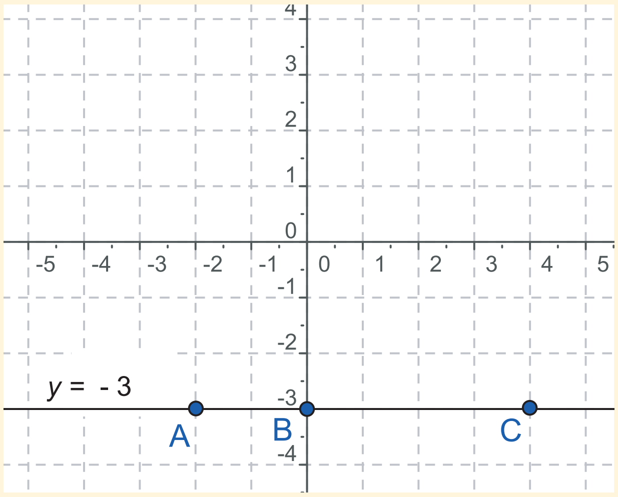
22. Odredi nul-točke zadanih linearnih funkcija
a) $y = -7x + 10$; b) $y = -0.5x - 1.5$;
c) $y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{7}$; d) $y = -\frac{2}{5}x + 5$.
e) $y = -2.5x + 20$; f) $y = 3.5x - 28$;
g) $y = -\frac{2}{5}x + 1.2$.

Primjer 7. Posebni pravci

Osim pravaca koji imaju jednadžbu oblika $y = ax + b$ postoje još dvije grupe pravaca:

y = broj i x = broj. Primjerice, $y = 5$, $y = -3$, $x = 4$, $x = -1.5$. Ti su pravci usporedni s koordinatnim osima.

Promotrimo pravac $y = -3$. Sve točke na tom pravcu imaju y koordinatu -3, a x koordinata može biti bilo koja. Dakle, na tom pravcu nalaze se, primjerice, točke $(-2, -3)$, $(0, -3)$, $(4, -3)$. Nacrtajmo ga.

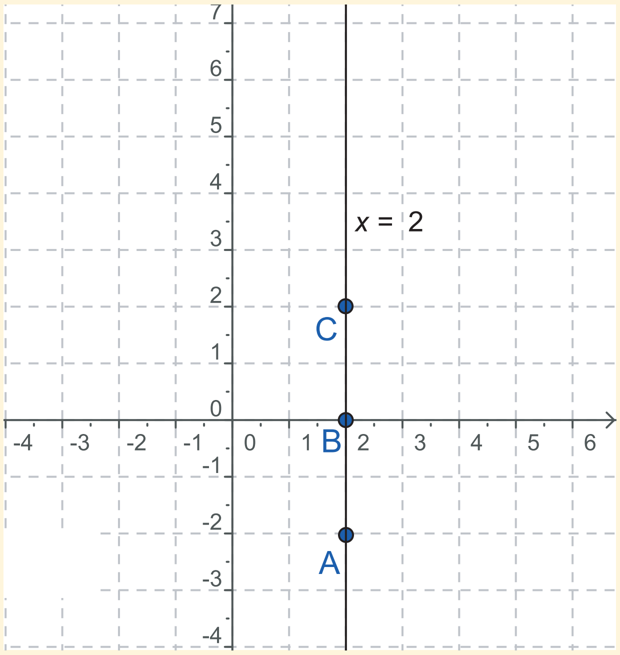


Koliki je nagib toga pravca?

Nagib je nula. Taj je pravac grafički prikaz linearne funkcije $f(x) = b$. Tu funkciju još nazivamo i konstantom jer za bilo koju vrijednost argumenta x funkcija uvijek ima istu, konstantnu vrijednost, u ovom primjeru -3.

Pravac y = broj usporedan je sa x osi.

Promotrimo pravac $x = 2$. Sve točke na tom pravcu imaju x koordinatu 2, a y koordinata može biti bilo koja. Dakle, na tom pravcu nalaze se, primjerice, točke $(2, -3)$, $(2, 0)$, $(2, 4)$. Nacrtajmo ga.



Taj pravac nema nagiba. Vidimo da je jednoj vrijednosti od x pridruženo beskonačno mnogo vrijednosti od y. Taj pravac nije grafički prikaz nijedne funkcije jer iz jednadžbe $x = 2$ ne možemo izraziti y, pa tako ni $f(x)$.

Pravac x = broj usporedan je sa y osi.

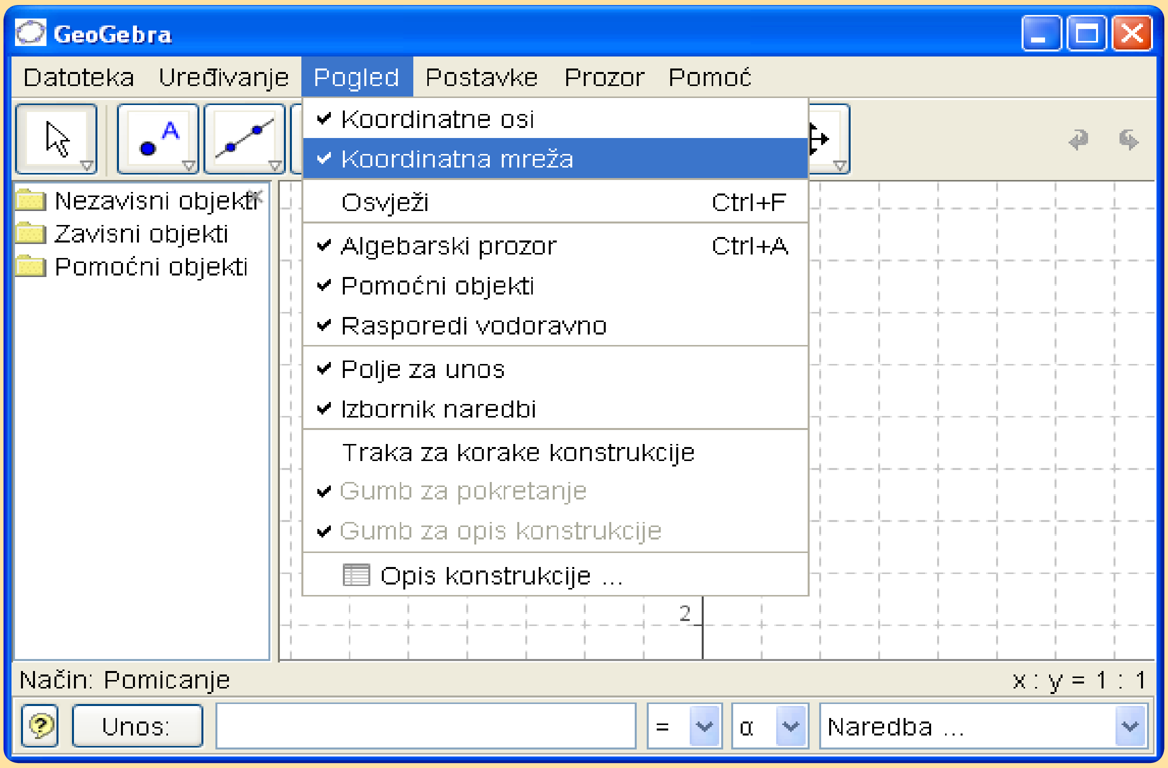
Z a d a c i

23. Nacrtaj pravce
$x = 5$; $y = 2$; $x = -2$; $y = 4$; $x = 1$;
$y = -1$; $x = 3$; $y = 3$; $x = -4$; $y = -2$.

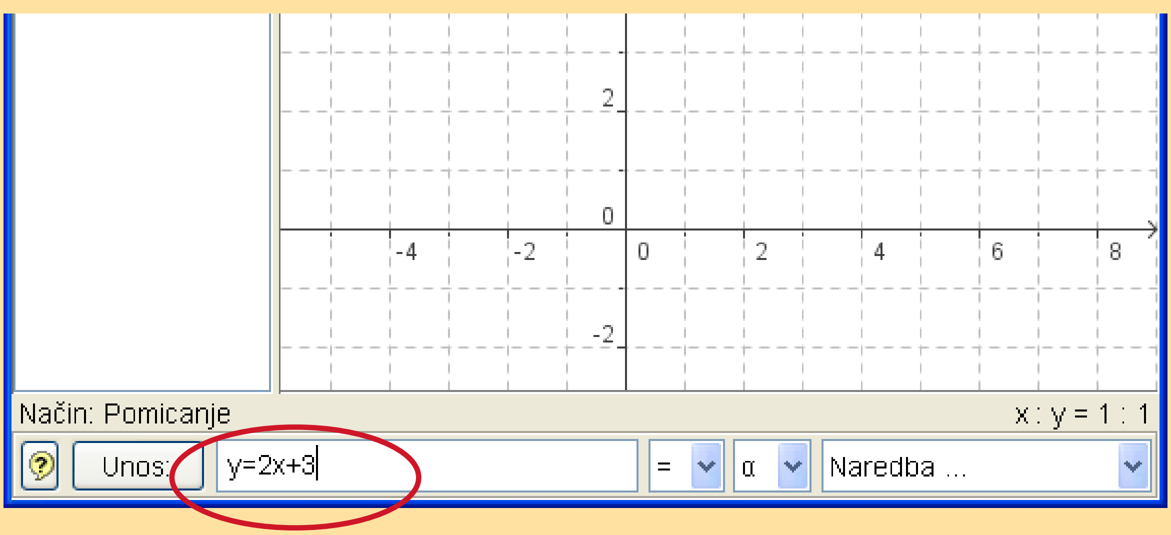
24. Odredi nul-točku, sjecišta s koordinatnim osima te nacrtaj graf ovih linearnih funkcija:
a) $y = 2x - 4$; b) $y = -3x - 1$; c) $y = \frac{1}{2}x + 2$;
d) $y = -\frac{1}{4}x + 2$.

Crtanje u Geogebri

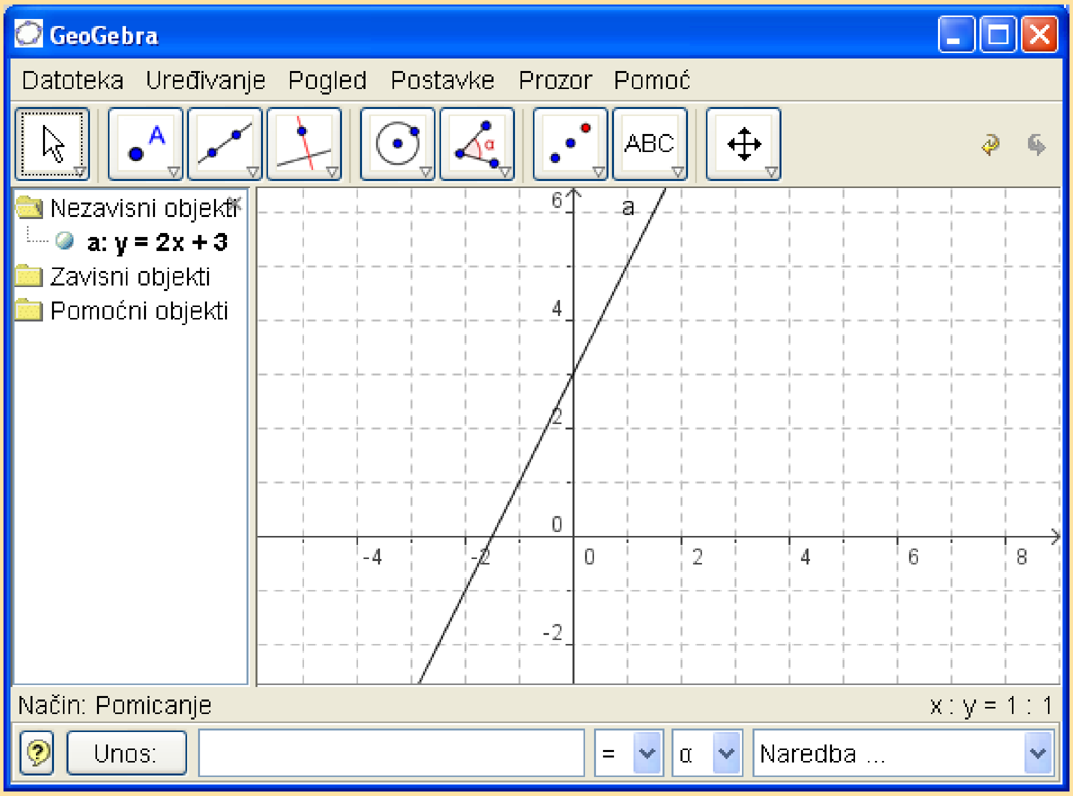
Upotreba programa za dinamičku geometriju uvelike olakšava rješavanje zadataka s linearnim funkcijama i pravcima. Pokazat ćemo vam na primjeru programa GeoGebra koji možete naći i na CD-u uz udžbenik; u ostalim programima radi se na sličan način.
Najprije pokrenite GeoGebru na svojem računalu, a zatim pripremite prostor za crtanje:
U izborniku *Pogled* uključite prikaz *koordinatnih osi, koordinatne mreže, algebarskog prozora i polja za unos*.



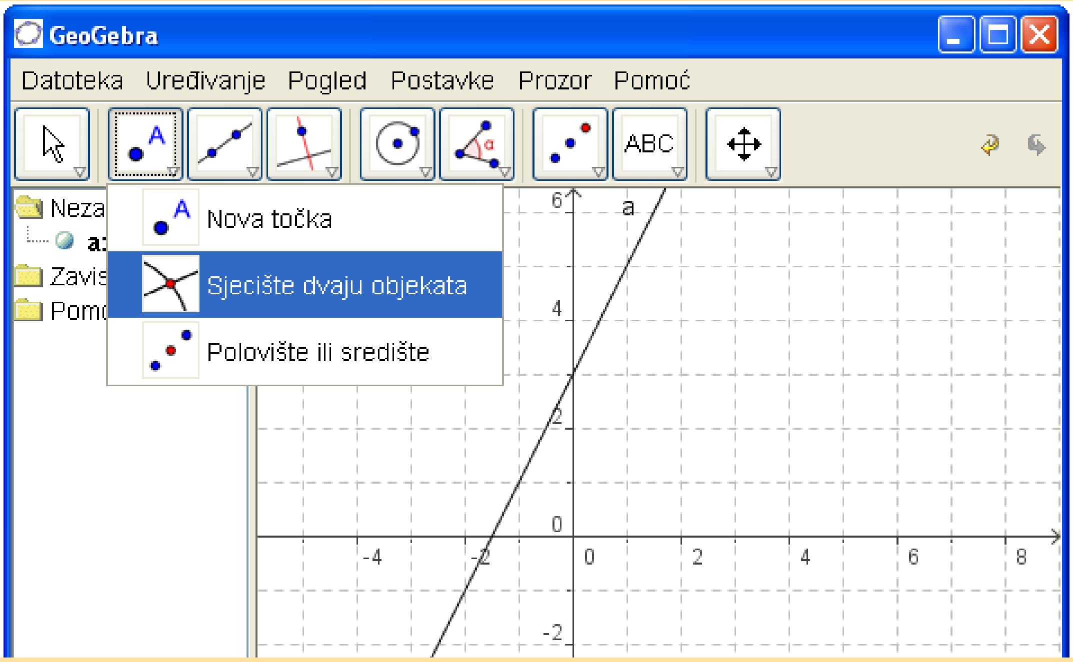
Da biste nacrtali pravac zadan jednadžbom njegovu jednadžbu upišite u *Polje za unos* koje se nalazi na dnu GeoGebrinog prozora.



