

L. Kralj, Z. Ćurković, D. Glasnović Gracin, S. Banić, M. Stepić

PETICA+ 5

udžbenik i zbirka zadataka za 5. razred osnovne škole

PRVI SVEZAK

1. izdanje

Zagreb, 2010.

Autorice:

Dubravka Glasnović Gracin, Zlata Ćurković,
Lidija Kralj, Sonja Banić, Minja Stepić

Urednik: Vinkoslav Galešev

Recenzija:

Ela Rac Marinić Kragić, Ines Kniewald, Suzana Virag

Lektura: Branka Savić

Ilustracija naslovnice: Ivan Marušić

Ostale ilustracije: Ivan Marušić, Davor Vrcelj,
Zvonimir Koščak, Jadranko Markoč, Galeb Vekić

Priprema za tisak: Ivan Marušić, Tomislav Stanojević

Tisak: Gradska tiskara Osijek

Za nakladnika: Robert Šipek

Nakladnik: SysPrint d.o.o.

XIV. trokut 8a, p.p. 84, 10020 Zagreb, Hrvatska

tel: (01) 655 8740, fax: (01) 655 8741

e-mail: udzbenici@sysprint.hr, web: www.sysprint.hr/udzbenici

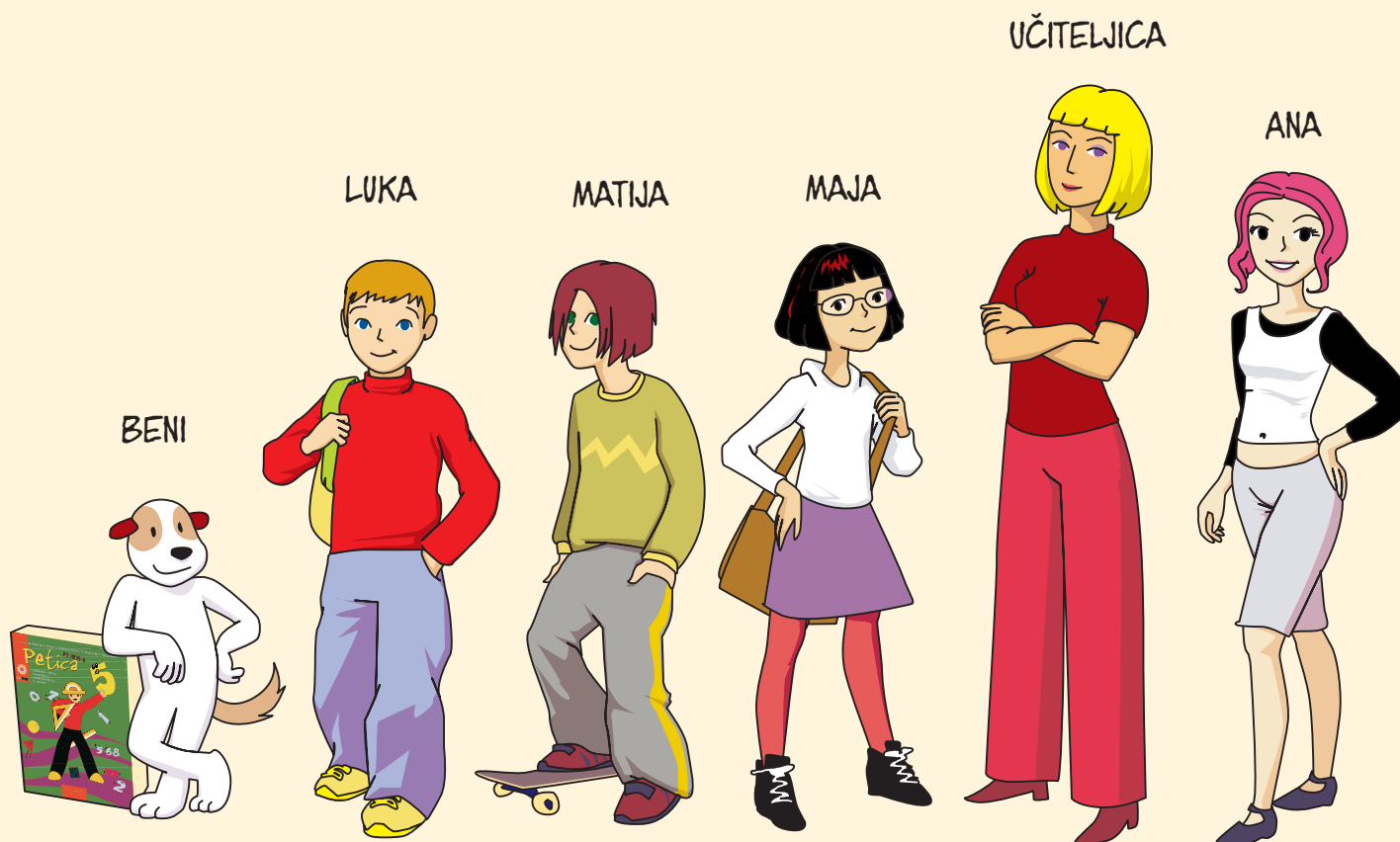
© SysPrint d.o.o, Zagreb, 2010.

Nijedan dio ove knjige ili CD-a ne smije se umnožavati, fotokopirati niti na bilo koji način reproducirati bez nakladnikova pismenog dopuštenja

Sadržaj

0. Uvodno ponavljanje	6	2.3. Svojstva djeljivosti	90
1. Prirodni brojevi	10	2.4. Djeljivost s 10, 5 i 2	96
1.1. Prirodni brojevi	11	2.5. Djeljivost s 3 i 9	100
1.2. Prirodni brojevi na pravcu	17	2.6. Prosti i složeni brojevi	106
1.3. Uspoređivanje prirodnih brojeva	21	2.7. Rastavljanje broja na proste faktore	109
1.4. Približna vrijednost	26	2.8. Najveći zajednički djelitelj	113
1.5. Upoznajmo džepno računalo	32	2.9. Najmanji zajednički višekratnik	118
1.6. Zbrajanje prirodnih brojeva	34	2.10. Ponavljanje	124
1.7. Svojstva zbrajanja prirodnih brojeva	39	3. Skupovi točaka u ravnini	126
1.8. Oduzimanje prirodnih brojeva	42	3.1. Dužina, pravac, polupravac	128
1.9. Zbroj i razlika	48	3.2. Položaj pravaca u ravnini	134
1.10. Množenje prirodnih brojeva	51	3.3. Okomiti pravci	139
1.11. Svojstva množenja prirodnih brojeva	58	3.4. Kružnica i krug	143
1.12. Distributivnost	61	3.5. Kut i vrste kutova	151
1.13. Dijeljenje prirodnih brojeva	66	3.6. Mjerenje kutova	155
1.14. Povezivanje računskih operacija	76	3.7. Crtanje kutova	158
1.15. Ponavljanje	79	3.8. Sukuti i vršni kutovi	161
2. Djeljivost prirodnih brojeva	82	3.9. Ponavljanje	164
2.1. Višekratnici	83	Rješenja nekih zadataka	167
2.2. Djelitelji	86	Kazalo pojmova	177

Upoznajte likove s kojima ćete se družiti kroz gradivo udžbenika Petica!



Luka je odličan učenik. Iako se kod njega nikad ne zna hoće li imati 4 ili 5, matematika mu je jedan od najdražih predmeta. Kada mu nešto nije jasno, ne srami se pitati učiteljicu da mu pojašni gradivo.

Beni je Lukin pas. Voli dobro jelo, voli spavati, ali voli i prisluškivati kada Luka kod kuće priča o školi. Beni naročito voli matematiku i voli na šaljiv način komentirati matematičke probleme.

Matija voli playstation i svoj skateboard mnogo više od matematike. No, pravi je stručnjak za računala svih vrsta, pa tako i za džepna. Otkad je učiteljica dozvolila njihovo korištenje, pomaže cijelom razredu u svladavanju gradiva.

Učiteljica na zanimljiv način približava učenicima i najteže gradivo iz matematike. Uvijek je tu ako treba nešto dodatno objasniti i strpljivo odgovara na njihova brojna pitanja.

UČITELJICA

Maja ima sve petice i najbolja je učenica u razredu. Voli matematiku i redovito piše zadatke. Često se prepire s Lukom i Matijom oko točnih rješenja zadataka. Naravno, smatra da je baš ona uvijek u pravu!

Ana je Lukina starija sestra. Ne voli kad joj Luka kopa po stvarima, ni kad joj Beni sakrije tajno pismo. Iako ima svoje društvo, često se druži s tim "balavcima", pogotovo ako se ide u kupovinu ili slavi rođendan.

Dragi čitatelji,

pred vama je udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike za 5. razred osnovne škole, koji je u potpunosti usklađen sa stručnim i metodičkim zahtjevima Hrvatskog nacionalnog obrazovnog standarda (HNOS). Uz objedinjeni udžbenik sa zbirkom zadataka i rješenjima, u udžbenički komplet ubraja se još i CD za učenike koji će vam približiti gradivo matematike i učiniti ga zanimljivim, pa i zabavnim.