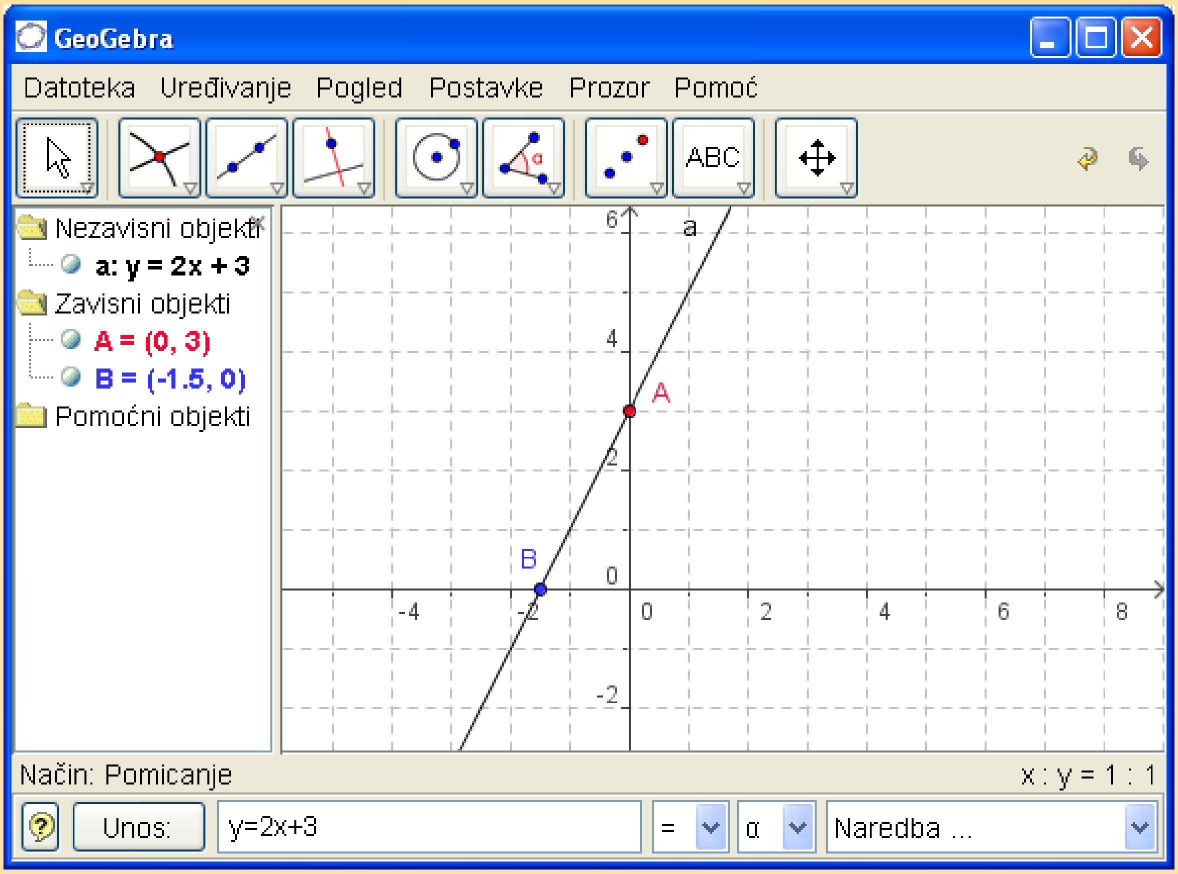
Nakon upisa pritisnite tipku *Enter* i u koordinatnom sustavu će se pokazati vaš pravac, a u algebarskom prozoru slijeva pisat će njegova jednadžba.



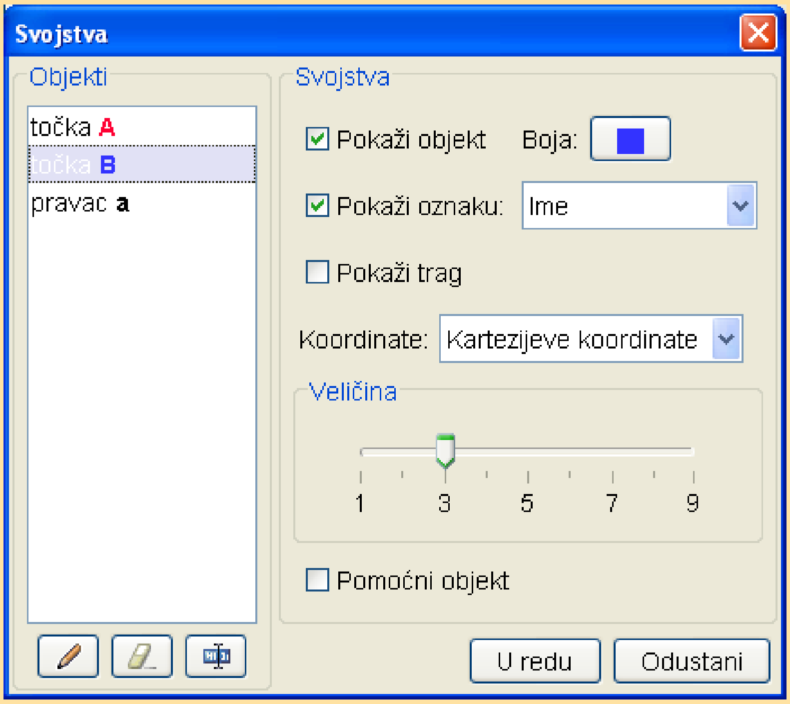
Da biste odredili sjecište pravaca s osi y odaberite alat *Sjecište dvaju objekata* koji se nalazi u izborniku ispod alata *Nova točka*. Zatim označite objekte čije sjecište želite dobiti. Dakle, kliknete mišem na nacrtani pravac, pa zatim na os y.
Da biste dobili sjecište s osi x cijeli postupak ponovite, ali sad označite pravac i os x.



U algebarskom prozoru slijeva vidljiv je popis svih objekata koje ste nacrtali – tu možete pročitati jednadžbu pravca i koordinate sjecišta koja smo nacrtali.



Da biste promijenili izgled nacrtanih objekata u izborniku *Uređivanje* odaberite *Svojstva* pa mijenjajte boju, veličinu, oznaku, itd.



9.3. Tok linearne funkcije

Prodaja automobila

Matijin tata radi u salonu automobila. Ima plaću 3000 kn uz dodatak 100 kn po svakom prodanom automobilu.

a) Zapiši formulom ovisnost njegove zarade o broju prodanih automobila;

b) Hoće li se njegova plaća povećavati ili smanjivati s brojem prodanih automobila?

c) Opiši kad njegova plaća raste.

Naučili smo da je grafički prikaz linearne funkcije pravac, naučili smo nacrtati i odrediti njegova sjecišta s koordinatnim osima. U ovoj temi promotrit ćemo još malo taj grafički prikaz. Riječ "tok" u naslovu znači da promatramo kako se linearna funkcija "giba". Pritom uvijek promatramo grafički prikaz slijeva nadesno, tj. po x osi od manjih brojeva prema većima.

Primjer 1. Rastuća funkcija

Taksi služba naplaćuje početnu cijenu 30 kn te 6 kn po prijeđenom kilometru.

a) Napiši formulu funkcije za cijenu vožnje

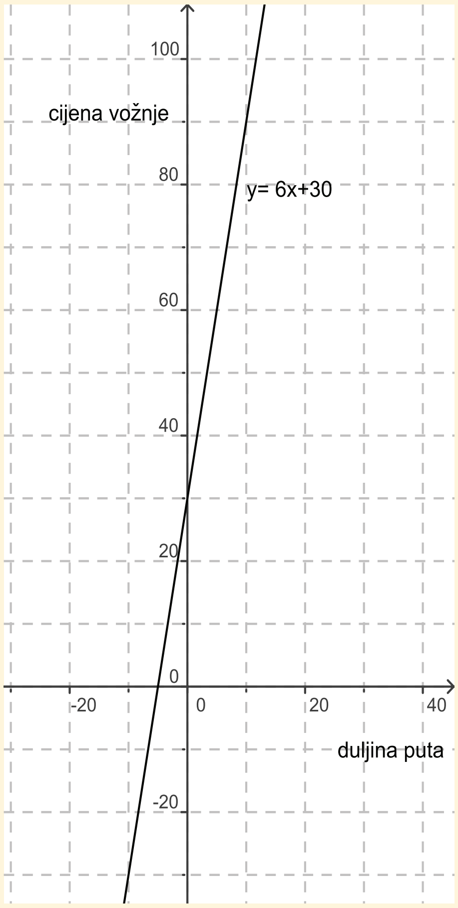
b) Nacrtaj graf

c) Kako se mijenja cijena vožnje ako broj kilometara raste?

Rješenje:

a) $f(x) = 6x + 30$.

b)



c) Cijena vožnje raste kako raste duljina puta. Primjerice za 5 km treba platiti 60 kn, a za 10 km treba platiti 90 kn. Kažemo da je linearna funkcija $f(x) = 6x + 30$ **rastuća**.

Rastuća funkcija

Primjer 2. Padajuća funkcija

Majina mama je u kasicu stavila 150 kn koje namjerava trošiti svaki dan za kavu. Jedna kava stoji 2 kn.

a) Napiši formulu funkcije za preostali iznos u kasici

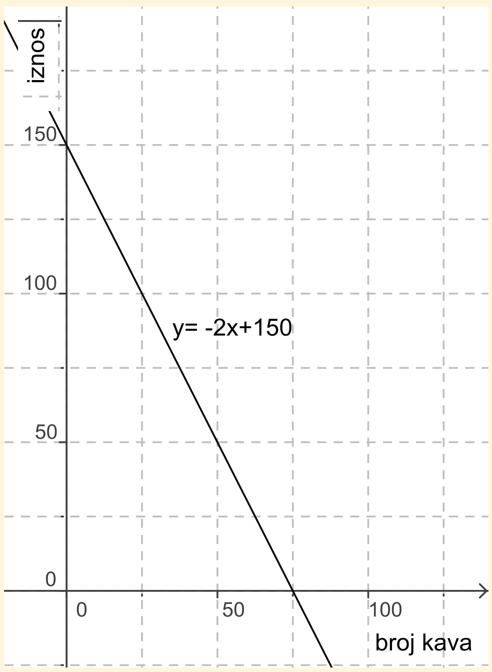
b) Nacrtaj graf

c) Kako se mijenja iznos novaca u kasici ako broj kava raste?

Rješenje:

a) $f(x) = -2x + 150$

b)



c) Iznos u kasici pada (smanjuje se) kako raste broj kava. Primjerice nakon 3 kave u kasici će biti 144 kn, a nakon 20 kava u kasici će biti 110 kn.

Kažemo da je linearna funkcija $f(x) = -2x + 150$ **padajuća.**

padajuća funkcija

Primjer 3. Brzina rasta i nagib pravca

Nacrtaj u istom koordinatnom sustavu grafičke prikaze linearnih funkcija: $f(x) = x + 1$, $f(x) = 3x - 1$, $f(x) = 6x + 2$.

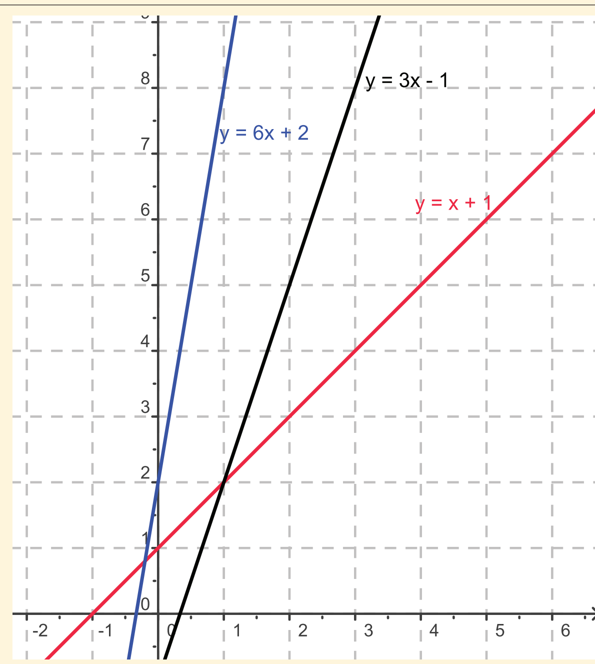
a) Jesu li te funkcije rastuće ili padajuće?

b) Koja raste najbrže, a koja najsporije?

Rješenje:

a) Sve tri linearne funkcije su rastuće.

b) Najbrže raste – najveći nagib ima pravac $y = 6x + 2$. Najsporije raste – najmanji nagib ima pravac $y = x + 1$.



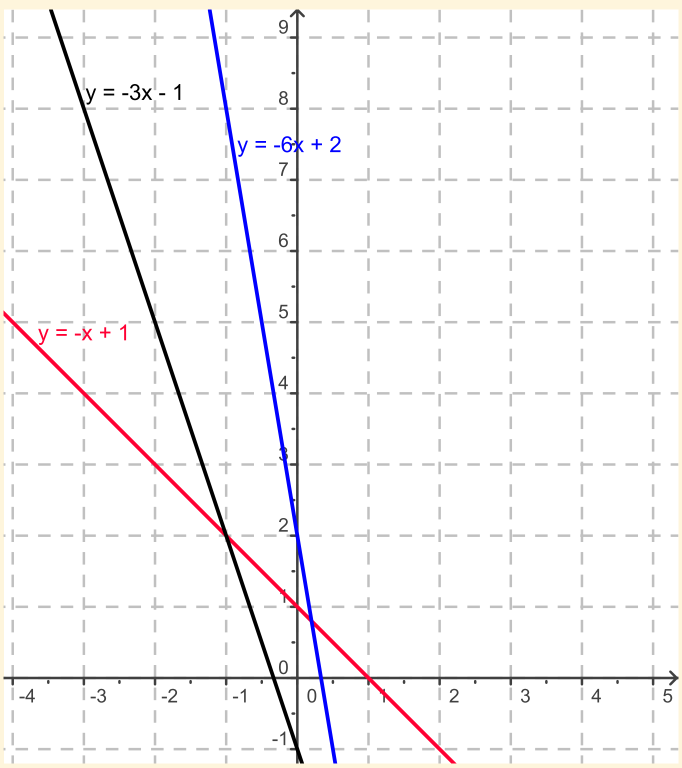
Pogledamo li koeficijente smjera zadanih linearnih funkcija: 1, 3 i 6 – vidimo da su svi pozitivni. Najveći koeficijent ima funkcija koja najbrže raste. Koeficijent smjera nazivamo i **nagib pravca** – on određuje hoće li pravac ići "uzbrdo" ili "nizbrdo", te koliko će "strm" biti.

Važno

Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ kojoj je koeficijent smjera pozitivan, $a > 0$ je rastuća funkcija. Brže raste ona linearna funkcija koja ima veći koeficijent smjera.

Primjer 4. Brzina pada

Nacrtaj u istom koordinatnom sustavu grafičke prikaze linearnih funkcija: $f(x) = -x + 1$, $f(x) = -3x - 1$, $f(x) = -6x + 2$.



a) Jesu li te funkcije rastuće ili padajuće?

b) Koja pada najbrže, a koja najsporije?

Rješenje:

a) Sve tri linearne funkcije su padajuće.

b) Najbrže pada – najstrmiji je pravac $y = -6x + 2$. Najsporije pada – najblaži pad ima pravac $y = -x + 1$.

Pogledamo li koeficijente smjera zadanih linearnih funkcija: −1, −3 i −6 – vidimo da su svi negativni. Najmanji koeficijent ima funkcija koja najbrže pada.

Važno

Linearna funkcija $\boldsymbol{f(x) = ax + b}$ kojoj je koeficijent smjera negativan, $\mathbf{a < 0}$ je padajuća funkcija. Brže pada ona linearna funkcija koja ima manji koeficijent smjera.

Zadaci

1. Odredi bez crtanja je li linearna funkcija rastuća ili padajuća:
   a) $f(x) = 3x - 4$;
   b) $f(x) = -4x + 1$;
   c) $f(x) = 3.7x - 2$;
   d) $f(x) = -43x - 45$;
   e) $f(x) = -11.2x + 15$;
   f) $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{5}{17}$;
   g) $f(x) = -\frac{13}{44}x - \frac{6}{11}$;
   h) $f(x) = \frac{4}{9}x - 6.8$.