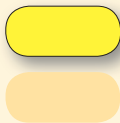
Gradivo petog razreda započinje ponavljanjem računskih operacija. Uz osnovne računske operacije upoznat ćete na nov način prirodne brojeve i njihova svojstva. Nakon toga slijedi geometrija, u kojoj ćete naučiti neke skupove točaka u ravnini. Upoznat ćete još dvije vrste brojeva – razlomke i decimalne brojeve koje već upotrebljavate u svakodnevnom životu.

Svaki naslov u udžbeniku započinje problemom koji će vas kroz zanimljiv zadatak iz života uvesti u novo gradivo. Zatim slijede riješeni primjeri, putem kojih ćete stjecati nova znanja iz matematike. Znanje ćete utvrditi pomoću raznovrsnih zadataka koji se nalaze iza primjera. Zadaci su složeni po težini, od lakših prema složenijima. Ako neku vrstu zadataka poželite još više uvježbati, na CD-u ćete naći dodatne i dopunske zadatke te druge obrazovne materijale i igre vezane uz matematiku.

Kroz gradivo matematike vodit će vas simpatični likovi: Luka, Maja, Matija, učiteljica, Beni i ostali, koji će se, baš kao i vi, uhvatiti u koštac s gradivom matematike. Svojim razgovorima i savjetima olakšat će vam svladavanje početnih poteškoća.

Kako bi vaš uspjeh iz matematike bio još bolji, na kraju svake nastavne teme nalaze se pitanja za ponavljanje i uvježbavanje gradiva. U udžbeniku su posebno označeni dijelovi gradiva koji nisu dio obaveznog programa, ali su namijenjeni učenicima koji žele znati više. Osim toga, i drugi dijelovi građe istaknuti su posebnim okvirima. U tablici su dani njihovi opisi i značenja:

Ikona	Značenje
	Savjet
	Upamti
	Napomena
	Za radoznalce

Ikona	Značenje
	Zadatak treba riješiti uz pomoć džepnog računala
Zadatak 4.	Jednostavni zadaci (redni brojevi obojani svjetloplavom bojom)
Zadatak 5.	Složeniji zadaci i zadaci za nadarene (redni brojevi obojani narančastom bojom)
	Okviri za isticanje važnijih dijelova gradiva

Ako se u nekom zadatku traži crtanje ili upisivanje rješenja u udžbenik, riješite zadatak u svojoj bilježnici. Udžbenik trebaju koristiti i generacije iza vas.

Puno uspjeha u radu žele vam autorice udžbenika!

Uvodno ponavljanje

Računske operacije:

- Zbrajanje
- Oduzimanje
- Množenje
- Dijeljenje

Nazivi brojeva u računskim operacijama:

- Zbrajanjem pribrojnika dobivamo zbroj.
- Oduzimanjem umanjitelja od umanjenika dobivamo razliku.
- Množenjem faktora dobivamo umnožak.
- Dijeljenjem djeljenika s djeliteljem dobivamo količnik.

Redoslijed rješavanja računskih zadataka:

1. Množenje i dijeljenje
2. Zbrajanje i oduzimanje

Ako u zadatku postoje zagrade, najprije moramo računati vrijednosti izraza u zagradama.

Primjeri:

1. Koliko je
 $1234 + 559?$

$$\begin{array}{r} 1234 \\ + 559 \\ \hline 1793 \end{array}$$

3. Koliko je
 $234 - 199?$

$$\begin{array}{r} 234 \\ - 199 \\ \hline 35 \end{array}$$

2. Koliko je
 $425 \cdot 31?$

$$\begin{array}{r} 425 \cdot 31 \\ 1275 \\ + 425 \\ \hline 13175 \end{array}$$

4. Koliko je
 $12\,024 : 24?$

$$\begin{array}{r} 12024 : 24 = 501 \\ -120 \\ \hline 02 \\ -0 \\ \hline 24 \\ -24 \\ \hline 0 \end{array}$$

Zadaci:

1. Izračunaj zbroj:

- a) $126 + 324;$
- b) $252 + 353;$
- c) $504 + 382;$
- d) $1008 + 411;$
- e) $2016 + 440;$
- f) $4032 + 469;$
- g) $8064 + 498;$
- h) $16\,128 + 527;$
- i) $32\,256 + 556;$
- j) $64\,512 + 585.$

2. Izračunaj razliku:

- a) $113 - 50;$
- b) $226 - 79;$
- c) $452 - 108;$
- d) $904 - 137;$
- e) $1808 - 166;$
- f) $3616 - 2195;$
- g) $7232 - 5224;$
- h) $14\,464 - 1253;$
- i) $28\,928 - 11282;$
- j) $57\,856 - 12311.$

3. Izračunaj umnožak:

- a) $21 \cdot 3;$
- b) $42 \cdot 4;$
- c) $84 \cdot 5;$
- d) $168 \cdot 6;$
- e) $336 \cdot 7;$
- f) $672 \cdot 8;$
- g) $1344 \cdot 9;$
- h) $2688 \cdot 10;$
- i) $5376 \cdot 11;$
- j) $10\,752 \cdot 12.$

4. Izračunaj količnik:

- a) $51 : 3;$
- b) $136 : 4;$
- c) $340 : 5;$
- d) $816 : 6;$
- e) $1904 : 7;$
- f) $4352 : 8;$
- g) $9792 : 9;$
- h) $21\,760 : 10;$
- i) $47\,872 : 11;$
- j) $104\,448 : 12.$

5. Matija je Luki dao 8 sličica nogometaša, a Ivan mu ih je dao 25. Koliko su mu ukupno sličica dali?

6. Koliko 5 mačaka ima ukupno nogu, koliko očiju, a koliko glava?

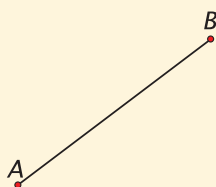
7. Koji se jednoznamenasti brojevi mogu postaviti "naglavačke" a da ostanu isti?

8. Koji je broj:

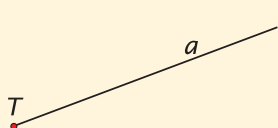
- a) za 3 veći od 50?
- b) 3 puta veći od 50?

9. Koji je broj:
 - a) za 5 manji od 50?
 - b) 5 puta manji od 50?
10. Izračunaj:
 - a) $12 + 24 : 6 + 1$;
 - b) $54 : 6 + 56 : 8 + 0$;
 - c) $81 + 9 : 9 + 15 : 5 + 4 \cdot 3$;
 - d) $81 : 9 + 27 : 9 + 9 : 9 + 0 : 9$.
11. Zbroj dvaju brojeva je 91. Drugi pribrojnik je broj 37. Je li prvi pribrojnik veći ili manji od drugog i za koliko?
12. Napiši dva broja manja od 125 koji su veći od zbora brojeva 50 i 60.
13. Broju koji je za 5 veći od 7 dodaj broj koji je za 3 manji od 11. Koliko si dobio?
14. Autobus je prevezao u prvoj vožnji 12 putnika, u drugoj vožnji 2 putnika manje nego u prvoj, a u trećoj 3 puta više putnika nego u drugoj. Koliko je putnika ukupno prevezao autobus?
15. Koliko nogu ukupno imaju 5 svinja i 2 guske? Koliko ukupno imaju glava? A očiju?
16. Na koliko se načina može platiti račun od 5 kn kovanicama od 1 kn i 2 kn?
17. Karlo ima 19 godina. Ivan je 4 godine mlađi. Boris ima onoliko godina koliko Karlo i Ivan imaju zajedno. Koliko godina ima svaki od njih?
18. Luka je od mame dobio 11 kovanica od 2 kn, 5 kovanica od 1 kn i 3 kovanice od 5 kn. Kupio je časopis za 29 kn i sladoled za 9 kn. Koliko mu je novaca ostalo?
19. Luka je kupio loptu i gumicu i platio 52 kn. Matija je kupio loptu i dvije gumice i platio ih 60 kn. Koliko stoji lopta, a koliko gumica?
20. Franko i Franka imaju zajedno 18 godina. Franko je 4 godine stariji od Franke. Koliko godina ima Franko, a koliko Franka?
21. Zbroji:
 - a) $54 + 123$; b) 985 ; c) $456 + 29$;
 - d) $8 + 5432$; e) $69 + 43213$; f) $345 + 297$.
22. Oduzmi:
 - a) $3456 - 2345$; b) $998 - 47$; c) $88 - 49$;
 - d) $100 - 43$; e) $8765 - 7999$; f) $1031 - 765$.
23. Pomnoži:
 - a) $5 \cdot 26$; b) $43 \cdot 8$; c) $9 \cdot 112$;
 - d) $21 \cdot 23$; e) $4 \cdot 324$; f) $12 \cdot 333$.
24. Podijeli:
 - a) $125 : 5$; b) $96 : 12$; c) $36 : 3$;
 - d) $49 : 7$; e) $100 : 25$; f) $81 : 3$.
25. Napiši tablicu množenja za brojeve od 1 do 12.

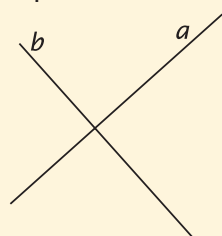
Dužina $\overline{AB}$



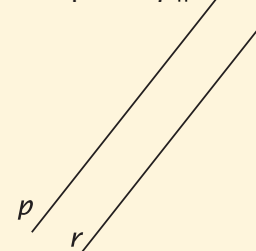
Polupravac a



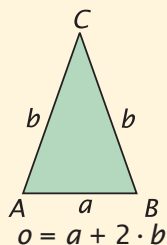
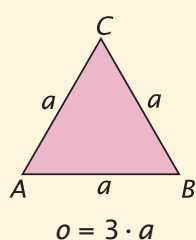
Okomiti pravci $a \perp b$



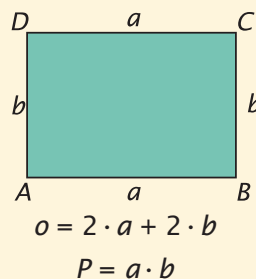
Usporedni pravci $p \parallel r$



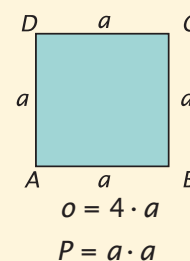
Jednakostranični trokut Jednakokranični trokut



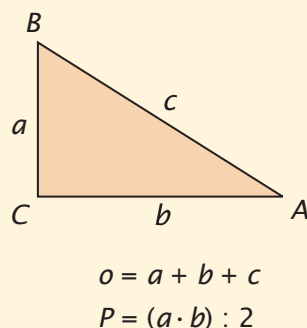
Pravokutnik



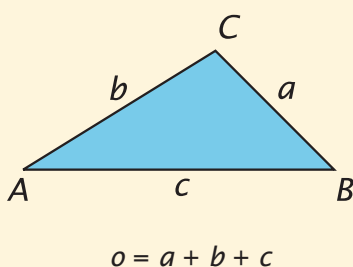
Kvadrat



Pravokutni trokut

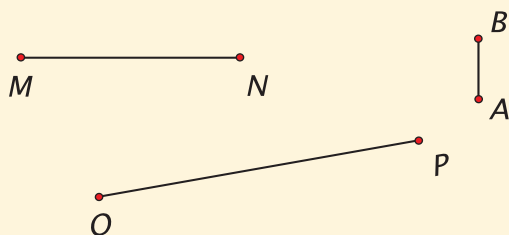


Raznostranični trokut



Vrste kutova	
šiljasti kut	
pravi kut	
tupi kut	
ispruženi kut	

1. Izmjeri duljine ovih dužina:

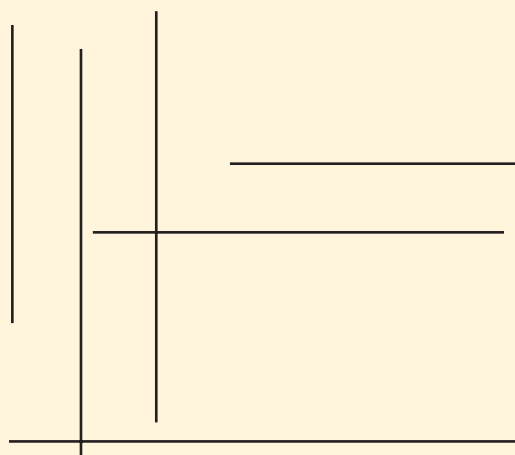


2. Riješi zadatke:

- Nacrtaj 5 točaka u bilježnicu, a zatim spoji sve moguće dužine.
 - Koliko ima tih dužina?
 - Označi svaku dužinu i zapiši ih matematičkim simbolima.
3. Nacrtaj u bilježnici sat i ucrtaj mu kazaljke tako da zatvaraju:
- šiljasti kut;
 - pravi kut;
 - tupi kut.

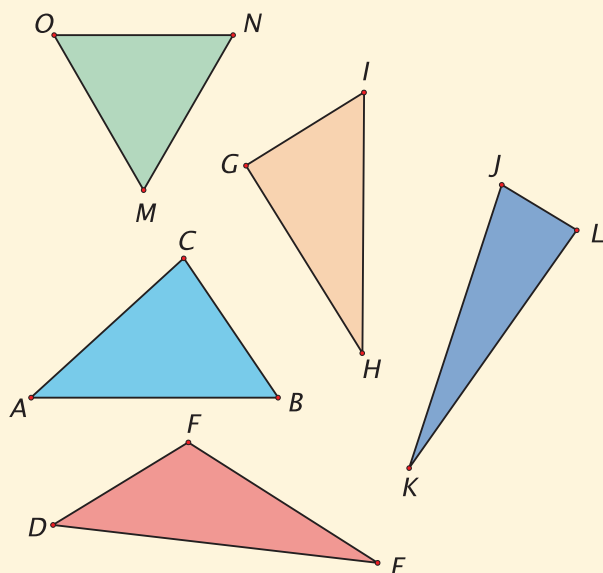
Koliko je sati na svakom satu?

4. Imenuj pravce sa slike. Koji od ovih pravaca su usporedni? Koji od pravaca su okomiti?



5. Nacrtaj trokut ABC, izmjeri mu duljine stranica i izračunaj opseg.

6. Izmjeri duljine stranica trokuta na slici te napiši je li raznostraničan, jednakostraničan ili jednakokračan. Izračunaj im opsege.

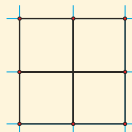


7. Opseg trokuta je 18 cm, a duljine dviju njegovih stranica 5 cm i 6 cm. Kolika je duljina treće stranice tog trokuta?
8. Maja ima konopac duljine 33 m. Želi od njega napraviti jednakostraničan trokut. Kolika će biti duljina stranice?
9. Majina mama je kupila 5 m trake za obrubljivanje. Njome želi obrubiti stolnjak u obliku jednakostraničnog trokuta sa stranicom 2 m. Ima li dovoljno trake za taj stolnjak?
10. Nacrtaj pravokutnik $ABCD$, izmjeri mu duljine stranica i izračunaj opseg i površinu.
11. Izračunaj površinu pravokutnika kojemu su duljine stranica:
a) $a = 6$ cm, $b = 9$ cm;
b) $a = 12$ dm, $b = 4$ dm.
12. Nacrtaj kvadrat $ABCD$, izmjeri mu duljine stranica i izračunaj opseg i površinu.

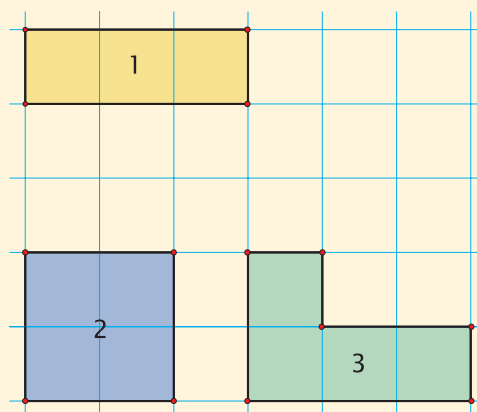
13. Izračunaj opseg i površinu kvadrata kojemu je duljina stranice:

- a) $a = 8$ cm;
b) $a = 37$ dm;
c) $a = 74$ m.

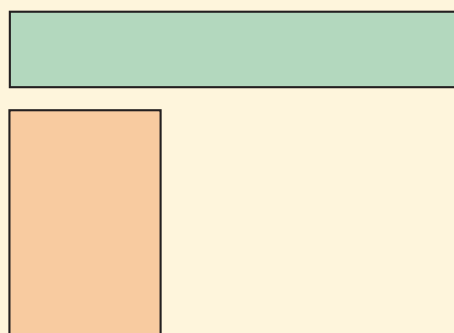
14. Koliko kvadrata ima na ovoj slici?



15. Izračunaj opseg i površinu ovih likova:



16. Opseg zemljišta u obliku kvadrata je 248 m. Kolika je duljina stranice tog kvadrata?
17. Uže je dugo 436 m. Može li se njime opasati kula u obliku kvadrata stranice 110 m?
18. Procijeni, koji od ova dva pravokutnika ima veću površinu. Zatim izmjeri duljine stranica i izračunaj.



Prirodni brojevi

Važni pojmovi

skupovi N i N_0
sljedbenik i prethodnik
približna vrijednost
računske operacije s
prirodnim brojevima
komutativnost
asocijativnost
distributivnost
prirodni broj
znamenka
brojevni pravac
jednakost i nejednakost

Teško je zamisliti život bez brojeva: bez kućnih brojeva, telefonskih brojeva, bez mjerenja duljina, računanja vremena itd.

Želimo li prebrojiti neke predmete ili osobe, služimo se prirodnim brojevima. S tim brojevima smo se družili na matematici u sva 4 prošla razreda osnovne škole: naučili smo ih zapisivati, uspoređivati i računati s njima.

U ovom poglavlju ćemo ponoviti i još više proširiti naučeno gradivo o prirodnim brojevima.