2. Označi tvrdnje koje su točne
   a) $f(x) = 31x - 2$; rastuća;
   b) $f(x) = -41x + 7$; padajuća;
   c) $f(x) = 3.7x - 2$; rastuća;
   d) $f(x) = -43x - 45$; rastuća;
   e) $f(x) = 1.5x + 1$; padajuća;
   f) $f(x) = -\frac{5}{6}x + \frac{3}{7}$; padajuća;
   g) $f(x) = \frac{3}{22}x - \frac{6}{21}$; rastuća;
   h) $f(x) = \frac{4}{19}x - 2.1$; padajuća.

3. U svakom pojedinom zadatku sve rastuće funkcije nacrtaj na jednoj slici, a sve padajuće na drugoj. Linearnu funkciju koja najbrže raste oboji crveno, a linearnu funkciju koja najsporije pada plavo.
   a) $f(x) = 1x - 2$; $f(x) = -2x - 2$; $f(x) = 3x + 1$; $f(x) = -4x + 2$; $f(x) = 2x + 3$;
   b) $f(x) = -4x + 1$; $f(x) = -2x + 2$; $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = 5x - 5$; $f(x) = -x - 1$;
   c) $f(x) = -\frac{1}{6}x + 1$; $f(x) = -\frac{3}{4}x - 1$; $f(x) = \frac{4}{3}x - 1.5$; $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$; $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$; $f(x) = \frac{5}{4}x + 2$;
   d) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; $f(x) = -\frac{3}{4}x + 2$; $f(x) = \frac{3}{2}x + 2.5$; $f(x) = -2x - 3$; $f(x) = x - 2$; $f(x) = -x + 1$.

4. Odredi bez crtanja hoće li pripadna linearna funkcija biti rastuća ili padajuća:
   a) Za autobusni prijevoz plaća se naknada 30 kn te 15 kn po prijeđenom kilometru. Funkcija – iznos prijevoza.
   b) Foto studio naplaćuje 11 kn razvijanje filma te 1.50 kn po fotografiji. Funkcija – iznos računa.
   c) Maja je za rođendan dobila 300 kn. Namjerava te novce potrošiti na skijanju i to 25 kn dnevno. Funkcija – preostali iznos novca.
   c) Telefonska kompanija zaračunava pretplatu 40 kn te 0.22 kn po minuti razgovora. Funkcija – iznos računa.
   d) U bazenu se nalazi 9000 L vode. Tijekom jednog sata iz njega se ispusti 150 L vode. Funkcija – preostala količina vode u bazenu.
   e) Krojačica za plaću dobiva 1500 kn plus 9 kn po svakom skrojenom komadu odjeće. Funkcija – iznos plaće.

5. Odredi nul-točku, sjecišta s koordinatnim osima, opiši tok te nacrtaj graf ovih linearnih funkcija:
   a) $y = -2x - 6$; b) $y = 3x - 3$;
   c) $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$; d) $y = -x + \frac{3}{4}$.

6. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi zadanom točkom i ima zadani koeficijent smjera. Prvi zadatak je riješen.
   a) (1, 5) i a = 3. U jednadžbu pravca $y = ax + b$ uvrstimo sve zadane podatke $5 = 3 \quad 1 + b$ i izračunamo $b = 2$. Jednadžba pravca je $y = 3x + 2$.
   b) (2, 4) i a = 2; c) (-1, 6) i a = -3;
   d) (-2, -5) i a = -4; e) (0, -7) i a = 5;
   f) (9, 3) i $a = \frac{1}{3}$.

7. Zadana je linearna funkcija $f(x) = 4x - 2$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
   a) koliki je koeficijent smjera;
   b) Koliki je odsječak na osi ordinata;
   c) odredi nul-točku te funkcije;
   d) odredi sjecišta s koordinatnim osima;
   e) opiši tok te funkcije;
   f) pripada li grafu točka D (1, 2)?
   g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = 10$;
   h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = 198$.

Vježbalica

1. Ispiši koeficijente smjera i odsječke na osi ordinata iz zadanih jednadžbi pravaca

jednadžba pravca	*a*	*b*
$y = 5x + 6$		
$y = 7x - 2$		
$y = -4x + 3.5$		
$y = \frac{1}{2}x + 3.6$		

2. Nacrtaj grafove linearnih funkcija.

a) $f(x) = -3x + 2$;

b) $f(x) = x + 4$;

c) $f(x) = -x$;

d) $f(x) = 2x - 3$;

e) $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$;

f) $f(x) = -x + \frac{1}{2}$.

3. Nacrtaj pravce

a) $y = \frac{2}{3}x + 1$;

b) $y = -\frac{1}{5}x + 1$;

c) $y = \frac{3}{4}x$;

d) $y = x - 2$;

e) $y = -\frac{2}{3}x + 1$;

f) $y = -x - 3$.

4. Napiši koordinate točke u kojoj pravac siječe os ordinata.

a) $y = \frac{5}{6}x - 3$;

b) $y = 3x$;

c) $y = \frac{1}{3}x - 1$

d) $y = -3x + \frac{1}{3}$.

5. Odredi nultočke zadanih linearnih funkcija

a) $f(x) = -x + 3$;

b) $f(x) = 5x - 1$;

c) $f(x) = \frac{5}{6}x - 1$;

6. Grafički i računski odredi sjecišta pravaca s koordinatnim osima:

a) $y = -x - 2$;

b) $y = x - 1$;

c) $y = \frac{3}{4}x - 3$;

d) $y = -\frac{2}{3}x$.

7. Grafički i računski odredi sjecišta pravaca s koordinatnim osima:

a) $y = \frac{1}{2}x - 1$;

b) $y = 3x - 1$;

c) $y = \frac{3}{2}x - 2$;

d) $y = -\frac{2}{3}x$.

8. Odredi nul-točku, sjecišta s koordinatnim osima, opiši tok te nacrtaj graf ovih linearnih funkcija:

a) $f(x) = -x + 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$;

c) $f(x) = 2x$;

d) $f(x) = -2x + \frac{1}{4}$;

e) $f(x) = x$.

9. Odredi nul-točku, sjecišta s koordinatnim osima, opiši tok te nacrtaj graf ovih pravaca:

a) $y = x - 3$;

b) $y = \frac{2}{3}x$;

c) $y = -2x + 1$;

d) $y = -3x + 1$;

e) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

10. Računski i grafički provjeri pripadaju li točke grafu linearne funkcije $f(x) = -x + \frac{1}{2}$

$A(1, 1)$; $B(-3, \frac{7}{2})$; $C(0, \frac{1}{2})$, $D(2, -1)$, $F(-1, \frac{3}{2})$; $G(0, 0)$.

11. Računski i grafički provjeri pripadaju li točke pravcu $y = -2x+1$

$A(1,-1)$; $B(0, 1)$; $C(2,-3)$, $D(-2,-5)$, $F(3,-5)$; $G(-1, 0)$.

12. Nacrtaj graf pravca $y = -x + 1$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.

$A(1,\_\_); B(0,\_\_); C(\_\_, 3), D(\frac{1}{2}, \_\_), F(\_\_, -\frac{1}{2}); G(\_\_, 0).$

13. Nacrtaj graf funkcije $y = 3x - 1$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.

$A(2,\_\_); B(-1,\_\_); C(\_\_, 0), D(0, \_\_), F(\_\_, \frac{1}{2});$
$G(\_\_, -\frac{5}{2}).$

14. Nacrtaj graf funkcije $y = x - 1$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.

$A(1,\_\_); B(2,\_\_); C(\_\_, \frac{1}{2}), D(0, \_\_),$
$F(\_\_, 0); G(\_\_, -\frac{7}{2}).$

15. Nacrtaj graf funkcije $y = 3x$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.

$A(2,\_\_); B(-\frac{1}{3},\_\_); C(\_\_, \frac{1}{2}), D(0, \_\_), F(\_\_,1);$
$G(\_\_, -\frac{3}{2}).$

16. Zadana je linearna funkcija $f(x) = 2x + 1$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(1, 3)$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = 10$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = 1$.

17. Zadana je linearna funkcija $f(x) = x - 2$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(0, 2)$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = 3$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = -8$.

18. Zadana je linearna funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi ;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(2, -1)$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = 0$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = -1$.

19. Zadana je linearna funkcija $f(x) = x$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(4, 2)$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = -\frac{2}{3}$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = 0$.

20. Zadana je linearna funkcija $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(1, -\frac{2}{3})$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = -3$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = 1$.

21. Zadana je linearna funkcija $f(x) = -\frac{1}{4}x - 2$. Nacrtaj njen graf i odgovori na pitanja:
a) koliki je koeficijent smjera;
b) koliki je odsječak na osi ordinata;
c) odredi nul-točku te funkcije;
d) odredi sjecište s ordinatnom osi;
e) opiši tok te funkcije;
f) pripada li grafu točka $D(4, -3)$?
g) izračunaj vrijednost funkcije za argument $x = 8$;
h) koliki je argument funkcije ako je njena vrijednost $f(x) = -2$.

22. Nacrtaj pravce $x = -1$; $y = 6$; $y = 3$; $y = -2$.

23. Nacrtaj pravce $x = 4$; $x = 2$; $x = -5$; $y = -1$.

24. Nacrtaj pravce $y = -7$; $y = 3$; $x = -1$; $y = -4$.

25. Nacrtaj pravce $x = 9$; $y = 4$; $y = -4$; $y = -6$.

26. Napiši jednadžbu pravca usporednog s x-osi koji prolazi zadanom točkom.

a) $A(2, -3)$; b) $B(-4, 1)$; c) $C(3, 4)$;

d) $D(5, -4)$; e) $F(0, 12)$; g) $G(-7, 0)$.

27. Napiši jednadžbu pravca usporednog s y-osi koji prolazi zadanom točkom.

a) $A(4, -3)$; b) $B(7, -1)$; c) $C(3, 7)$;

d) $D(3, -8)$; e) $F(7, 1)$; g) $G(0, 0)$.

28. Izračunaj površinu trokuta što ga s koordinatnim osima zatvara pravac:

a) $y = x + 4$; b) $y = \frac{1}{2}x - 2$; c) $y = 3x + 1$;

d) $y = -\frac{3}{4}x - 4$.

29. Pravac $y = ax + b$ prolazi točkama A i B. Odredi koeficijent smjera i jednadžbu tog pravca ako su koordinate točaka:

a) $A(-1, -2)$ i $B(0, 5)$; b) $A(3, 2)$ i $B(-7, 5)$;

c) $A(0, 6)$ i $B(5, 1)$; d) $A(-1, -3)$ i $B(-2, 4)$;

e) $A(-3, 5)$ i $B(-2, -1)$; f) $A(1, 2)$ i $B(9, 4)$.

30. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi zadanom točkom i ima zadani koeficijent smjera.

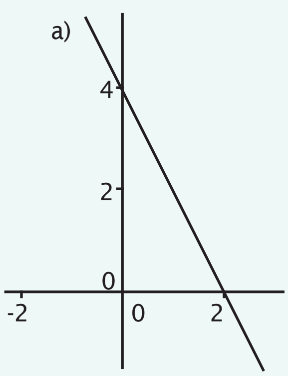
a) $(-1, -1)$ i $a = 2$; b) $(2, 4)$ i $a = -2$;

c) $(-1, 3)$ i $a = 3$; d) $(2, 3)$ i $a = \frac{1}{2}$;

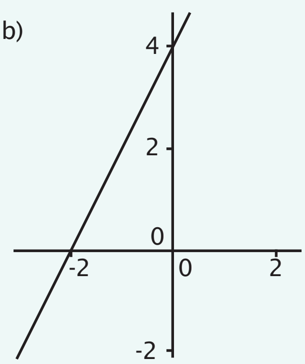
e) $(0, -1)$ i $a = 1$; f) $(0, 3)$ i $a = \frac{1}{3}$.

31. Koja slika prikazuje pravac $y = -2x + 4$

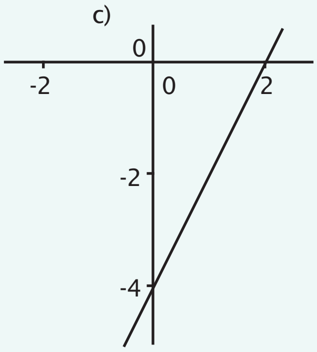
a)



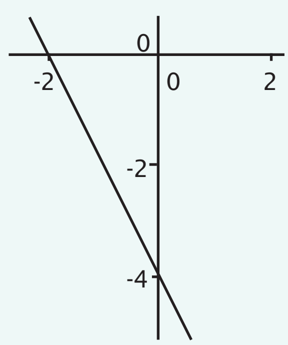
b)



c)

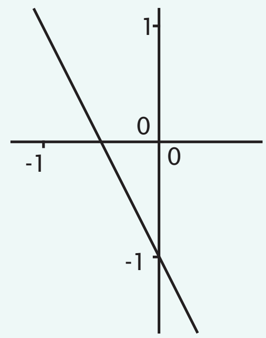


d)

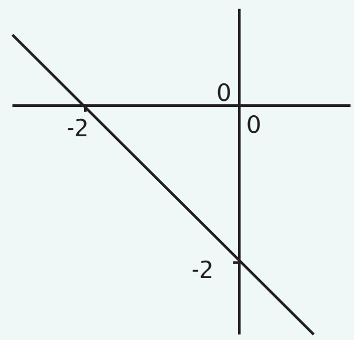


32. Napiši jednadžbe pravaca na slikama.

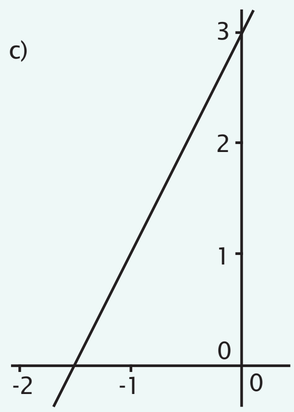
a)



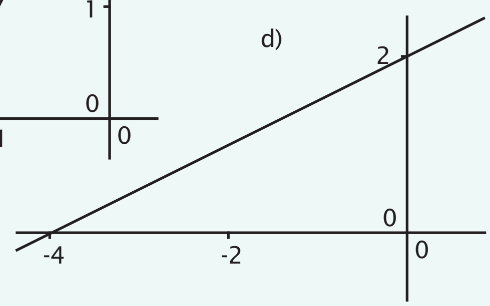
b)



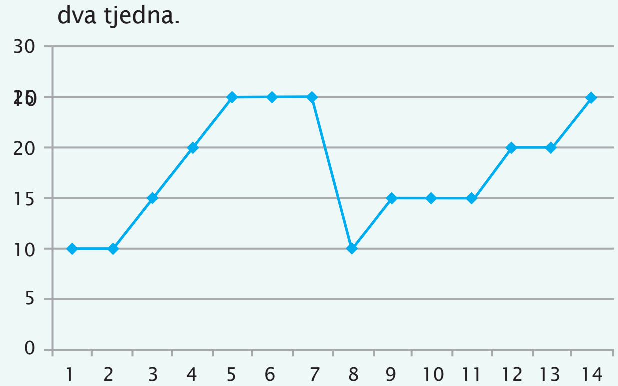
c)



d)



33. Graf prikazuje promjenu cijene dionica tijekom dva tjedna.



a) Koliko linearnih funkcija sačinjava ovaj prikaz?

b) Tijekom kojih dana se cijena dionica nije mijenjala?

c) Kada je cijena dionice doživjela najveći pad?

d) Koliko dana joj je trebalo da se nakon pada oporavi i vrati na cijenu prije pada?

e) Kako prepoznajemo dijelove grafa koji pokazuju da se cijena nije mijenjala?

f) Što pokazuju najstrmiji dijelovi grafa?