Kratki zadaci za ponavljanje

- Pročitaj: 34, 11, 677, 23 459, 112 080.
 - Koji od zadanih brojeva su parni, a koji neparni?
 - Poredaj ih počevši od najmanjeg.
- Zbroji: $12 + 8$; $19 + 7$; $30 + 61$; $2 + 99$; $64 + 42$.
 - Kako se naziva rezultat zbrajanja?
 - Kako se nazivaju brojevi koje zbrajamo?
- Oduzmi: $40 - 20$; $34 - 30$; $109 - 19$; $45 - 12$; $19 - 8$.
 - Kako se naziva rezultat oduzimanja?
 - Kako se nazivaju brojevi koje oduzimamo?
- Ponovi tablicu množenja!
 - Kako se naziva rezultat množenja?
 - Kako se nazivaju brojevi koje množimo?
 - Koliko je $4 \cdot 1$; $3 \cdot 0$; $1 \cdot 0$; $9 \cdot 1$?
- Ponovi tablicu dijeljenja!
 - Kako se naziva rezultat dijeljenja?
 - Kako se nazivaju brojevi koje dijelimo?
 - Koliko je $2 : 1$; $0 : 9$; $16 : 1$; $1 : 1$; $0 : 3$?

6. Koliko je $3 + 3 \cdot 3$?

- Koliko je $(3 + 3) \cdot 3$?
- Kojim redoslijedom izvršavamo računske operacije?

Čarobni kvadrat:

Ispuni ovaj kvadrat brojevima od 1 do 9 tako da zbroj u svakom retku, stupcu i po dijagonali bude 15.

Ispuni ovaj kvadrat brojevima od 1 do 16 tako da zbroj u svakom retku, stupcu i po dijagonali bude 34.

		14	
13			
	16		
			15

1.1. Prirodni brojevi

Tko je predsjednik razreda?

U 5.b razredu ovaj se tjedan na satu razrednika birao predsjednik razreda. Za predsjednika je bilo predloženo pet učenika. Pogledaj sliku i odgovori na sljedeća pitanja:

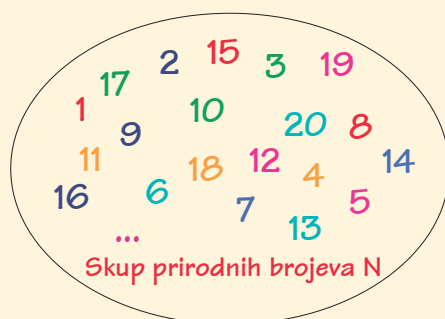


- Tko je predsjednik razreda?
- Tko je zamjenik?
- Koliko glasova je dobio Hrvoje, koliko Ivana, Pavao, Jasmina, a koliko Tomislav?
- Koliko glasova su dobili svi dječaci zajedno, a koliko sve djevojčice zajedno?
- Koliko učenika ima u 5.b razredu (ako su svi učenici bili u školi i svatko je glasao samo za jednog kandidata)?

Da bismo lakše prebrojavali, često se služimo crticama. Kako bi naš zapis bio pregledniji, svakom petom crticom prekrizimo prethodne četiri.



Brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... nazivamo **prirodnim brojevima**. Njima se koristimo pri brojenju ili prebrojavanju. Prebrojimo li učenike razreda iz gornjeg primjera, zaključit ćemo da ih ima 30. Broj 30 je prirodan broj. Pri glasovanju za predsjednika razreda Hrvoje je nakon prebrojavanja dobio 13 glasova. Broj 13 je također prirodan broj. Navedi još neke prirodne brojeve.



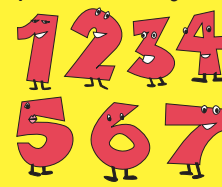
Zamislamo li sve prirodne brojeve na jednoj "hrpi", oni će činiti skup prirodnih brojeva.

Skup prirodnih brojeva označava se slovom N. To u matematici zapisujemo ovako:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

i čitamo: "skup prirodnih brojeva N sastoji se od brojeva 1, 2, 3, 4, 5 i tako dalje". Tri točkice (trotočje) na kraju označavaju da niz ne završava brojem 5, već se nastavlja sa 6, 7, 8 itd.

prirodni brojevi:



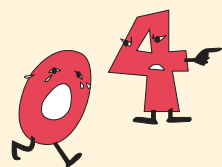
skup prirodnih brojeva:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Skup prirodnih brojeva označava se slovom N jer je to prvo slovo latinske riječi *naturalis*, što znači prirodan. U nekim jezicima riječ prirodan i danas ima latinski korijen: eng. natural, njem. natürlich, tal. naturale, fr. naturel

Spoji parove:

engleski jezik	natürliche Zahlen
njemački jezik	nombres naturels
talijanski jezik	natural numbers
francuski jezik	numeri naturali



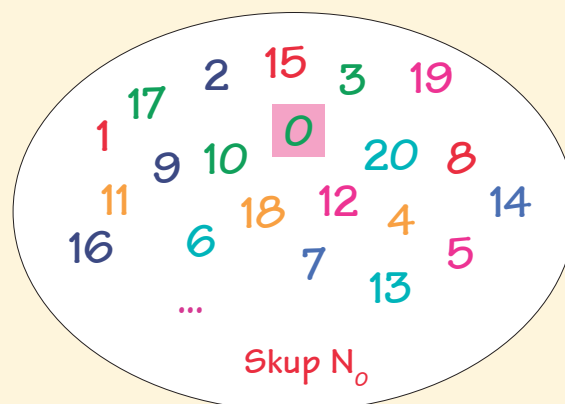
Primijetimo da među prirodnim brojevima ne nailazimo na nulu. Nula nije prirodan broj.

skup N_0
 $N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

No, često ćemo pri računanju s prirodnim brojevima koristiti i nulu, pa je korisno skup prirodnih brojeva N proširiti za jedan element (a to je 0). Tako ćemo dobiti skup N_0 .

Skup N_0 je skup koji se sastoji od svih prirodnih brojeva i nule.

$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$



Zapišimo redom prirodne brojeve:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

Zaokružimo li svaki drugi broj počevši od broja 2 dobit ćemo

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 ...

Zaokruženi brojevi su 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... Ti se prirodni brojevi nazivaju **parni brojevi**. Prirodni brojevi koji su ostali nezaokruženi nazivaju se **neparni brojevi**.

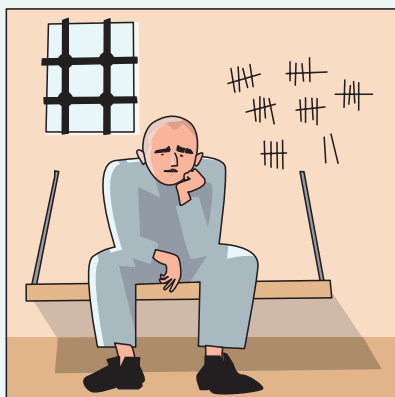
Zadaci

- Roditelji 5.a i 5.b su na sastanku trebali odlučiti koju će ponudu odabrati za školu u prirodi. Pogledaj sliku ploče i odgovori:



Kamo će učenici ići na izlet?

Koliko je roditelja glasovalo?



- Zatvorenik svakog jutra upisuje crticu na zid. Koliko je dana u zatvoru čovjek sa slike?

- Napiši još tri člana zadanog niza prirodnih brojeva:

- 1, 2, 3, 4, 5, ...
- 2, 4, 6, 8, 10, ...
- 1, 3, 5, 7, 9, ...
- 3, 6, 9, 12, 15, ...
- 10, 20, 30, 40, ...
- 1, 6, 11, 16, 21, 26, ...
- 100, 91, 82, 73, 64, ...
- 1, 4, 9, 16, 25, ...

- Koliko ima:

- neparnih brojeva do 10;
- neparnih brojeva do 100;
- parnih brojeva do 20;
- parnih brojeva do 50;
- prirodnih brojeva do 99;
- parnih brojeva do 1000;
- neparnih troznamenkastih brojeva?

Primjer 1. Pisanje brojeva riječima

- a) Pogledaj uplatnicu za školsku kuhinju sa slike. Na uplatnici je napisana ukupna cijena školske kuhinje za cijeli razred za rujan. Koliko ona iznosi?
- b) Kako bi zapisao riječima da je uplata 1425 kn?

Rješenje:

- b) Tisuću četiristo dvadeset pet kuna.

Na teret konta: _____

UPLATNICA br. 37.

na IZNOS: 980 kn

devetsto osamdeset kuna

Iznos primljen: od 5. b razreda

za: školsku kuhinju za rujan

U Daruvara, dana 20. rujna 2005. god.

Likvidator Surođ Blagajnik Kmfi. Uplatitelj

Znakove kojima se koristimo pri zapisivanju brojeva nazivamo i **brojkama ili znamenkama**. To su znakovi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9. Kako smo grupirali po deset točkica, kažemo da brojeve zapisujemo u desetinskom ili **dekadskom brojevnom sustavu**. Za veće brojeve grupiramo u ostale **dekadske jedinice**: osim po 10, grupiramo po 100, 1000 itd. Znamenke u broju imaju različite vrijednosti, ovisno o mjestu gdje se nalaze u broju. Pogledajmo mjesne vrijednosti broja 156 437:

brojke ili znamenke

dekadske jedinice:
10, 100, 1000,
10 000 itd.

Mjesne vrijednosti broja:	ST stotisućice	DT desettisućice	T tisućice	S stotice	D desetice	J jedinice
	1	5	6	4	3	7

U broju 156 437 znamenka 7 se nalazi na mjestu jedinica, znamenka 3 na mjestu desetice, znamenka 4 na mjestu stotice, znamenka 6 na mjestu tisućica, znamenka 5 na mjestu desettisućica te znamenka 1 na mjestu stotisućica.