9.4. Grafičko rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Riješi sustav

$2x + y = 4$
$-3x + y = 1$

Sustave dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice naučili smo rješavati metodom supstitucije i metodom suprotnih koeficijenata. Znanje koje smo stekli proučavanjem linearne funkcije pomoći će nam da naučimo kako možemo sustave riješiti grafički, tj. crtanjem.

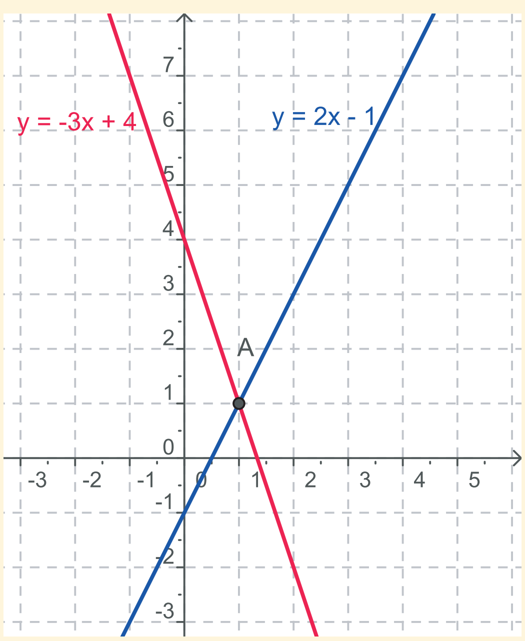
Primjer 1. Sjecište pravaca kao rješenje sustava

Grafički riješi sustav

$3x + y = 4$
$\underline{-2x + y = -1}$

Rješenje:

Da bismo zadane jednadžbe grafički prikazali najprije ćemo ih zapisati kao eksplicitne jednadžbe pravca. To znači da na lijevoj strani jednadžbe ostavljamo y, a ostale članove prebacujemo na desnu stranu jednadžbe.



$y = -3x + 4$
$\underline{y = 2x - 1}$

Tako dobivene jednadžbe znamo nacrtati u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini.

Označimo točku koja je zajednička za oba nacrtana pravca. Koordinate te točke, tj. sjecišta pravaca su rješenje zadanog sustava.

Dakle, rješenje sustava je (1, 1). Računski provjerimo rješenje:

$3 \cdot 1 + 1 = 4$
$\underline{-2 \cdot 1 + 1 = -1}$
$3 + 1 = 4$
$\underline{-2 + 1 = 1}$
$4 = 4$
$1 = 1$

Rješenje je točno.

Eksplicitna jednadžba pravca
$y = ax + b$

Važno

Rješenje sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice je sjecište pravaca određenih jednadžbama tog sustava.

Primjer 2.

Grafički riješi sustav

$4x + 2y = 2$

$\underline{2x + 3y = -5}$

Rješenje:

Zapisujemo obje jednadžbe u eksplicitnom obliku.

$2y = -4x + 2 \ /:2$

$\underline{3y = -2x - 5 \ /:(3)}$

$y = -2x + 1$

$\underline{y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}}$

Nacrtamo te pravce i odredimo njihovo sjecište.

Rješenje sustava je (2, −3).

Provjera:

$4 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) = 2$

$\underline{2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -5}$

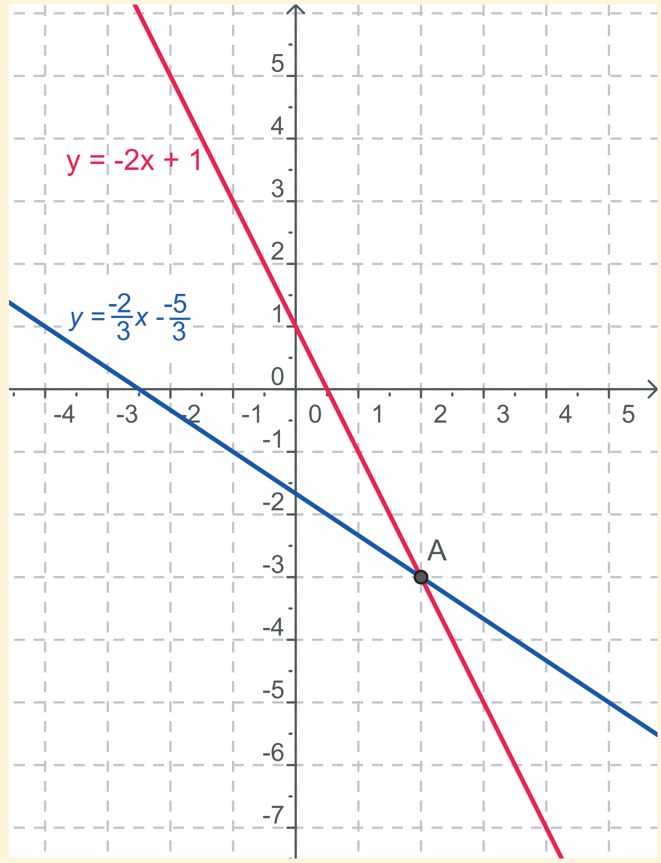
$8 - 6 = 2$

$\underline{4 - 9 = -5}$

$2 = 2$

$\underline{-5 = -5}$

Rješenje je točno.



Z a d a c i

1. Sustave riješi grafički. Jednadžbe su već zapisane u eksplicitnom obliku.

   a) $y = 2x + 2$
      $y = -x + 1$

   b) $y = 4x + 3$
      $y = -5x + 3$

   c) $y = \frac{1}{2}x + 2$
      $y = \frac{1}{4}x + 3$

   d) $y = \frac{1}{3}x + 4$
      $y = -\frac{5}{6}x - 3$

2. Sustave riješi grafički

   a) $3x + y = 9$
      $2x + y = 4$

   b) $4x + y = -5$
      $-2x + y = 7$

   c) $x + y = 2$
      $-3x + y = 2$

   d) $x + y = -5$
      $-4x + y = 10$

3. Sustave riješi grafički

   a) $2x - 3y = 8$
      $-3x + 2y = -10$

   b) $5x + 2y = -8$
      $-4x - y = 4$

   c) $x + 2y = 4$
      $3x + 4y = 11$

   d) $2x + y = -1$
      $x - y = -2$

   e) $2x + y = 2$
      $3x - 4y = 14$

4. Sustave riješi grafički

   a) $2x - y = -5$
      $3x + 8y = 2$

b) $2x + 3y = 27$
$-x + 2y = 11$

c) $2x + 3y = 4$
$4x - 4y = 28$

d) $2x + 3y = 5$
$5x - 6y = -28$

e) $-7x + 4y = -19$
$3x - 2y = 8$

5. Sustave riješi grafički

a) $3x - 2y = -1$
$6x + 7y = -13$

b) $-3x + 12y = 52.5$
$6x - 6y = -33$

c) $5x + 7y = 9$
$-4x - 3y = -2$

d) $3x + 2y = 7$
$-7x + 2y = -23$

Primjer 3. Usporedni pravci

$y = 4x - 2$
$y = 4x + 1$
$y = 4x + 3.$

a) Nacrtaj zadane pravce u istom koordinatnom sustavu.

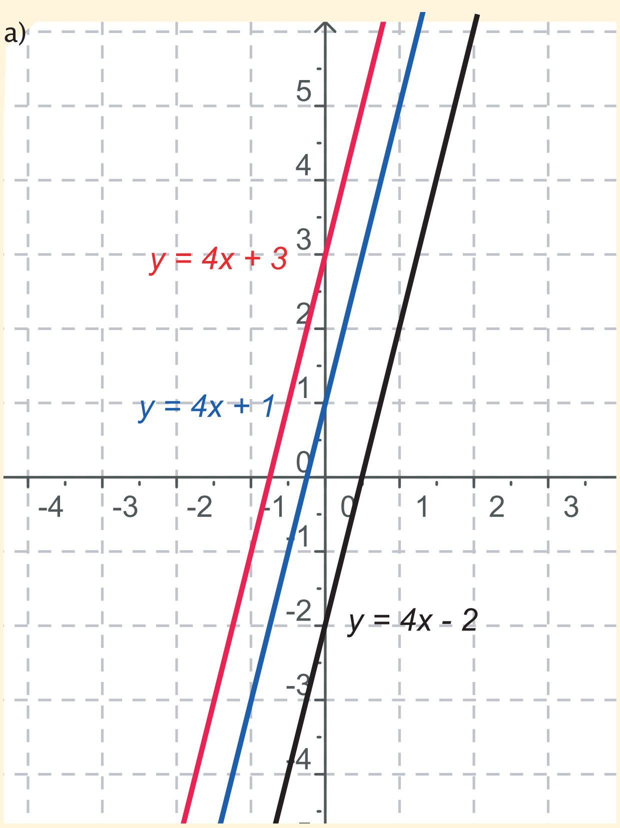
b) U kakvom položaju su ti pravci?

c) Pročitaj koeficijente smjera i odsječke na osi ordinata zadanih pravaca

d) Što primjećuješ?

Rješenje:

a)



b) Zadani pravci su usporedni

c)

jednadžba	koeficijent smjera	odsječak na osi ordinata
$y = 4x - 2$	4	-2
$y = 4x + 1$	4	1
$y = 4x + 3$	4	3

d) Primjećujemo da svi zadani pravci imaju jednak koeficijent smjera

Važno

Pravci su usporedni ako imaju jednake koeficijente smjera

Primjer 4. Sustav nema rješenja

Grafički riješi sustav

$2x + y = 5$

$4x + 2y = 12$

Rješenje:

Zapisujemo obje jednadžbe u eksplicitnom obliku.

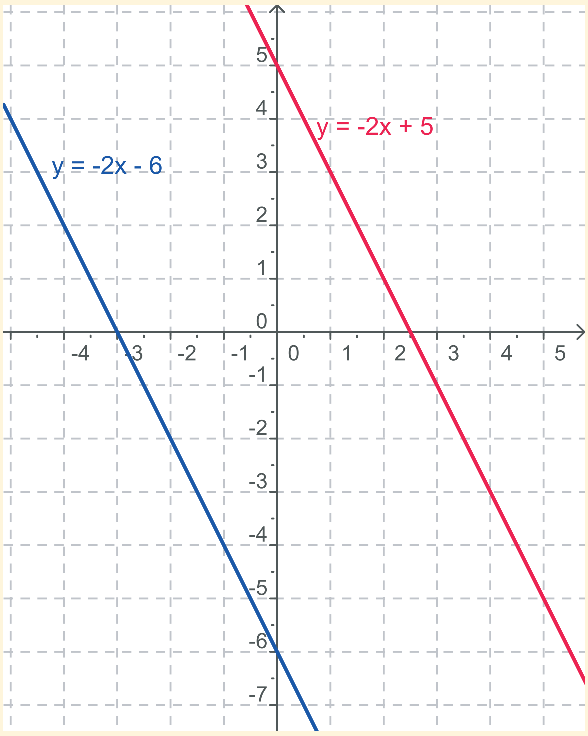
$y = -2x + 5$

$\underline{2y = -4x - 12}$

$y = -2x + 5$

$\underline{y = -2x - 6}$

Nacrtamo te pravce.



Na slici vidimo da su ti pravci usporedni, dakle ne sijeku se. Prema tome zadani sustav nema rješenja.

Nema rješenja

Pokušajmo riješiti taj sustav metodom supstitucije:

$y = -2x + 5$

$\underline{y = -2x - 6}$

$-2x + 5 = -2x - 6$

$-2x + 2x = -6 - 5$

$0 \cdot x = -11$

Dobili smo jednadžbu koja nema rješenja jer ne postoji x koji bi pomnožen s nulom dao broj -11.

Važno

Ako dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice određuju dva usporedna pravca onda taj sustav nema rješenja

Primjer 5. Beskonačno mnogo rješenja

Grafički riješi sustav

$3x + y = 5$

$6x + 2y = 10$

Rješenje:

Zapisujemo obje jednadžbe u eksplicitnom obliku.

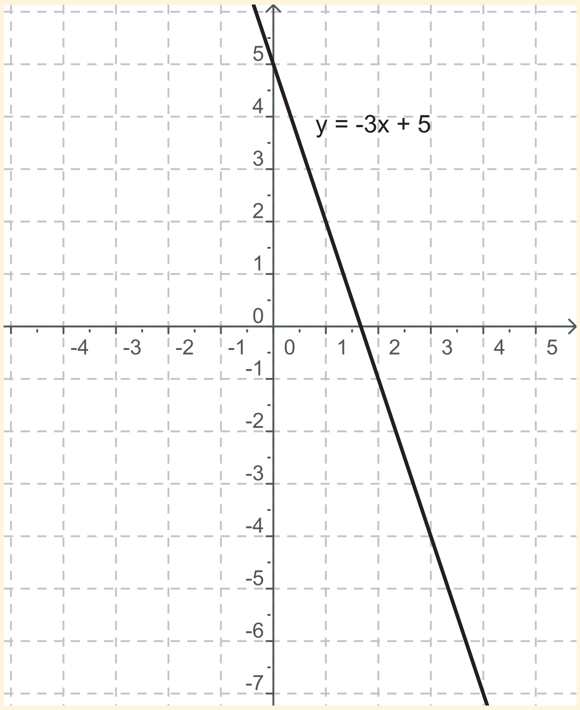
$y = -3x + 5$

$\underline{2y = -6x + 10}$

$y = -3x + 5$

$\underline{y = -3x + 5}$

Primjećujemo da su obje jednadžbe sustava iste. Nacrtamo li te pravce, dobivamo zapravo dva pravca jedan na drugom, tj. te dvije jednadžbe određuju samo jedan pravac.



beskonačno mnogo rješenja

U tom slučaju zadani sustav ima beskonačno mnogo rješenja jer svaki uređeni par koji zadovoljava prvu jednadžbu ujedno zadovoljava i drugu jednadžbu.

Rješenja su primjerice: $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, (1, 2), (0, 5), (11, –28) itd.

Pokušajmo riješiti taj sustav metodom supstitucije:

$y = -3x + 5$

$\underline{y = -3x + 5}$

$-3x + 5 = -3x + 5$

$-3x + 3x = 5 - 5$

$0 \cdot x = 0.$

Ta jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja jer za x možemo uzeti bilo koji racionalan broj.

Važno

Ako dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice određuju isti pravac onda sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice može:
- imati jedno rješenje
- nemati rješenja
- imati beskonačno mnogo rješenja

Zadaci

6. Bez rješavanja odredi ima li sustav jedno, niti jedno ili beskonačno mnogo rješenja.

   a) $y = 2x + 5$
   $y = 2x - 1$

   b) $y = \frac{2}{3}x - 2$
   $2x - 3y = 6$

   c) $2x + 3y = 6$
   $4x + 6y = -12$

   d) $-3x + 12y = 52.5$
   $6x - 6y = -33$

7. Bez rješavanja odredi ima li sustav jedno, niti jedno ili beskonačno mnogo rješenja.

   a) $3x + y = -2$
   $6x + 2y = 4$

   b) $2x + 3y = 4$
   $4x - 4y = 28$

   c) $x - \frac{1}{2}y - 3 = 0$
   $2x - y - 6 = 0$

   d) $12x - 3y = 15$
   $8x - 2y = 2$

   e) $5x + 2y = -8$
   $-4x - y = 4$

8. Razvrstaj zadane pravce u skupine međusobno usporednih pravaca
   $2x + 2y = 10$; $5x - 3y = 7$; $10x - 6y = 6$; $9x + 10 = 6y$; $-6x + 4y = 6$; $x + y = 4$; $4x - 15 = -4y$; $20x - 5 = 12y$; $-3x + 2y = 4$.

9. Napiši po tri pravca koja su usporedni sa zadanim

   a) $y = -\frac{5}{6}x + 2$; b) $y = 3x - 6$;
   c) $2x - 5y = 7$; d) $-4x + 6y = 3$;
   e) $-11x + 12y = 13$.

10. Napiši po dva sustava koji
   a) nemaju rješenja
   b) imaju jedno rješenje
   c) imaju beskonačno mnogo rješenja

11. Telefonska kompanija Bell zaračunava pretplatu 80 kn te 0.40 kn po minuti razgovora. Telefonska kompanija Tesla zaračunava pretplatu 40 kn te 0.50 kn po minuti razgovora.

    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koji broj minuta su ponude jednake te koliko iznosi račun za taj broj minuta razgovora.

12. Cvjećarka Glorija dobila je dvije ponude za posao. Salon Tulipan nudi joj 1200 kn plus 4.5 kn po svakom prodanom buketu cvijeća, a salon Ruža 1500 kn plus 2 kn po svakom prodanom buketu cvijeća.
    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koji buketa cvijeća su ponude jednake te kolika bi bila Glorijina plaća za taj broj buketa.

13. U rent-a-caru Bugi iznajmljivanje automobila naplaćuju 300 kn plus 6 kn po prijeđenom kilometru. U rent-a-caru Dugi iznajmljivanje automobila naplaćuju 400 kn plus 3.5 kn po prijeđenom kilometru.

    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koju duljinu puta su ponude jednake te koliko iznosi račun za taj broj kilometara.

14. Taksi služba Zagreb naplaćuje početnu cijenu 25 kn te 8 kn po prijeđenom kilometru. Taksi služba Varaždin naplaćuje početnu cijenu 40 kn te 6 kn po prijeđenom kilometru.

    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koju duljinu puta su ponude jednake te koliko iznosi račun za taj broj kilometara.

15. Prodavač treba odabrati tržnicu na kojoj će prodavati šljive. Na tržnici Siget treba platiti prodajno mjesto 400 kn, a očekuje da će šljive prodavati po 5 kn za kilogram. Na tržnici Špansko treba platiti prodajno mjesto 500 kn, a očekuje da će šljive prodavati po 7 kn za kilogram.

    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koji broj kilograma šljiva su ponude jednake te koliko iznosi zarada za tu količinu šljiva.

16. Foto studio Jedan naplaćuje 12 kn razvijanje filma te 3 kn po fotografiji. Foto studio Dva naplaćuje 18 kn razvijanje filma te 1.5 kn po fotografiji.
    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koji broj fotografija su ponude jednake te koliko iznosi račun za taj broj fotografija.

17. Matijini roditelji dobili su dvije ponude za zidanje kuće. Majstor Ivan naplaćuje svoj dolazak 50 kn, te svaki sat rada 45 kn. Majstor Stjepan ne naplaćuje dolazak, a svaki sat rada naplaćuje 70 kn.
    Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda, odredi za koji broj radnih sati su ponude jednake te koliko iznosi račun za taj broj sati.

Primjer 6. Povoljnija ponuda

Tvrtka Limun naplaćuje korištenje mobitela 1 kn po minuti i mjesečnu pretplatu 100 kn. Tvrtka Naranča naplaćuje korištenje mobitela 2 kn po minuti i mjesečnu pretplatu 50 kn. Odgovorite na pitanja i razmislite koja ponuda bi bila povoljnija za vaše potrebe.

a) Opišite što ćete prikazati kojom varijablom

b) Zapišite karakteristike svake ponude u tablicu i napišite formulu funkcije

	Tvrtka Limun	Tvrtka Naranča
pretplata		
po minuti		
formula funkcije		

c) Nacrtajte grafički prikaz obje funkcije i odredite zajedničku točku.

d) Dopunite tekst

Tvrtke Limun i Naranča imaju jednaku ponudu ako mobitel koristimo ___ minuta.

Za upotrebu mobitela manju od __ minuta povoljnija je ponuda tvrtke _____. Za upotrebu mobitela veću od __ minuta povoljnija je ponuda tvrtke _____.

Ukoliko namjeravamo koristiti mobitel 25 minuta mjesečno, trebali bismo odabrati tvrtku _____. Ukoliko namjeravamo koristiti mobitel 100 minuta mjesečno, trebali bismo odabrati tvrtku ____.

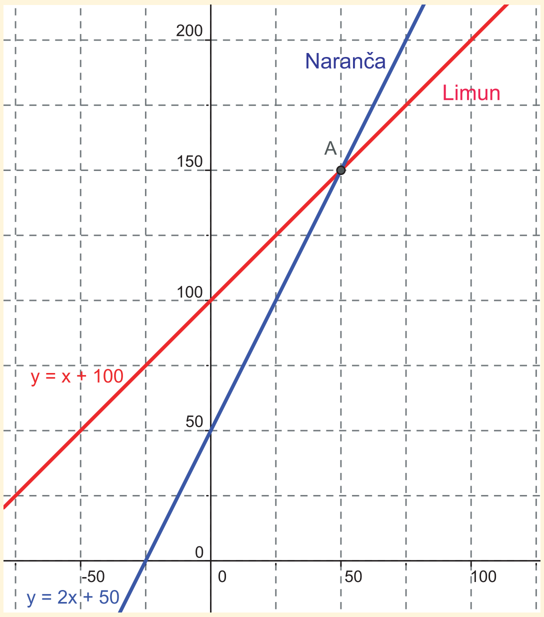
Rješenje:

a) Opišite što ćete prikazati kojom varijablom
x – broj minuta razgovora
y – mjesečna cijena u kunama

b) Zapišite karakteristike svake ponude u tablicu i napišite formulu funkcije

	Tvrtka Limun	Tvrtka Naranča
pretplata	100	50
po minuti	1	2
formula funkcije	$f(x) = 1x + 100$	$f(x) = 2x + 50$

c) Nacrtajte grafički prikaz obje funkcije i odredite koordinate sjecišta.



Zajednička točka, tj. sjecište je (50 , 150)

Na nacrtanom grafu vidimo da je za $x < 50$ crveni pravac ($y = x + 100$) iznad plavog pravca ($y = 2x + 50$) to znači da je za te vrijednosti ponuda tvrtke Limun skuplja.

Za $x > 50$ crveni pravac ($y = x + 100$) je ispod plavog pravca ($y = 2x + 50$) to znači da je za te vrijednosti ponuda tvrtke Naranča skuplja. Za $x = 50$ obje tvrtke imaju jednaku ponudu koja iznosi 150.

d) Tvrtke Limun i Naranča imaju jednaku ponudu ako mobitel koristimo 50 minuta.

Za upotrebu mobitela manju od 50 minuta povoljnija je ponuda tvrtke Naranča. Za upotrebu mobitela veću od 50 minuta povoljnija je ponuda tvrtke Limun.

Ukoliko namjeravamo koristiti mobitel 25 minuta mjesečno, trebali bismo odabrati tvrtku Naranča. Ukoliko namjeravamo koristiti mobitel 100 minuta mjesečno, trebali bismo odabrati tvrtku Limun.

Zadaci

18. Foto studio Jedan naplaćuje 10 kn razvijanje filma te 2.50 kn po fotografiji. Foto studio Dva naplaćuje 15 kn razvijanje filma te 2 kn po fotografiji.
 a) Za obje ponude prikaži formulom iznos računa (y) ovisno o broju izrađenih fotografija (x);
 b) Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda;
 c) Koja ponuda je povoljnija za izradu 5 fotografija, a koja za izradu 20 fotografija?

19. Telefonska kompanija Zvono zaračunava pretplatu 69 kn te 0.45 kn po minuti razgovora. Telefonska kompanija Brzoglas zaračunava pretplatu 50 kn te 0.25 kn po minuti razgovora.

a) Za obje ponude prikaži formulom iznos računa (y) ovisno o broju minuta razgovora (x);

b) Nacrtaj grafički prikaz obiju ponuda;

c) Koja ponuda je povoljnija ukoliko za razgovore trebamo 80 minuta, a koja za 150 minuta?

20. Cvjećarka Glorija dobila je dvije ponude za posao. Salon Frezija nudi joj 1000 kn plus 5 kn po svakom prodanom buketu cvijeća, a salon Orhideja 1500 kn plus 2 kn po svakom prodanom buketu cvijeća. Koju ponudu bi trebala odabrati ako očekuje da će prodati 100 buketa cvijeća, a koju ako očekuje prodaju 200 buketa cvijeća?

21. U rent-a-caru Brzi iznajmljivanje automobila naplaćuju 500 kn plus 4.5 kn po prijeđenom kilometru. U rent-a-caru Najbrži iznajmljivanje automobila naplaćuju 400 kn plus 5 kn po prijeđenom kilometru.

a) U kojoj tvrtki je povoljnije iznajmiti automobil za put dugačak 150 km, a u kojoj za put dugačak 300 km?

b) Koliko bi uštedjeli ako za put duljine 500 km odaberemo povoljniju tvrtku?

22. Taksi služba Žuti naplaćuje početnu cijenu 30 kn te 6 kn po prijeđenom kilometru. Taksi služba Plavi naplaćuje početnu cijenu 20 kn te 8 kn po prijeđenom kilometru. Koju taksi službu ćemo pozvati ako želimo da na nas odvezu do kazališta udaljenog 3 km, a koju ako želimo otići do aerodroma udaljenog 18 km?

23. Lukini roditelji dobili su dvije ponude za bojanje stana. Majstor Karlo naplaćuje svoj dolazak 65 kn, te svaki sat rada 50 kn. Majstor Franjo ne naplaćuje dolazak, a svaki sat rada naplaćuje 75 kn. Koja ponuda je povoljnija ako očekuju da će posao trajati 2 sata, a koja ako će posao trajati 6 sati?

24. Prodavač treba odabrati tržnicu na kojoj će prodavati jabuke. Na tržnici Ravnica treba platiti prodajno mjesto 400 kn, a očekuje da će jabuke prodavati po 5 kn za kilogram. Na tržnici Brijeg treba platiti prodajno mjesto 500 kn, a očekuje da će jabuke prodavati po 7 kn za kilogram. Na kojoj tržnici će zaraditi više ako očekuje prodaju 40 kg jabuka, a na kojoj ako očekuje prodaju 100 kg jabuka?

25. Telefonska kompanija naplaćuje pretplatu prema odabranoj brzini za povezivanje na internet te određeni iznos po svakom GB prometa. Luka je dobio ponude za 3 paketa usluga za pristup internetu.

Paket	Brzina	Pretplata	Iznos po GB prometa
Surf	1024/192 Kbps	79.00 kn	20 kn
Giga	2048/256 Kbps	199.00 kn	5 kn
Flat	3072/384 Kbps	369.00 kn	0 kn

a) Napiši formulu za izračun cijene računa za internet za svaki od ponuđenih paketa;

b) Koju ponudu Luka treba odabrati ako očekuje da će mu promet na internetu biti:
0.5 GB; 5 GB; 13.5 GB; 20 GB; 50 GB

c) Potraži informacije o aktualnim cijenama pristupa internetu, pa razmisli koji bi odgovarao tvojim potrebama.

26. Matijin tata dobio je ponudu za posao iz dva salona automobila. U salonu Elegancija nude mu plaću 3000 kn uz dodatak 100 kn po svakom prodanom automobilu, a u salonu Udobnost mu nude plaću 4000 kn uz dodatak 50 kn po svakom automobilu. Za koji broj prodanih automobila su te ponude jednake? Koju ponudu bi trebao odabrati ako očekuje da će mjesečno prodati 10 automobila? Koju ponudu bi trebao odabrati ako očekuje da će mjesečno prodati 40 automobila?

Grafičko rješavanje sustava u GeoGebri

Programi za dinamičku geometriju mogu vam pomoći i u određivanju rješenja sustava. Lako je sustav riješiti grafički ili samo provjeriti rješenje dobiveno računanjem. Pritom jednadžbe ne morate upisivati u eksplicitnom obliku. Primjerice, jednadžbe ovog sustava upišete u *Polje za unos* točno ovako kako pišu:

2(5x – 3y) – 4(–6+2x–5y)=–22

4x–5(2+5y–3x)=3(3x–2y+9)

GeoGebra će nacrtati pravce, a u algebarskom prozoru vidjet ćete te jednadžbe zapisane u standardnom obliku:

$10x - 19y = 37$

$2x + 14y = -46$

Da biste dobili rješenje sustava upotrijebite alat *Sjecište dvaju objekata* te kliknite najprije na jedan pa na drugi pravac. U algebarskom prozoru moći ćete pročitati koordinate sjecišta tih pravaca, tj. rješenje sustava.

Rješenje ovog sustava je (–2, –3)

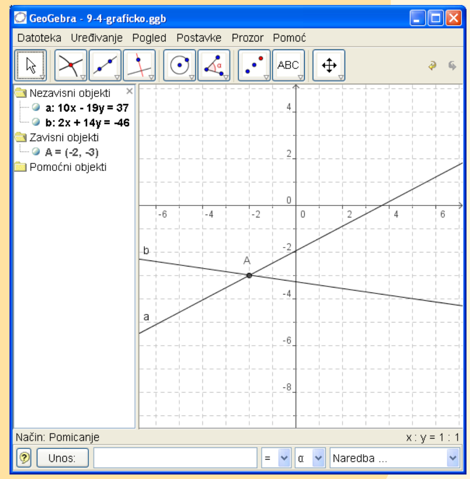
Da biste upisali neku jednadžbu s razlomcima zatrebat će vam zagrade, a razlomačku crtu zapisujete s /. Primjerice, sustav:

$$\frac{x+3}{5} + \frac{y-5}{4} = 5$$
$$\frac{x+5}{2} - \frac{y-8}{3} = 3$$

Upisujete ovako:
(x+3)/5+(y–5)/4=5

(x+5)/2–(y–8)/3=3

Rješenje je (7, 17)



Vježbalica

1. Sustave riješi grafički i računski

a) $2x + y = 3$
   $y = -3x + 4$

b) $y = 2x + 5$
   $4x - y = -7$

c) $3x - 2y = 4$
   $-\frac{3}{2}x + y = -2$

d) $x + 2y = -6$
   $3x - y = 3$

2. Sustave riješi grafički i računski

a) $3x - y = 4$
   $-6x + 2y = 3$

b) $2x + 3y = -1$
   $y = -x$

c) $3x - y = 6$
   $y = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 2$
   $2x - y = 8$

3. Sustave riješi grafički i računski

a) $x + 4y = 3$
   $-3x - 12y = 2$

b) $x = 2$
   $3x + 4y = 1$

c) $2x + 2y = 2$
   $5x - y = 5$

d) $x + y = 5$
   $y = \frac{1}{4}x$

4. Bez rješavanja odredi ima li sustav jedno, niti jedno ili beskonačno mnogo rješenja

a) $3x + 2y = 4$
   $-1.5x - y = -2$

b) $2x + 3y = 5$
   $x + 2y = 4$

c) $x - y = 7$
   $2x - 2y = 3.5$

d) $3x - 2y = 4$
   $2x - 3y = 4$

e) $x + 2y = 3$
   $2x + 4y = 6$

f) $3x - 5y = 6$
   $-x + \frac{5}{3}y = 2$

g) $2x + 3y = 4$
   $-x - \frac{3}{2}y = -2$

5. Razvrstaj zadane pravce u skupine međusobno usporednih pravaca

$2x + y = 1$; $5x - 2y = 0$; $10x - 4y = 6$; $x + 10 = y$; $-6x - 3y = 6$; $x - y = 4$; $4x - 15 = -2y$; $20x - 5 = 8y$; $-3x + 3y = 4$.

6. Razvrstaj zadane pravce u skupine međusobno usporednih pravaca

$2x + 3y = 10$; $5x - y = 7$; $9x + 10 = 6y$; $3x - 2y = 4$; $4x - 15 = -4y$; $20x - 5 = 4y$; $6x + 6y = 10$; $4x + 6y = 4$; $10x - 2y = 6$.

7. Razvrstaj zadane pravce u skupine međusobno usporednih pravaca

$2x + 5y = 10$; $5x - 3y = 7$; $10x - 6y = 8$; $9x + 10 = y$; $-6x + 15y = 6$; $-9x + y = 4$; $4x - 15 = -10y$; $20x = 12y$; $-3x + \frac{1}{3}y = 4$.