Prema tome, broj 156 437 možemo zapisati i ovako:

$$156437 = 1 \cdot 100000 + 5 \cdot 10000 + 6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$



Primjer 2. Mjesne vrijednosti prirodnih brojeva

- a) Koje vrijednosti poprima znamenka 5 u broju 55 555?
- b) Pogledajmo brojeve 412 i 241. Ti brojevi se sastoje od istih znamenaka, no jesu li ti brojevi jednaki? Objasni svoj odgovor.

Rješenje:

- a) Znamenka 5 u zadanom broju 55 555 poprima sve mjesne vrijednosti od jedinica do desettisućica:

	5	5	5	5	5
Mjesne vrijednosti broja:	DT	T	S	D	J

- b) Brojevi 412 i 241 sastoje se od istih znamenaka 1, 2 i 4, ali se te znamenke nalaze na različitim mjestima u broju, pa imaju različite mjesne vrijednosti.

Diktat iz matematike:

Zapiši riječima: 11, 17, 21, 135, 112, 214

Primjer 3. Čitanje prirodnih brojeva

Pročitaj brojeve: a) 38041886; b) 12359007693.

Rješenje:

Zadani brojevi se sastoje od više znamenaka i nazivaju se **višeznamenkasti brojevi**. Ovako zapisane višeznamenkaste brojeve je teško čitati. Zato ih grupiramo po tri znamenke, redom zdesna ulijevo. Tako dobivamo tisuće, milijune, milijarde itd.

a) Pišemo 38 041 886 i čitamo „trideset osam milijuna četrdeset jedna tisuća osamsto osamdeset šest“;

b) Pišemo 12 359 007 693 i čitamo „dvanaest milijardi tristo pedeset devet milijuna sedam tisuća šesto devedeset tri“.

12359007693 = 12 359 007 693
 milijarde milijuni tisuće (jedinice)

Na CD-u Petice potraži kako se čitaju još veći brojevi!



Primjer 4. Zapisivanje prirodnih brojeva

Zapiši brojkama:

- a) dvanaest tisuća sto dvadeset tri;
- b) dvanaest tisuća dvadeset tri;
- c) dvanaest tisuća tri.

Koliko znamenaka ima svaki od ovih brojeva?

4 jednoznamenak broj
 44 dvoznamenkasti broj
 444 troznamenkasti broj
 4444 četveroznamenak broj
 44 444 peteroznamenak broj
 444 444 šestoroznamenak broj

Nastavi niz i pročitaj brojeve.

Rješenje:

- a) To je broj 12 123. On se sastoji od pet znamenaka, pa kažemo da je to peteroznamenak broj.
- b) To je broj 12 023. Primijetimo da je u izrazu „dvanaest tisuća dvadeset tri“ preskočeno mjesto stotica, pa stoga na to mjesto stavljamo znamenku 0. Ovo je također peteroznamenak broj.
- c) To je broj 12 003. To je peteroznamenak broj.

Zadaci

1. Pročitaj ove podatke:
 - a) U jednom danu ljudsko srce zakuca 100 800 puta i potisne 7056 litara krvi.
 - b) U svijetu je poznato 1 326 708 različitih životinjskih vrsta. Pretpostavlja se da ih u Hrvatskoj ima 56 121.
 - c) U Hrvatskoj su poznate 4924 biljne vrste, a ugroženo ih je 514.
 - d) Mjesec je od Zemlje udaljen oko 384 405 kilometara.
2. Prepiši ove rečenice u bilježnicu koristeći brojeve:
 - a) Rijeka Sava je duga devetsto četrdeset pet kilometara.
 - b) Dinara je visoka tisuću osamsto trideset metara.
 - c) Makarska ima trinaest tisuća sedamsto osamnaest stanovnika.
 - d) Srednja udaljenost Zemlje od Mjeseca je tristo osamdeset četiri tisuće kilometara.
 - e) Hrvatska ima četiri milijuna sedamsto osamdeset četiri tisuće dvjesto šezdeset pet stanovnika.
3. Grupiraj znamenke i pročitaj ove brojeve: 555555, 7900471, 23232323, 87658711, 100100001, 56784420, 59002279, 50007000.
4. Zapiši brojkama:
 - a) pet milijuna i sedam tisuća;
 - b) pet milijuna i sedam;
 - c) pet milijuna i sedamdeset tisuća;
 - d) dva milijuna četrsto trideset tisuća;
 - e) dva milijuna i četrdeset tri tisuće;
 - f) dva milijuna i četrdeset tri;
 - g) sedam milijuna tri tisuće i šesnaest;
 - h) sedam milijardi tri tisuće i sto šezdeset;
 - i) sedamnaest milijardi dva milijuna pedeset osam tisuća dvjesto pedeset šest.
5. Zapiši sve troznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 3, 4 i 5. Koliko ih ima?

6. Zapiši sve troznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 0, 1 i 2. Koliko ih ima?
7. Koje se znamenke mogu naći na mjestu jedinica kod parnih prirodnih brojeva, a koje kod neparnih?
8. Posloži ove kartice s brojevima tako da dobiješ:
 - a) najveći broj;
 - b) najmanji broj.
 Pročitaj te brojeve i zapiši slovima.



9. Pogledaj tablicu mjesnih vrijednosti i pronadi pogrešku:

	2	3	17	4	0
Mjesne vrijednosti broja:	DT	T	S	D	J

10. Koliko ima dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake?

11. **Zbroj znamenaka** broja 283 je 13 jer je $2 + 8 + 3 = 13$. Napiši zbroj znamenaka ovih brojeva: 12, 254, 2001, 111, 1099.

12. a) Pronadi sve dvoznamenkaste brojeve kojima je zbroj znamenaka 15.
- b) Koji je najveći troznamenkasti broj kojem je zbroj znamenaka 11?
- c) Koji je najveći, a koji najmanji dvoznamenkasti broj kojem je zbroj znamenaka 10?
- d) Zapiši sve četveroznamenkaste brojeve kojima je zbroj znamenaka 4.



Primjer 5. Reci veći broj

- a) Zaigrajte u razredu ovu jednostavnu igru. Igra se zove "Reci veći broj!" Nastavnik će reći jedan prirodni broj, a zatim, počevši od učenika u prvoj klupi nadalje, svaki učenik treba reći neki broj koji je veći od posljednjeg izrečenog broja. Birajte velike brojeve! Kada

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

se izreda cijeli razred, pokušajte na ploči zapisati zadnji izrečeni broj. Je li to najveći

sljedbenik

prirodni broj koji postoji?

Najmanji prirodni broj je broj 1.

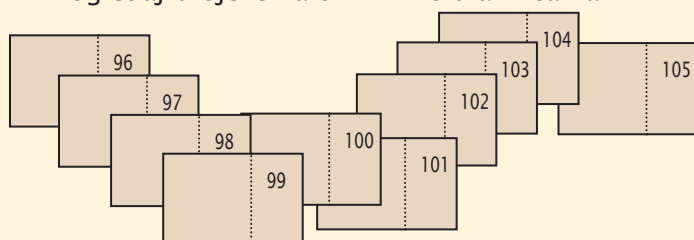
Ne postoji najveći prirodni broj. Skup prirodnih brojeva je beskonačan.

Rješenje

- a) Najmanji prirodni broj je broj 1. Za njim slijedi broj 2, pa kažemo da je broj 2 **sljedbenik** broja 1. Dalje, sljedbenik broja 2 je broj 3. Nastavimo li ovako, zaključit ćemo da svaki prirodni broj ima svog sljedbenika. Želimo li izreći najveći prirodni broj, uvijek ćemo naći broj veći od njega – njegov sljedbenik. Na primjer, iza 1 000 000 postoji 1 000 001 itd. Iz toga zaključujemo da nema najvećeg prirodnog broja. Zato kažemo da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan.

Primjer 6. Prethodnik i sljedbenik

Pogledaj brojeve na ovim kino-ulaznicama:



Znamo da je 97 sljedbenik broja 96. No broj 96 prethodi broju 97, pa kažemo da je 96 **prethodnik** broja 97.

Dopuni rečenice:

- a) Broj 99 je prethodnik broja ____.
- Broj 102 je prethodnik broja ____.
- Broj 105 je prethodnik broja ____.
- Broj 99 je sljedbenik broja ____.
- b) Broj 98 je _____ broja 99.
- Broj 99 je _____ broja 100.
- Broj 99 je _____ broja 98.
- Broj 100 je _____ broja 101.

Rješenje:

- a) Broj 99 je prethodnik broja 100. Broj 102 je prethodnik broja 103. Broj 105 je prethodnik broja 106. Broj 99 je sljedbenik broja 98.
- b) Broj 98 je prethodnik broja 99. Broj 99 je prethodnik broja 100. Broj 99 je sljedbenik broja 98. Broj 100 je prethodnik broja 101.

prethodnik



Primjer 7.

- a) Ima li svaki prirodni broj svog prethodnika u skupu N ?
- b) Ima li svaki prirodni broj svog sljedbenika u skupu N ?