9.5. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

1. Koji je opći oblik linearne funkcije?
2. Kako nazivamo koeficijent a u linearnoj funkciji $f(x)=ax+b$ i koje je njegovo značenje?
3. Kako nazivamo koeficijent b u linearnoj funkciji $f(x)=ax+b$ i koje je njegovo značenje?
4. Pročitaj koeficijent smjera ove linearne funkcije $f(x) = 5x - 4$.
5. Pročitaj odsječak na osi ordinata ove linearne funkcije $f(x) = -2x -3$.
6. Kako možemo prikazati linearnu funkciju?
7. Što je grafički prikaz linearne funkcije?
8. Kad neka točka pripada pravcu?
9. Kako glasi eksplicitna jednadžba pravca?
10. Gdje se nalazi nultočka linearne funkcije?
11. S kojom osi je usporedan pravac $y = 5$?
12. S kojom osi je usporedan pravac $x = 5$?
13. Navedi dva primjera linearne funkcije koja je rastuća. Po čemu prepoznajemo rastuću linearnu funkciju?
14. Navedi dva primjera linearne funkcije koja je padajuća. Po čemu prepoznajemo padajuću linearnu funkciju?
15. Kakve jednadžbe imaju usporedni pravci?
16. Koji sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice nema rješenja?
17. Koji sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja?

Zadaci za ponavljanje:

1. Napiši formulu funkcije i izračunaj njenu vrijednost za $x = 10$.
   a) Za račun za struju naplaćuje se stalna naknada 15 kn te 0.70 kn po potrošenom kW struje.
   b) Taksi služba naplaćuje početnih 30 kn te 7.5 kuna po prijeđenom kilometru.
   c) Za autobusni prijevoz plaća se naknada 100 kn te 30 kn po kilometru.
   d) Foto studio naplaćuje 10 kn razvijanje filma te 1 kn po fotografiji.
2. Izračunaj vrijednosti funkcije za zadane brojeve, a zatim je prikaži u koordinatnom sustavu. Napiši je li funkcije rastuća ili padajuća.

   a) $f(x) = 2x + 1$;

x	$f(x)$
-2	
-1	
0	
1	
2	

   b) $f(x) = -3x + 2$;

x	$f(x)$
-4	
-2.5	
0	
2	
3.5	

   c) $f(x)=-\frac{3}{2}x-1$

x	$f(x)$
-6	
$-\frac{2}{3}$	
0	
$\frac{4}{3}$	
4	

3. Majstor Francek naplaćuje svoj dolazak 50 kn, te svaki sat rada 25 kn. Koliko je trajao posao ako je majstor ispostavio račun na 350 kn?
4. Linearna funkcija zadana je formulom $f(x) = 0.4x - 2.3$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost:
   a) -2.3;   b) -0.3;   c) 5.7.

5. Maja je za rođendan dobila 350 kn. Namjerava te novce trošiti na pecivo za užinu, pa joj je svaki dan potrebno 5 kn. Koliko dana je Maja kupovala pecivo ako joj je preostalo 200 kn ušteđevine? Koliko dana bi joj potrajala ušteđevina ako bi trošila svaki dan 7 kn?

6. Nacrtaj grafove linearnih funkcija.
   a) $f(x) = -x + 2$; b) $f(x) = -2x + 4$;
   c) $f(x) = x$; d) $f(x) = 2x - 1$;
   e) $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$; f) $f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$
   g) $f(x) = 6x$; h) $f(x) = -5x$.
   i) $f(x) = \frac{3}{2}x + 1.5$; j) $f(x) = -\frac{3}{7}x + \frac{1}{4}$.

7. Prepiši, pa ispiši koeficijente smjera i odsječke na osi ordinata iz zadanih jednadžbi pravaca. Prema koeficijentu smjera odredi je li funkcija rastuća ili padajuća i odredi koordinate sjecišta sa osi ordinata

jednadžba pravca	*a*	*b*	rast ili pad	sjecište s osi ordinata
$y = 3x + 5$				
$y = -7x - 11$				
$y = -4.6x + 1.5$				
$y = \frac{3}{4}x + 2.6$				

8. Prepiši točke u bilježnicu. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 2x - 1$. Iskoristi nacrtani pravac da odrediš koordinate točaka na tom pravcu.
   $A(1, \_\_)$; $B(3, \_\_)$; $C(\_\_, 3)$, $D(-2, \_\_)$, $F(\_\_, -3)$; $G(\_\_, 0)$.

9. Koje od ovih točaka pripadaju grafu funkcije $f(x) = -\frac{3}{4}x + 5$
   $A(2, \frac{7}{2})$; $B(-2, 3)$; $C(4, 2)$, $D(-8, 11)$,
   $F(-6, 15)$; $G(6, -\frac{7}{4})$.

10. Odredi sjecišta pravaca s koordinatnim osima:
    a) $y = -2x - 8$; b) $y = 3x + 6$;
    c) $y = \frac{3}{2}x - 1$; d) $y = -\frac{2}{3}x + 4$;
    e) $y = 5x - 2$; f) $y = -6x - -4.2$;
    g) $y = -\frac{2}{5}x + 21$.

11. Nacrtaj pravce
    $x = 3$; $y = 2$; $x = -1$; $y = 3$; $x = 5$; $y = -2$;
    $x = 4$; $y = -3$; $x = -5$; $y = 6$.

12. Odredi bez crtanja je li linearna funkcija rastuća ili padajuća:
    a) $f(x) = 7x - 14$; b) $f(x) = -14x + 1$;
    c) $f(x) = 9.99x - 2$; d) $f(x) = -47x - 45$;
    e) $f(x) = -111x + 15$; f) $f(x) = \frac{31}{4}x + \frac{15}{19}$;
    g) $f(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{6}{11}$; h) $f(x) = \frac{13}{9}x - 6.2$.

13. Odredi za koje vrijednosti x je $y < 0$, a za koje je $y > 0$.
    a) $y = -3x - 6$; b) $y = 4x - 8$; c) $y = \frac{5}{2}x + 2$.

14. Stolar Filip dobio je dvije ponude za posao. Tvrtka Bukva nudi mu 1000 kn plus 20 kn po svakom prodanom komadu namještaja, a tvrtka Hrast 1500 kn plus 15 kn po svakom prodanom komadu namještaja. Koju ponudu bi trebala odabrati ako očekuje da će se prodati 80 komada namještaja, a koju ako očekuje prodaju 200 komada namještaja?

15. U rent-a-caru Autić iznajmljivanje automobila naplaćuju 300 kn plus 6.5 kn po prijeđenom kilometru. U rent-a-caru Vlakić iznajmljivanje automobila naplaćuju 400 kn plus 5 kn po prijeđenom kilometru.
    a) U kojoj tvrtki je povoljnije iznajmiti automobil za put dugačak 50 km, a u kojoj za put dugačak 100 km?
    b) Koliko bi uštedjeli ako za put duljine 300 km odaberemo povoljniju tvrtku?

16. Sustave riješi grafički
    a) $y = \frac{1}{3}x + 4$
    $y = -\frac{5}{6}x - 3$;
    b) $3x + y = 9$
    $2x + y = 4$;
    c) $5x + 2y = -8$
    $-4x - y = 4$
    d) $-7x + 4y = -19$
    $3x - 2y = 8$

17. Bez rješavanja odredi ima li sustav jedno, niti jedno ili beskonačno mnogo rješenja.
    a) $9x + 3y = -6$
    $6x + 2y = 4$;
    b) $5x + 3y = -4$
    $5x - 5y = 20$;
    c) $4x - 2y - 12 = 0$
    $x - \frac{1}{2}y - 3 = 0$;
    d) $12x - 3y = 15$
    $4x - 6y = -2$;

e) $8x + 2y = -5$
$-4x - y = 4$.

18. Napiši po tri pravca koja su usporedni sa zadanim

a) $y = -\frac{1}{7}x + 5$;
b) $y = 11x - 12$;
c) $3x - 7y = 2$.

Igra

Svakodnevna linearna

Istražite koji računi u svakodnevnom životu (struja, plin, voda, telefon, prehrana i sl.) se mogu prikazati linearnom funkcijom. Odaberite jednu od tih funkcija, pa je detaljnije opišite i usporedite različite ponude. Rezultate istraživanja prikažite u obliku plakata ili prezentacije.

Primjerak oglednog testa:

1. Zadana je linearna funkcija $f(x) = \frac{3}{2}x - 3$.
   a) Grafički prikaz linearne funkcije je ______________;
   b) Koeficijent smjera ______________;
   c) Odsječak na osi ordinata ______________;
   d) Ta funkcija je ______________;
   e) Nacrtaj grafički prikaz te funkcije;
   f) Napiši koordinate sjecišta s osi ordinata;
   g) Napiši koordinate sjecišta s osi apscisa.

2. Za zadani sustav napiši koliko rješenja ima i u kakvom se položaju nalaze pravci određeni tim jednadžbama. Sustav ne treba rješavati.
   $2x - 3y = 7$
   $3x - 2y = 4$

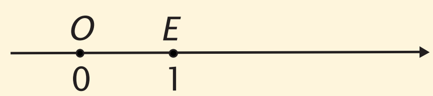
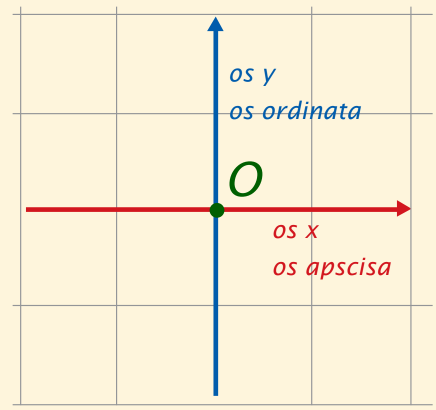
3. Prijevoz
   Tvrtka G naplaćuje početnu cijenu prijevoza 30 kn, a svaki kilometar 2 kn. Tvrtka H naplaćuje po kilometru 3 kn, a početna cijena im je 20 kn.
   Odgovorite na pitanja.
   a) Opišite što ćete prikazati kojom varijablom
   x -
   y -
   b) Zapišite karakteristike svake ponude u tablicu i napišite formulu funkcije

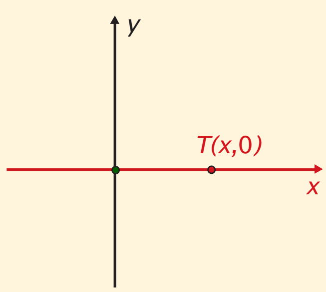
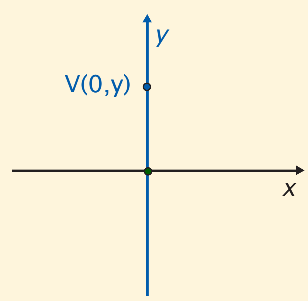
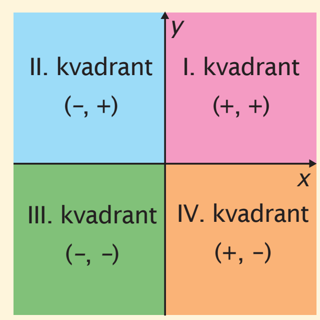
	Tvrtka G	Tvrtka H
početna cijena		
po kilometru		
formula funkcije		

   c) Nacrtajte grafički prikaz obje funkcije i odredite koordinate sjecišta.
   Koordinate sjecišta su (,)
   d) Tvrtke G i H imaju jednaku ponudu ako je udaljenost ________ kilometara.
   Za prijevoz na udaljenost manju od ______ kilometara povoljnija je ponuda tvrtke ____.
   Za prijevoz na udaljenost veću od ________ kilometara povoljnija je ponuda tvrtke ____.
   Ukoliko želimo prijevoz do mjesta koje je udaljeno 5 km, trebali bismo odabrati tvrtku ________.
   Ukoliko želimo prijevoz do mjesta koje je udaljeno 20 km, trebali bismo odabrati tvrtku ________.

10. Završno ponavljanje

Koordinatni sustav

Koordinatni sustav na pravcu	Pravokutni koordinatni sustav
	

Točka na x-osi	Točka na y- osi	Kvadranti
		

Omjeri i proporcije

Omjer dvaju brojeva $a : b = \frac{a}{b}$.	Jednakost omjera $a : b = c : d$ naziva se **proporcija ili razmjer** i vrijedi $a \cdot d = b \cdot c$
Dvije veličine su međusobno **proporcionalne** ako iz povećanja (smanjenja) jedne veličine slijedi proporcionalno povećanje (smanjenje) druge veličine. Količnik dviju proporcionalnih veličina je stalan. $k = \frac{y}{x}$ ili $k = y : x$.	Dvije veličine su međusobno **obrnuto proporcionalne** ako iz povećanja (smanjenja) jedne veličine slijedi proporcionalno smanjenje (povećanje) druge veličine. Umnožak dviju obrnuto proporcionalnih veličina je stalan. $k = x \cdot y$.

Postotni i kamatni račun

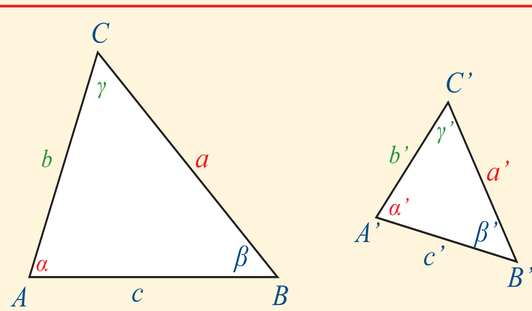
Postotak označava omjer nekog broja naprema 100.		**Jednostavni kamatni račun**	
Postotni iznos - y Postotak - $p\%$ Osnovna vrijednost - x.	$y = p\% \cdot x$	kamate - k glavnica - g kamatna stopa - s vrijeme (godine) - v	$k = g \cdot s \cdot v$

Osnove statistike i vjerojatnosti

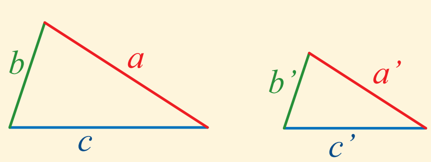
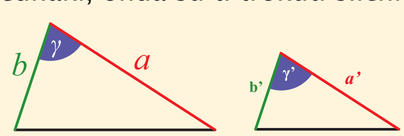
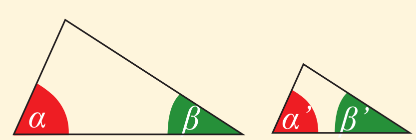
Stupčasti dijagram	grafički prikaz koji se sastoji od niza pravokutnika jednakih širina, a visina mu odgovara različitim vrijednostima promatranog obilježja.
Frekvencija	broj koji nam kazuje koliko puta se ta vrijednost pojavila u nekom skupu.
Relativne frekvencije	računamo tako da svaku frekvenciju podijelimo s ukupnim brojem pojavljivanja u nekom skupu. Zbroj svih relativnih frekvencija nekog skupa uvijek mora biti 1.
Aritmetička sredina n brojeva	$\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_n}{n}$.
Vjerojatnost nekog događaja A	$P(A) = \dfrac{\text{broj povoljnih elementarnih događaja}}{\text{ukupan broj elementarnih događaja}}$.

Sličnost trokuta

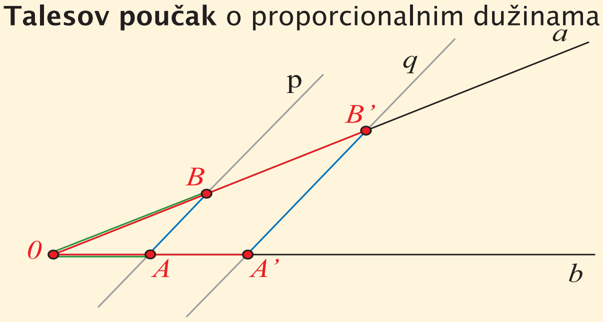
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \,, \quad \frac{o_1}{o} = k \,, \quad \frac{P_1}{P} = k \cdot k$$



Poučci o sličnosti trokuta

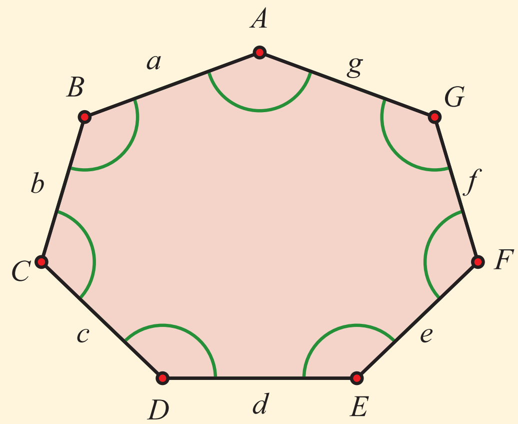
1. Poučak o sličnosti trokuta: stranica – stranica – stranica (SSS) Ako su omjeri duljina svih triju stranica jednaki, onda su ti trokuti slični. 	**2. Poučak o sličnosti trokuta:** stranica – kut – stranica (SKS) Ako je jedan unutarnji kut jednog trokuta jednak po veličini kutu drugog trokuta i ako su omjeri duljina stranica uz taj kut jednaki, onda su ti trokuti slični. 	**3. Poučak o sličnosti trokuta:** kut – kut (KK) Ako su dva unutarnja kuta jednog trokuta jednaka po veličini dvama kutovima drugog trokuta, onda su ti trokuti slični. 

Talesov poučak o proporcionalnim dužinama:



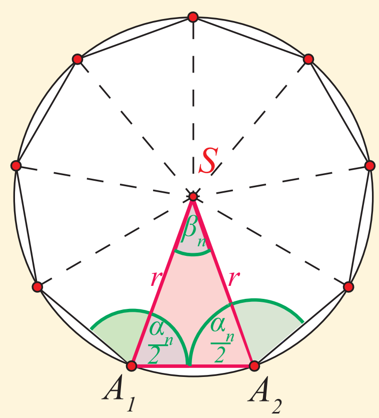
$|OA|:|OA'| = |OB|:|OB'| = |AB|:|A'B'|$ i $|OA|:|AA'| = |OB|:|BB'|$

Mnogokuti

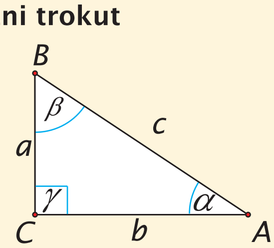
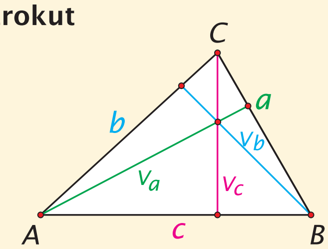
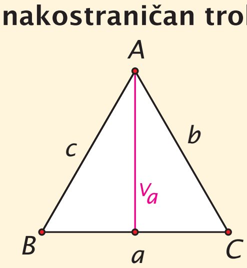


Iz jednog vrha mnogokuta s n vrhova može se nacrtati $d = n - 3$ dijagonala.	Mnogokut s n vrhova ukupno ima $D_n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$ dijagonala.	Zbroj veličina svih unutarnjih kutova n-terokuta računamo po formuli $K_n = (n-2) \cdot 180°$	Zbroj veličina svih vanjskih kutova n-terokuta je 360°.

Pravilni mnogokuti

karakteristični trokut	veličina unutrašnjeg kuta	veličina sred. kuta	površina	opseg
	$\alpha_n = \frac{(n-2)\ 180}{n} = \frac{K_n}{n}$	$\beta_n = \frac{360}{n}$	$P = n \cdot \frac{a \cdot \rho}{2}$ ρ je polumjer upisane kružnice, odnosno visina karakterističnog trokuta	$O = n \cdot a$

Površina i opseg trokuta i četverokuta

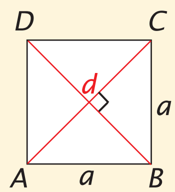
pravokutni trokut	trokut	jednakostraničan trokut
		
$O = a + b + c$ $P = \frac{a \cdot b}{2}$ $P = \frac{c \cdot v_c}{2}$	$O = a + b + c$ $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$	$O = 3a$ $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$

kvadrat

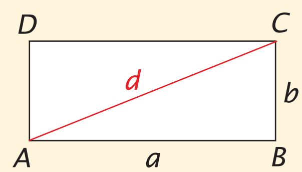
$O = 4a$

$P = a \cdot a = a^2$

$P = \dfrac{d \cdot d}{2} = \dfrac{d^2}{2}$



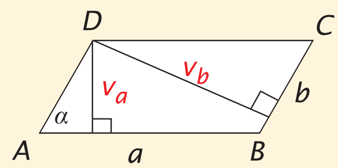
pravokutnik



$O = 2a + 2b = 2(a + b)$

$P = a \cdot b$

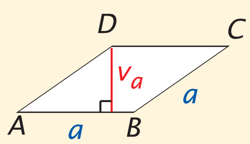
paralelogram

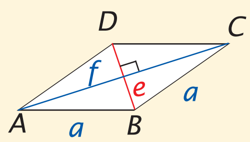


$O = 2a + 2b = 2(a + b)$

$P = a \cdot v_a = b \cdot v_b$

romb

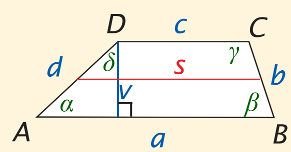




$O = 4a$

$P = a \cdot v = \dfrac{e \cdot f}{2}$

trapez

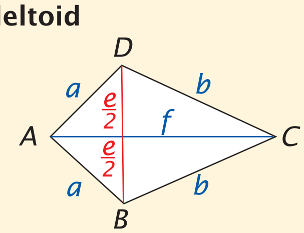


$O = a + b + c + d$

$s = \dfrac{a + c}{2}$,

$P = s \cdot v = \dfrac{(a + c)}{2} \cdot v$

deltoid

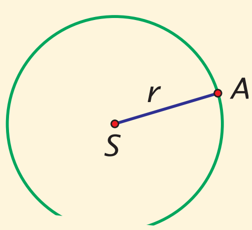


$O = 2a + 2b = 2(a + b)$

$P = \dfrac{e \cdot f}{2}$

Krug i kružnica

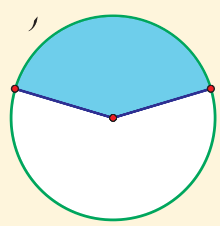
krug



$P = r^2\pi$

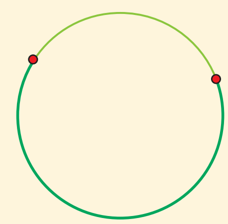
$O = 2r\pi$

kružni isječak



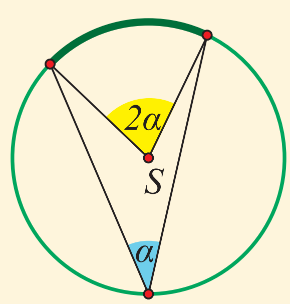
$P = r^2 \cdot \dfrac{\alpha}{360^\circ}$.

duljina kružnog luka

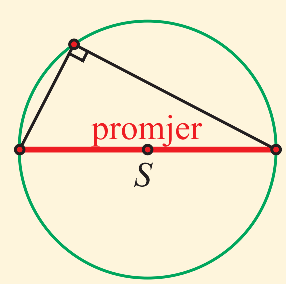


$l = \dfrac{r\pi\alpha}{180^\circ}$

Poučak o središnjem i obodnom kutu:
Ako se središnji i obodni kut nalaze nad istim kružnim lukom, onda je središnji kut dvostruko veći od obodnog kuta.



Talesov poučak:
Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.



Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice

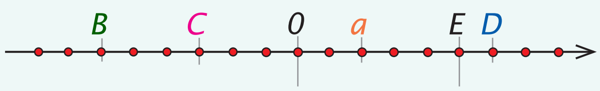
$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	**Rješenje sustava** (x, y)
Metoda supstitucije ili zamjene je način rješavanja sustava u kojem jednu nepoznanicu zamjenjujemo nekim izrazom.	**Metoda suprotnih koeficijenata** zasniva se na činjenici da je zbroj suprotnih brojeva jednak 0.

Linearna funkcija $f(x) = a \cdot x + b$

Graf	Graf linearne funkcije u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini je pravac
Tok	Linearna funkcija kojoj je koeficijent smjera pozitivan, $a > 0$ je rastuća funkcija. Linearna funkcija kojoj je koeficijent smjera negativan, $a < 0$ je padajuća funkcija.
Sjecište s koordinatnim osima	Nultočku linearne funkcije određujemo rješavanjem linearne jednadžbe $ax + b = 0$. Sjecište s osi apscisa – nultočka $N\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$. Sjecište s osi ordinata $A(0, b)$.
Grafičko rješavanje sustava dviju jednadžbi	Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice može: ○ imati jedno rješenje - sjecište pravaca određenih tim jednadžbama ○ nemati rješenja - dva usporedna pravca određena tim jednadžbama ○ imati beskonačno mnogo rješenja - isti pravac je određen tim jednadžbama
Jednadžba pravca	Eksplicitna jednadžba pravca je $y = ax + b$ Pravci su usporedni ako imaju jednake koeficijente smjera. Pravac $x =$ broj usporedan je s y osi. Pravac $y =$ broj usporedan je s x osi.

Zadaci

1. Organiziraj koordinatni sustav na pravcu, ucrtaj točke, te odgonetni riječ:
   a) $R(-\frac{10}{3}), B(1.12), A(2\frac{1}{5}), I(-\frac{1}{7})$;
   b) $R(-0.3), A(\frac{11}{6}), G(-3.42), D(2\frac{3}{4})$;
   c) $A(2.4), \}\,(-0.15), R(-\frac{13}{5}), U(-1\frac{1}{6})$.
2. Kojim su brojevima pridružene točke *A*, *B*, *C* i *D* sa slika?



3. a) Nađi sve uređene parove kojima je prvi član prost broj veći od 3 i manji od 10, a drugi član je višekratnik broja 3 manji od 10.
   b) Kakve koordinate mogu imati točke koje su jednako udaljene od obje koordinatne osi?
4. U koordinatnoj ravnini istakni točke $A(-3, 0)$, $B(4, -2)$, $C(0, 1)$, $D(-2, -2)$. Napiši kojem kvadrantu ili koordinatnoj osi pripada koja točka.
5. U koordinatnoj ravnini istakni točke
   $A(\frac{1}{2}, -2), B(-3, 3\frac{2}{3}), C(0, -\frac{3}{4}), D(2\frac{1}{2}, 1\frac{4}{5})$.
6. U koordinatnoj ravnini nacrtaj trokut s vrhovima $A(-3, -2)$, $B(0, -4)$, $C(3, 4)$. Kojoj vrsti pripada taj trokut obzirom na duljine stranica? Nađi njegovu osnosimetričnu sliku obzirom na os *y*.
7. U koordinatnoj ravnini nacrtaj četverokut s vrhovima $A(-1, 1.5), B(0, \frac{1}{2}), C(1, \frac{3}{2}), D(0, 2\frac{1}{2})$.
   Kako se zove taj četverokut? Nađi njegovu osnosimetričnu sliku obzirom na os *x*.
8. Izračunaj *x* u omjeru
   a) $16 : 2.5 = x$;
   b) $34 : x = 2$;
   c) $x : \frac{1}{2} = 6$.
9. Pojednostavni omjere:
   a) $10.5 : 7$ b) $\frac{4}{9} : \frac{7}{6}$ c) $3.5 : \frac{7}{2}$.
10. Izračunaj nepoznati član proporcije:
    a) $-2 : x = 4 : (-3)$;
    b) $x : 6 = (x + 2) : 3$.
11. Najkraća udaljenost od grada A do grada B na karti je 12 cm. Kolika je ta udaljenost u km, ako je karta izrađena u mjerilu 1 : 1 000 000?
12. Dva radnika, Damir i Josip, radili su zajedno jedan posao. Damir je radio 12 dana, a Josip 15 dana. Zajedno su zaradili 1350 kn. Kako će ih pravedno podijeliti?
13. Izračunaj kutove trokuta koji se odnose kao 7 : 3 : 8.
14. Dok se zupčanik A okrene 3 puta, zupčanik B će se okrenuti 7 puta.
    Ako je zupčanik A napravio 12 okreta koliko ih je napravio zupčanik B?
    Ako je zupčanik B napravio 84 okreta koliko ih je napravio zupčanik A?
15. Smreka visoka 16 m baca sjenu dugačku 12 dm. Koliko je visoka breza koja baca u isto vrijeme sjenu dugu 0.9 m.
16. Izračunaj *x* iz proporcije:
    $(7 + x) : 6 = (x + \frac{1}{3}) : 4$
17. Za 2340 kn može se kupiti 9 kg šećera. Koliko se šećera može kupiti za 3900 kn?
18. 35 učenika posadi cvijeće u školskom dvorištu za 6 sati. Koliko bi učenika trebalo raditi da bi cvijeće bilo posađeno za 5 sati (pretpostavimo da svi učenici rade jednako brzo)?
19. Postaviti ogradu oko manjeg dvorišta može Mate za 15 sati, a Goran za 25 sati ako rade svaki za sebe. Za koliko bi sati zajedno postavili ogradu oko tog dvorišta?
20. Električna grijalica za 2 sata i 20 min potroši 2.1 kW struje. Koliko će potrošiti za 5.5 sati?
21. Majka pegla rublje 4 sata. Koliko bi ranije bila gotova da joj pomognu sin i dvije kćeri?
22. 18 radnika 20 dana grade tunel. Za koliko bi se dana skratio taj posao ako nakon 5 dana dođu još 2 radnika?
23. Za 62 l vina potrebno je 93 kg grožđa. Koliko grožđa je potrebno za 472 l vina?
24. Luka je za 15.50 kn kupio 40 dag oraha.
    a) Koliko oraha može kupiti za 24.80 kn?
    b) Ako želi kupiti 120 dag oraha koliko će to platiti?