Rješenje:

- a) Prethodnik broja 1 je 0, ali nula nije prirodni broj, tj. ne pripada skupu N . Zaključujemo da prirodni brojevi 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... imaju svog prethodnika u skupu N , a broj 1 nema.
- b) Da, svaki prirodni broj ima svog sljedbenika koji je također prirodni broj.

Zadaci

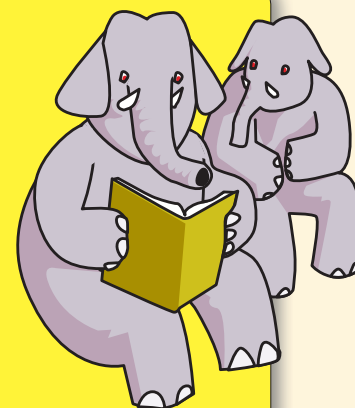
- Koji je najmanji i najveći paran prirodni broj? Koliko ima parnih brojeva?
- Koliko ima neparnih brojeva? Koji je najmanji i najveći neparan prirodni broj?
- Zapiši i pročitaj naglas sljedbenike ovih brojeva: 459, 300, 1 000 000, 679, 808, 241 009, 6899, 899 999, 0, 1, 99.
- Zapiši i pročitaj naglas prethodnike ovih brojeva: 700, 901, 60 001, 1 000 000, 112 799, 56 400, 200, 8100, 520, 1, 10.
- Dopuni:
Broj 23 je _____ broja 22.
Broj 145 je _____ broja 146.
Broj 69 je _____ broja 70.
Broj 1001 je _____ broja 1000.
- Broj 13 je sljedbenik broja _____.
Broj 2 je prethodnik broja _____.
Broj 259 je prethodnik broja _____.
Broj 1009 je sljedbenik broja _____.
- Zapiši najmanji troznamenkasti broj, a zatim odredi njegov prethodnik.
- Zapiši i pročitaj traženi broj, te njegov prethodnik i sljedbenik:
 - najmanji četveroznamenkasti broj;
 - najveći troznamenkasti broj koji nema niti jednu znamenku 9;
 - najveći troznamenkasti broj koji sadrži jednu znamenku 0;
 - najmanji peteroznamenkasti broj u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jednom;
 - najveći četveroznamenkasti broj u kojem se znamenka 5 pojavljuje dvaput;
 - najmanji sedmeroznamenkasti broj u kojem nema znamenke 9 i u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jedanput;
 - najveći sedmeroznamenkasti broj u kojem nema znamenke 9 i u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jedanput.

Pjesmica o beskonačnosti skupa $\mathbb{N}$

Jedan slon
odlučio je pročitati
cijeli bon-ton.
Tako mu je zabavno
bilo
čitanje bon-tona,
da je odlučio pozvati
još jednog slona.

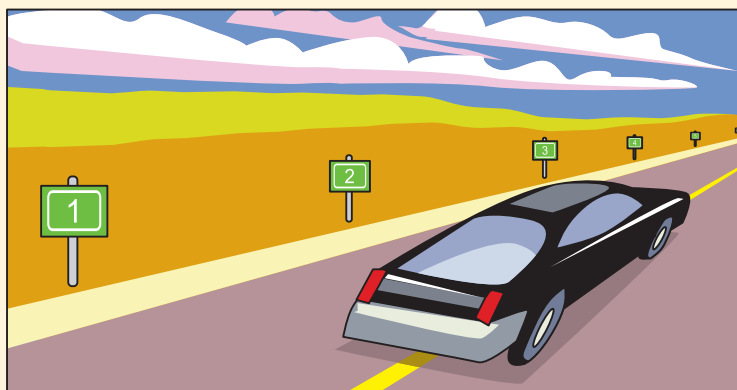
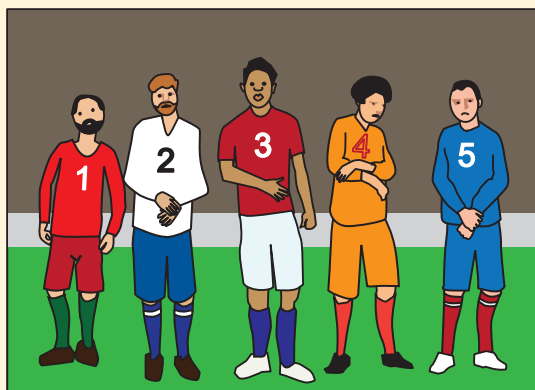
Dva slona
odlučila su pročitati
knjigu iz bon-tona.
Tako im je zabavno
bilo
čitanje bon-tona,
da su odlučili pozvati
još jednog slona.

Tri slona...
(Pjesmu nastavite sami
dok god vam se igra.
Nakon toga popijte
čašu soka, jer se od
ove pjesmice jako
ožedni!)

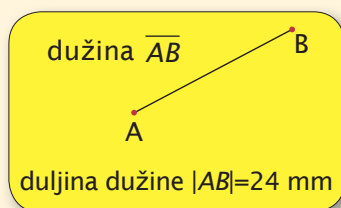


1.2. Prirodni brojevi na pravcu

Što je zajedničko svakoj slici?



U svakodnevnom životu prirodne brojeve pridružujemo raznim stvarima i osobama: stupićima uz autocestu, osobama, kućama u nekoj ulici itd. Na isti način u matematici točkama pravca pridružujemo brojeve. Pogledajmo kako to radimo s prirodnim brojevima.

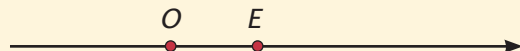


jedinična dužina

Svaki se pravac sastoji od točaka. Nacrtajmo pravac i na njemu odaberimo neku točku. Označimo je slovom O .



Desno od točke O istaknimo još jednu točku i označimo je slovom E .

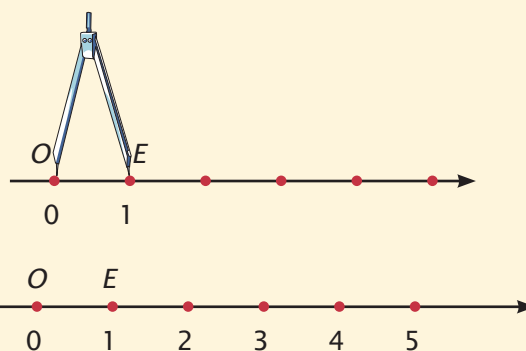


Dužina $\overline{OE}$ naziva se **jediničnom dužinom**. Ona određuje udaljenost između svake dvije sljedeće točke koje ćemo istaknuti. Točki O pridružimo broj 0, a točki E pridružimo prirodan broj 1. Točku O nazivamo **ishodište**.



Nanošenjem udesno dužine $\overline{OE}$ po pravcu dobit ćemo niz točaka kao na desnoj slici. Svaka točka je od svojih susjednih točaka udaljena za duljinu jedinične dužine $|\overline{OE}|$.

Svako od tako istaknutih točaka pravca pridružimo jedan prirodni broj: 2, 3, 4, 5 itd. Kako bismo označili u kojem smjeru se pridružuju sve veći brojevi, na desni "kraj" pravca do crtajmo strelicu.



Pravac na kojem smo istaknuli ishodište i jediničnu dužinu nazivamo **brojevni pravac**.

brojevni pravac

Primjer 1. Pridruživanje prirodnih brojeva točkama pravca

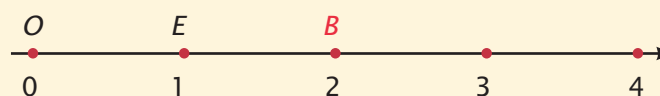
Nacrtaj brojevni pravac $|\overline{OE}| = 2$ cm i istakni točku B koja je pridružena broju 2.

Rješenje:

Nacrtajmo brojevni pravac s jediničnom dužinom $|\overline{OE}| = 2$ cm.



Na njemu nanošenjem jedinične dužine pronađemo točku koja je pridružena prirodnom broju 2 i označimo je s B .



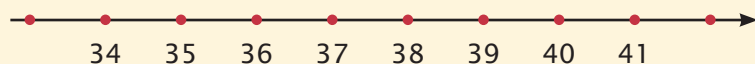
Primjer 2. Prikazivanje većih brojeva na pravcu

- Prikaži na pravcu brojeve od 34 do 41.
- Prikaži na pravcu brojeve 453, 461, 466 i 470.
- Prikaži na pravcu brojeve 100, 200, 300 i 400.

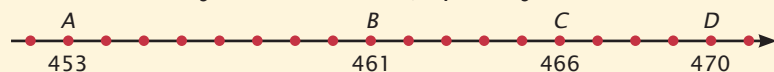
Rješenje:

U svakodnevnom životu često koristimo dijelove brojevnog pravca s većim brojevima. U tom slučaju nacrtamo samo dio pravca s nekoliko točaka. Ako jedinična dužina nije zadana, sami je odredimo.

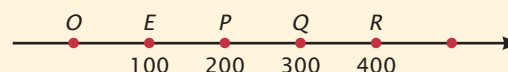
a) Neka duljina jedinične dužine bude 1 cm.



b) Na ovoj slici trebat ćemo prikazati više brojeva, pa je mudro odabrati manju jediničnu dužinu, npr. duljine 5 mm.



c) Duljina jedinične dužine može ovisiti o vrijednostima koje se traže u zadatku. U ovom slučaju tražimo brojeve 100, 200, 300 i 400, pa ćemo crtež tome prilagoditi.



Zadaci

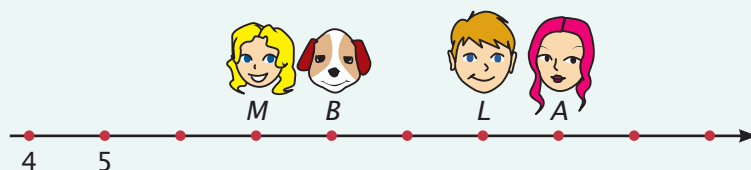
1. Pročitaj na koje brojeve pokazuju strelice:



2. Nacrtaj brojevni pravac s jediničnom dužinom duljine 1 cm. Istakni na njemu točku A pridruženu broju 4, točku B pridruženu broju 6 i točku C pridruženu broju 3.

3. Nacrtaj brojevni pravac s $|OE| = 5$ mm. Na njemu istakni točke A i B koje su pridružene brojevima 5 i 13. Zatim istakni sve točke koje su pridružene prirodnim brojevima između 5 i 13.

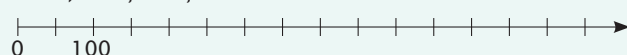
4. Nacrtaj brojevni pravac s $|OE| = 5$ mm. Na njemu istakni točke koje su pridružene brojevima 2 i 11.



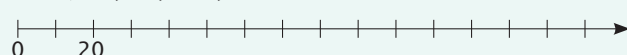
5. Luka ima dvije sestre, Anu i Mariju, te psa Benija. Sa slike pročitaj koliko svatko od njih ima godina:

6. Nacrtaj brojevni pravac s $|OE| = 5$ mm. Na njemu istakni točku kojoj ćeš pridružiti broj svojih godina. Ako imaš braće i sestara, upiši i njihov broj godina.

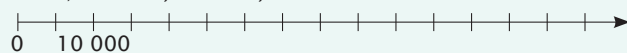
7. Na pravcu označi točke pridružene sljedećim brojevima:



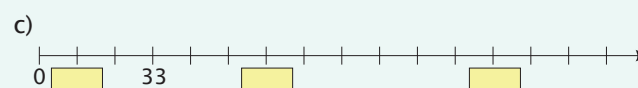
a) 400, 250, 600



b) 60, 85, 115, 40



8. U zadani pravokutnik stavi odgovarajuće prirodne brojeve.

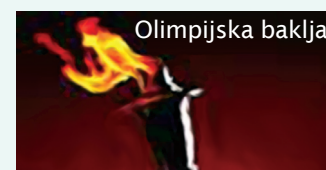


9. Označi na brojevnom pravcu sljedeće brojeve (godine vezane uz razvoj nogometa)

- ◇ 1855. – osnovan prvi nogometni klub u Engleskoj
- ◇ 1871. – odigrana prva službena utakmica za Engleski kup
- ◇ 1872. – odigrana prva međunarodna utakmica Engleska – Škotska
- ◇ 1890. – nogomet se širi Europom
- ◇ 1894. – Franjo Bučar donosi prvu nogometnu loptu u Zagreb
- ◇ 1903. – osnovani prvi nogometni klubovi u Hrvatskoj
- ◇ 1904. – osnovana FIFA, međunarodna nogometna federacija

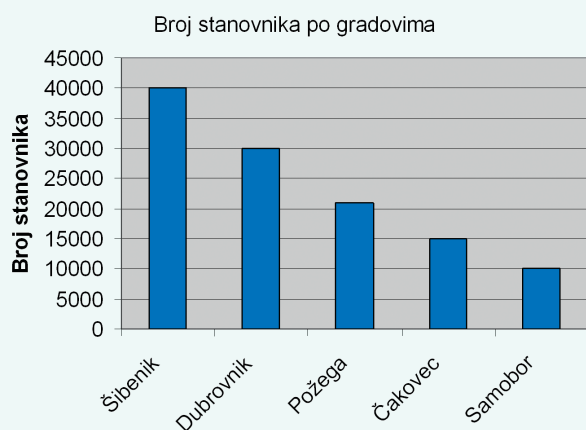
10. Označi na brojevnom pravcu sljedeće brojeve:

- ◇ 1896. – održane prve moderne Olimpijske igre
- ◇ 1900. – Odigran prvi Davis Cup u tenisu
- ◇ 1930. – održano prvo nogometno prvenstvo svijeta u Montevideu (Urugvaj)
- ◇ 1903. – prva utrka Tour de France u biciklizmu
- ◇ 1891. – A. J. Naismith izmislio košarku
- ◇ 1947. – u SAD-u osnovana profesionalna košarkaška liga NBA
- ◇ 1950. – održano prvo svjetsko prvenstvo u Formuli 1



Olimpijska baklja

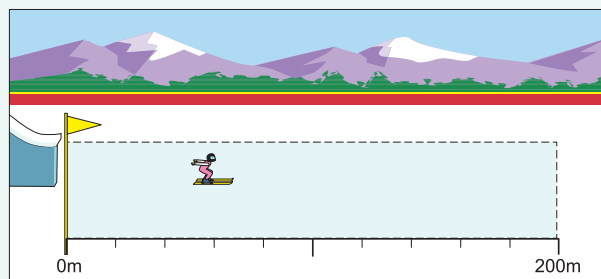
11. Pročitaj broj stanovnika nekih naših gradova iz ovog grafikona.



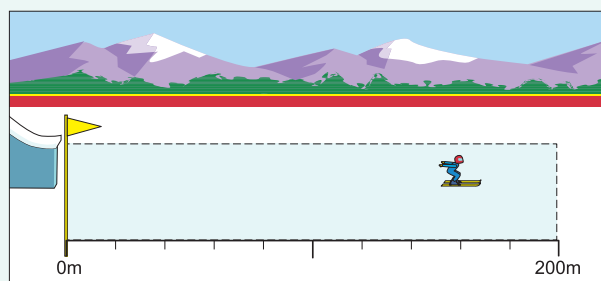
12. Podatke iz tablice prikaži u obliku grafikona kao u prethodnom zadatku.

Županija	Broj gradova u županiji
Karlovačka	5
Primorsko-goranska	14
Virovitičko-podravska	3
Grad Zagreb	1
Krapinsko-zagorska	7
Istarska	9
Brodsko-posavska	2

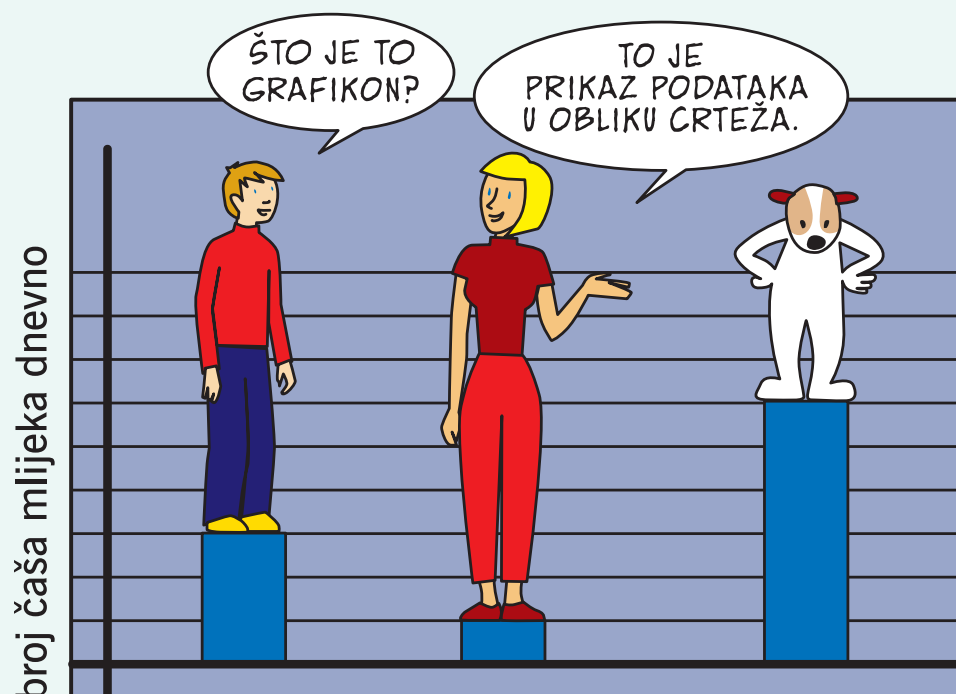
13. Pročitaj sa slike duljinu skoka skijaša



14. Na gornjoj slici doctraj zastavice koje pokazuju duljinu skoka pojedinog skijaša.

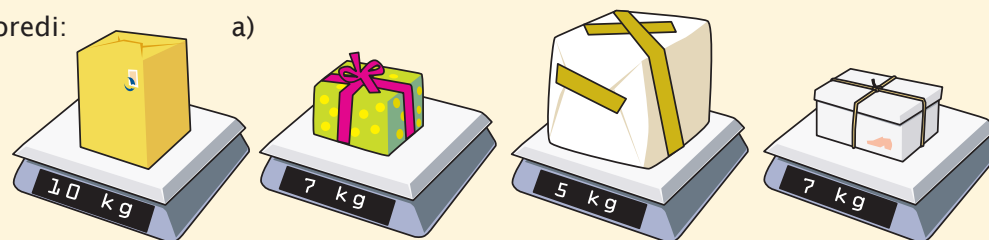


- a) Luka : 100 m
- b) Ana : 80 m
- c) Marko: 160 m
- d) Lucija: 110 m



1.3. Uspoređivanje prirodnih brojeva

Usporedi:



c)

8 108



Usporediti dva prirodna broja a i b znači odrediti jesu li oni jednaki ili različiti. Ako su jednaki, pišemo $a = b$ i čitamo "broj a jednak je broju b ". Ako su različiti, određujemo koji je veći, a koji manji.

uspoređivanje
prirodnih brojeva

Ako su dva prirodna broja različita, određujemo koji je veći, a koji manji. Primjerice, broj 8 je manji od broja 108 i pišemo $8 < 108$. Također, možemo reći da je broj 108 veći od 8, pa pišemo $108 > 8$.