25. Sat u toku 12 sati kasni 3 min i 20 sek. Koliko će kasniti u 9 dana?
26. 6 radnika očisti dno jezera za 30 dana. Koliko bi radnika trebalo raditi, pa da dno jezera bude očišćeno za 18 dana?(pretpostavimo da svi radnici imaju isti učinak)
27. a) Kilogram krušaka prodaje se za 4.5 kn. Nacrtaj tablicu i izračunaj koliko treba platiti 0, 1, 2 i 3 kg tih krušaka. Nacrtaj grafički prikaz.
b) Kilogram krumpira prodaje se za 1.2 kn. Nacrtaj tablicu i izračunaj koliko treba platiti 0, 2, 4 i 6 kg tih krumpira. Nacrtaj grafički prikaz.
28. Odredi koliko je 5 % od 12346.
29. Odredi broj od kojeg 12 % iznosi 187.2.
30. Breskve koštaju 86 kn. Koliko će koštati nakon pojeftinjenja od 14 % ?
31. Jagode koštaju nakon poskupljenja od 9 % 109 kn. Koliko su koštale prije?
32. Koliko je posto 54 od 90?
33. Stranica kvadrata je 24 cm. Ako stranicu umanjimo za 25 %, za koliko posto će se umanjiti opseg i površina kvadrata?
34. Prepiši, pa dopuni tablicu:

glavnica	4000 eura	5000 kn	9000 kn	
kamatna stopa	5.2 %	1.7 %		4.4 %
vrijeme	7 g		3 g	2 g
kamate		510 kn	1539 kn	704 eura

35. U banku je uloženo 7200 kn. Uz koliku kamatnu stopu će se za 40 mjeseci dobiti 1440 kn kamata ako se radi o jednostavnom ukamaćivanju?
36. Koliku svotu treba vratiti klijent banke koji želi kredit od 800000 kn po kamatnoj stopi 4.5 %, ako je vrijeme otplate kredita 250 mjeseci? Kolika je mjesečna rata tog klijenta (jednostavni kamatni račun)?
37. Koliko vremena treba da bi oročena štednja od 7000 kn narasla na 8000 kn, ako je kamatna stopa na tu štednju 2.3 % (jednostavni kamatni račun)?
38. Maja je dobila 1620 kn kamata. Koliko je uložila ako je štedjela 5 godina po kamatnoj stopi 3.6 % (jednostavni kamatni račun)?
39. Završne ocjene 7b razreda na kraju prvog polugodišta iz matematike su 4, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 4, 4, 4, 5, 5, 3, 5, 5, 4, 3, 5:
a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih;
c) Zapiši relativne frekvencije u obliku postotka;
d) Izračunaj srednju ocjenu tog razreda iz matematike
40. 15 učenika se natječe u skoku u vis. Rezultati su im sljedeći: 1.5m, 1.44 m, 1.35 m, 1.49 m, 1.55 m, 1.5 m, 1.48 m, 1.48 m, 1.47 m, 1.37 m, 1.42 m, 1.43 m, 1.44 m, 1.47 m, 1.37 m
a) Nacrtaj stupčasti dijagram frekvencija;
b) Izračunaj relativne frekvencije i nacrtaj stupčasti dijagram za njih.
41. Prikaži podatke o temperaturama zraka u obliku stupčastog dijagrama

Srednja temperatura zraka u Ogulinu(°C)											
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
−12	−11	−9	−4	3	11	21	28	28	18	1	−8

a) Izračunaj srednju temperaturu za tu godinu.
b) Koji mjesec je temperatura najniža, koji najviša, a koji najbliža srednjoj?
c) Kolika je razlika u temperaturi najtoplijeg i najhladnijeg mjeseca te godine?
42. Napravi histogram frekvencija i relativnih frekvencija za rezultate ispita znanja u 7.a razredu s postignutim bodovima 0, 2, 7, 7, 8, 10, 11, 11, 15, 16, 16, 16, 18, 18, 20, 20, 20, 21, 22, 23, 23, 24, 24, 24:
a) Izračunaj aritmetičku sredinu tih podataka.
b) Izračunaj postotak riješenosti ispita.
43. Sedmi razred je na sistematskom pregledu. Svi se moraju izvagati. Svrstaj težinu učenika u histogram frekvencija, i relativnih frekvencija, i nađi aritmetičku sredinu tih podataka. Izmjerene težine u kg su slijedeće: 55, 49, 60, 61, 45, 59, 69, 49, 56, 55, 57, 49, 55, 67, 64, 63, 66, 61, 66, 50, 56, 56, 49, 60, 68. Relativne frekvencije prikaži u obliku postotka.
44. U posudi se nalazi 10 plavih kuglica, 10 zelenih,

4 zlatne i 1 bijela. Ana i Luka se igraju tako da naizmjenice izvlače po jednu kuglicu i vraćaju je natrag u kutiju. Promatramo koja je kuglica izvučena u bilo kojem izvlačenju. Koliko ima elementarnih događaja?
Odredi vjerojatnost da je izvučena:
a) plava kuglica;
b) bijela kuglica;
c) zelena kuglica;
d) zlatna kuglica.

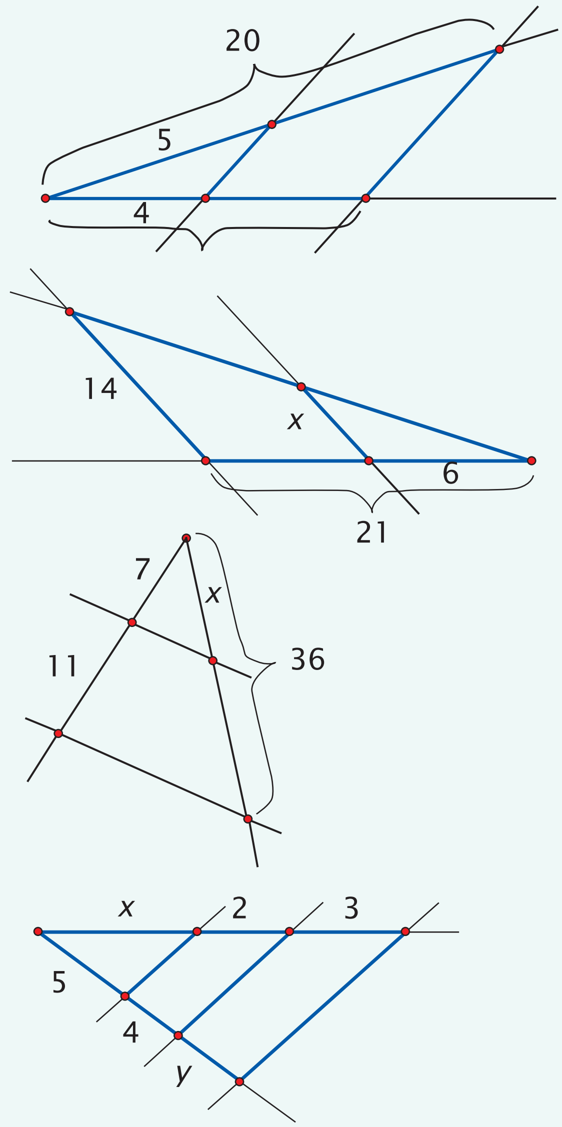
45. U šeširu se nalazi šesnaest kuglica, označenih brojevima od 1 do 31. Igrači izvlače po jednu kuglicu i vrate ju natrag u šešir.
a) Kolika je vjerojatnost da je igrač izvukao broj paran?
b) Kolika je vjerojatnost da je izvukao broj prost?
c) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj dvoznamenkast?
d) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj višekratnik broja 5?
e) Kolika je vjerojatnost da je izvučeni broj djelitelj broja 36?

46. U posudi se nalazi 150 kuglica. Od toga je 40% žutih, 12% bijelih, 2% crvenih, 24% plavih, a ostale su zelene. Igrač izvlači jednu kuglicu.
a) Koliko ima kojih kuglica?
b) Kolika je vjerojatnost da je izvučena žuta kuglica?
c) Kolika je vjerojatnost da je izvučena bijela ili crvena kuglica?
d) Kolika je vjerojatnost da je izvučena jednobojna kuglica?
e) Kolika je vjerojatnost da je izvučena crna kuglica?

47. Ana baca kockicu iz igre "Čovječe ne ljuti se".
a) Kolika je vjerojatnost da je pao broj manji od 3?
b) Kolika je vjerojatnost da je pao broj veći ili jednak 3?

48. Maja se igra bacajući istovremeno dvije kockice, crvenu i crnu. Odredi vjerojatnosti da na kockicama padnu brojevi:
a) 2 i 3 ili 3 i 2;
b) čiji je zbroj 11;
c) čiji zbroj je 8;
d) čiji zbroj je manji od 10;
e) čiji zbroj je veći ili jednak 10;
f) koji nisu jednaki.

49. Izračunaj nepoznatu duljinu dužine sa skice (sve mjere su izražene istom mjernom jedinicom).



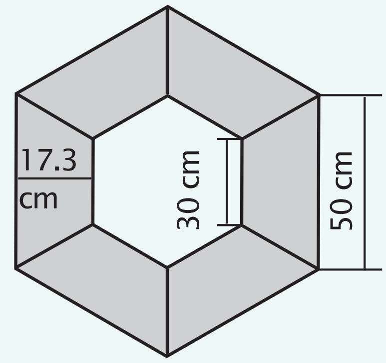
50. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$ duljine 10 cm. Na toj dužini konstruiraj točku C tako da vrijedi:
$|AC| : |CB| = 3 : 4$

51. Konstruiraj trokut opsega 15 cm tako da mu se duljine stranica odnose kao 1 : 2 : 3.

52. Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su slični. Izračunaj nepoznate duljine stranica ako je:
a) a = 1.2 cm, b' = 4.6 cm, c = 4.2 cm i $a : a'$ = 1 : 2;
b) a' = 28 mm, b = 25 mm, c' = 16 mm i c = 2 cm;

c) $\frac{b'}{b} = \frac{5}{3}$ i b' = 2.5 cm, a = 2.4 cm, c' = 3.5 cm.

53. Sjena bora duga je 5.1 m. U isto vrijeme sjena štapa duga je 1.7 m. Koliko je visok bor ako je duljina štapa je 2 m?
54. Koliko najviše dijagonala možeš nacrtati iz jednog vrha osamnaesterokuta.
55. Koliko kutova ima n-terokut ako znaš da se iz jednog njegovog vrha može nacrtati najviše 17 dijagonala.
56. Koliko ukupno dijagonala možeš nacrtati mnogokutu koji ima 24 stranice.
57. Postoji li mnogokut koji ima 20 dijagonala?
58. Koliki je zbroj svih unutarnjih kutova u dvadeseterokutu?
59. Koliko vrhova, stranica i kutova ima mnogokut kojemu je zbroj svih unutarnjih kutova a) 4140°; b) 7560°.
60. Kojem mnogokutu je zbroj veličina vanjskih kutova osamnaest puta veći od broja njegovih vrhova?
61. Površina stola je u obliku mnogokuta. Koliko stranica ima površina stola ako zbroj svih njegovih unutarnjih kutova iznosi dvadeset dva prava kuta.
62. Izračunaj veličinu unutrašnjeg kuta pravilnog 12-kuta.
63. Kolika je duljina stranice pravilnog mnogokuta opsega 37.5 cm, i veličine unutrašnjeg kuta 156°?
64. Koliko vrhova ima pravilni mnogokut veličine središnjeg kuta 20°?
65. Konstruiraj pravilni osmerokut upisan u kružnicu polumjera r = 5 cm.
66. Konstruiraj pravilni dvanaesterokut, duljine stranice a = 2 cm.
67. Konstruiraj kvadrat opsega 16 cm.
68. Vrt u nekoj školi je oblika pravilnog osmerokuta. Oko njega treba zasaditi ruže. Ako je stranica osmerokuta 3.6 m, a svaku ružu treba zasaditi na razmaku od 30 cm, koliko ruža treba kupiti?
69. Lukin djed želi oko drveta u vrtu složiti klupu u obliku šesterokuta, kao na slici. Koliko je drveta potrebno za tu klupu? Napomena: pogledaj od kojih dijelova je sastavljena ta šesterokutna klupa.



70. Nacrtaj kružnice $k(A$, 2.3 cm) i $k(B$, 3.5 cm) tako da se one:
    a) sijeku; b) dodiruju; c) niti sijeku niti dodiruju.
    Koliko im moraju biti udaljena središta tako da se one neće sjeći ni dodirivati?
71. Nacrtaj trokut i konstruiraj mu opisanu kružnicu. U kakvom su položaju pravci, na kojima leže stranice trokuta, u odnosu na tu kružnicu ?
72. Koliki je pripadni obodni kut ako je središnji 252°?
73. Koliki je pripadni središnji kut ako je obodni 42°?
74. Konstruiraj pomoću Talesovog poučka pravokutan trokut kojem je:
    a) Hipotenuza duga 3.4 cm, a jedna kateta 2.1 cm;
    b) Hipotenuza duga 5.3 cm, a jedan kut iznosi 40°.
75. Konstruiraj kružnicu promjera 67 mm i istakni jednu točku na kružnici. Konstruiraj tangentu iz te točke na kružnicu.
76. Promjer kotača bicikla je 64 cm. Koliki put prijeđe bicikl kada se kotač okrene 255 puta?
77. Polumjer kružnice iznosi 2.4 cm. Izračunaj duljinu kružnog luka kojem pripada središnji kut veličine 60°:
78. Kolika je površina poprečnog presjeka cijevi ako je njen promjer 8.5 cm?
79. Kolika će biti površina poprečnog presjeka balvana ako je njegov opseg 28.26 dm?
80. Polumjer kružnice iznosi 2.3 cm. Kolika je površina kružnog isječka kojem pripada središnji kut veličine 40°:
81. Provjeri je li zadani uređeni par (3, –2) rješenje sustava
    $2x + 3y = 0$
    $-3x + 4y = 2$.

82. Riješi sustave metodom supstitucije

a) $2x + y = 4$
$-x - y = -3.5$

b) $3x + 2y = 5$
$-7x + 3y = -4$

83. Riješi sustave metodom suprotnih koeficijenata:

a) $4x + 3y = 2$
$3x - 6y = 18$

b) $-2x - 7y = -21$
$3x + 2y = 6$

84. Riješi sustave:

a) $\frac{1}{2}x + y = 0$
$2.4x - 3y = 7.8$

b) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y = 3$
$\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y = -2$

c) $3(x+1) - 2y = 6x + 2$
$2x - 2(y-2) = -4y + 2$

d) $\frac{x+3}{2} - \frac{y-1}{3} = 2$
$\frac{2x-1}{3} + \frac{y+2}{2} = 1\frac{5}{6}$

85. Na igralištu je sedmerostruko više dječaka nego djevojčica. Koliko je dječaka, a koliko djevojčica na tom igralištu, ako je ukupno 64 djece na igralištu?

86. Opseg pravokutnika je 16.4 cm. Duljina jedne stranice je za 0.8 cm veća od duljine druge stranice. Kolike su duljine stranica? Kolika je površina tog pravokutnika?

87. Tijekom ljeta Ana je radila šest puta više dana nego Luka. Ukupno su radili 49 dana. Koliko dana je radio svatko od njih?

88. Zbroj znamenki dvoznamenkastog broja jednak je 13. Ako znamenke zamijene mjesta dobiva se broj veći za 9. Koji je to broj?

89. Omjer dva broja je 5 : 6. Ako prvi uvećamo za 5, a drugi umanjimo za 8, dobit ćemo vrijednost omjera 2.. Koji su to brojevi?

90. 2.4 kg krušaka i 3.2 kg banana treba platiti 38.4 kn. 5.1 kg krušaka i 2.7 kg banana treba platiti 69.3 kn. Kolika je cijena jednog kilograma krušaka, a kolika jednog kilograma banana?

91. Koliko treba uzeti 22-postotnog srebra, a koliko 34-postotnog srebra da bi se dobilo 150 grama 30-postotnog srebra?

92. Da bi se dobilo neku slitinu treba miješati dva metala u omjeru 8 : 3 . Koliko kojeg metala treba za 165 dag te slitine?

93. Nacrtaj grafove linearnih funkcija:

a) $f(x) = 2x + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$

94. Prepiši, pa ispuni tablicu:

jednadžba pravca	*a*	*b*	rast ili pad	sjecište s osi ordinata	nul-točka
$y = 3x + 5$					
$y = -7x - 11$					
$y = -4.6x + 1.5$					
$y = \frac{3}{4}x + 2.6$					

95. Koje od ovih točaka pripadaju grafu funkcije $f(x) = \frac{3}{4}x - 1$:

$A(4, 2)$, $B(-4, 4)$, $C(\frac{1}{2}, \frac{5}{8})$, $D(-\frac{2}{3}, -1.5)$.

96. Nacrtaj pravce $x = -6$; $y = -4$.

97. Sustave riješi grafički

a) $y = 2x - 3$
$y = -1x + 3$;

b) $3x - y = -4$
$2x + 5y = 3$.

98. Napiši jednadžbe i ucrtaj u pravokutnom koordinatnom sustavu tri pravca koja su usporedni sa zadanim pravcem $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

99. Taksist Marko naplaćuje start 20 kn plus 6.5 kn po prijeđenom kilometru. A taksist Jura start naplaćuje 40 kn plus 5 kn po prijeđenom kilometru.
a) S kojim taksistom se povoljnije voziti 20 km, a s kojim 5 km?
b) Koliko bi uštedjeli ako za put duljine 15 km odaberemo povoljnijeg taksistu? A za put od 45 km?