Ako brojevi a i b nisu jednaki i ne ističemo koji je veći, zapisujemo $a \neq b$ i čitamo: "broj a je različit od broja b ".

$a = b$ "broj a jednak je broju b "
 $a < b$ "broj a je manji od broja b "
 $b > a$ "broj b je veći od broja a "



$a \neq b$
 "broj a je različit
 od broja b "

Ukoliko imamo više od dva prirodna broja, možemo ih poredati po veličini počevši od najmanjeg ili od najvećeg.

Primjer 1.

Uspoređivanje dvaju brojeva

Pogledaj ove dvije bombonijere. U kojoj se nalazi više čokoladnih bombona?

Rješenje:

U svakoj se bombonijeri nalaze po 24 čokoladna bombona, jer je $6 \cdot 4 = 24$ i $3 \cdot 8 = 24$.



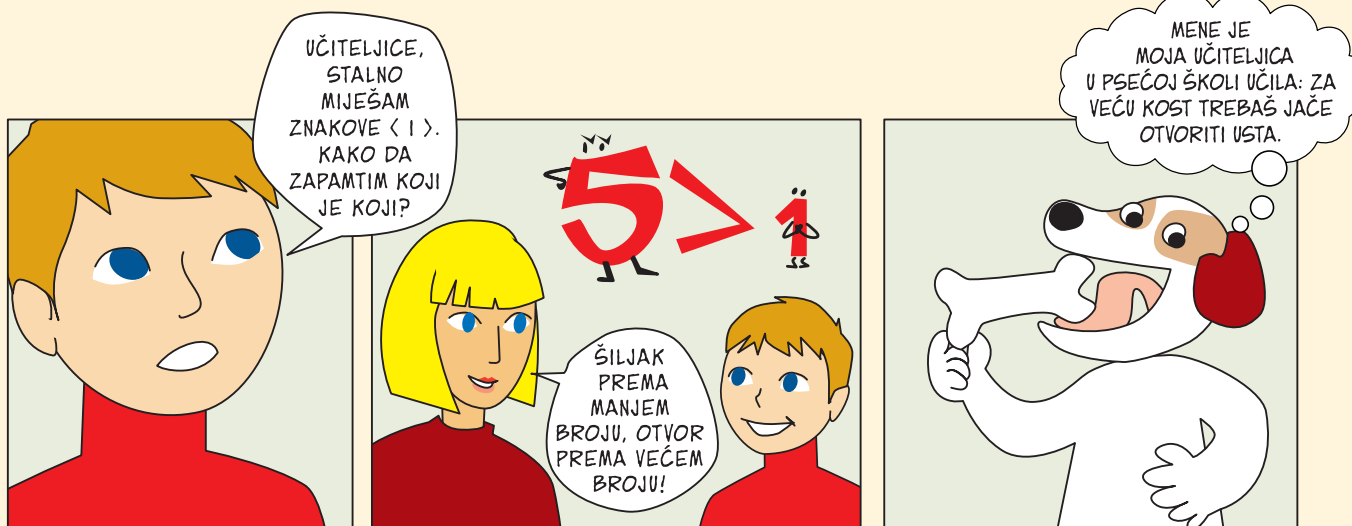
Primjer 2.

Usporedi brojeve:

22 i 23, 24 i 42, 23 i 23, 112 i 15, 0 i 7.

Rješenje:

$22 < 23$, $24 < 42$, $23 = 23$, $112 > 15$, $0 < 7$.



Primjer 3. Uspoređivanje više brojeva

U tablici se nalaze podaci o visini nekih od najviših građevina svijeta. Poredaj te građevine po redu, počevši od najviše. Svoje podatke zatim prikaži grafikonom.

Građevina	Visina
Petronas Towers (Kuala Lumpur, Malezija)	451 m
Bank of China (Hongkong, Kina)	369 m
Toranj Commerzbank (Frankfurt, Njemačka)	259 m
Sears Tower, (Chicago, SAD)	443 m
MLC Centre (Sydney, Australija)	227 m

Rješenje:

Usporedimo visine građevina iz tablice i poredajmo ih od najviše prema nižima:

Građevina	Visina
Petronas Towers (Kuala Lumpur, Malezija)	451 m
Sears Tower, (Chicago, SAD)	443 m
Bank of China (Hongkong, Kina)	369 m
Toranj Commerzbank (Frankfurt, Njemačka)	259 m
MLC Centre (Sydney, Australija)	227 m

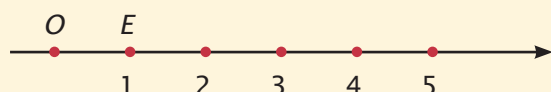
Nacrtajmo i pripadajući grafikon:

Primjer 4. Uspoređivanje na brojevnom pravcu

Nacrtaj brojevni pravac te na njemu istakni sve prirodne brojeve manje od 6.

Rješenje:

Nije teško na brojevnom pravcu pronaći brojeve 1, 2, 3, 4 i 5, koji su manji od 6. Oni se na pravcu nalaze *lijevo* od broja 6.



U matematici ovaj zadatak često zapisujemo na jednostavniji način.

U zadatku se traži nepoznati prirodni broj manji od 6. Tu nepoznanicu označimo slovom x , pa se traži x takav da je $x < 6$. Takvih nepoznatih brojeva ima više, a to su $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

$$x < 6 \quad x = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$x > 6 \quad x = 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots$$

Zadaci

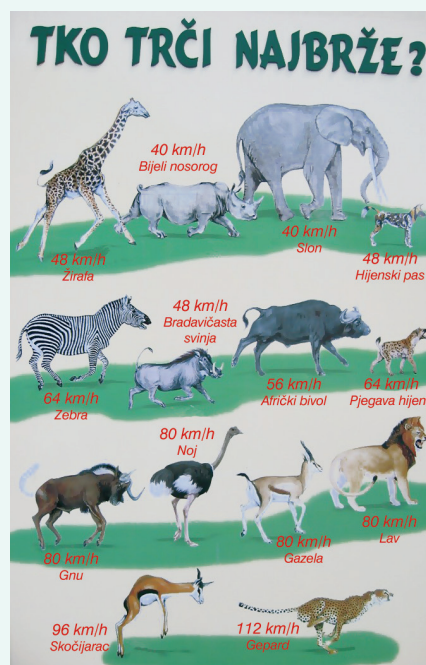
- Pogledaj ovu sliku iz zagrebačkog zoološkog vrta u Maksimiru.

Napravi ovakvu tablicu i u nju poredaj podatke po veličini, počevši od najbrže životinje na svijetu.

Životinja	Brzina

- U tablici su podaci koliko žive životinje u zoološkom vrtu. Poredaj te podatke po veličini, počevši od životinja koje žive najdulje.

Životinja	Koliko dugo živi?
Deva	31 godina
Velika papiga	120 godina
Nilski konj	60 godina
Klokan	20 godina
Slon	70 godina
Vjeverica	16 godina
Nosorog	45 godina



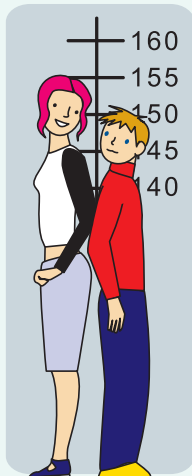
- U prazan kvadratić stavi jedan od znakova: $>$, $<$ ili $=$.
 $808 \square 88$, $37 \square 73$, $73 \square 37$, $33 \square 33$,
 $1001 \square 11$, $0 \square 1$, $2 \square 1$, $34 \square 12$.
- Koje znamenke mogu doći u kvadratić (nekad je moguće i više rješenja):
a) $4 \square < 46$; b) $3 \square 7 < 327$;
c) $\square 4 < 46$; d) $13 < \square 8$; e) $7 \square 5 > 714$;
f) $56 = 5 \square$; g) $5 \square > 51$;
h) $40 > \square 0$; i) $11 > 2 \square$.

- U tablici se nalaze podaci koliko sati dnevno neke životinje provedu spavajući. Poredaj ove podatke po veličini, počevši od životinja koje spavaju malo.

Životinja	Koliko dnevno spava?
Papiga	15 h
Slon	2 h 20 min
Žirafa	20 min
Lav	20 h
Zebra	1 h
Majmun	12 h

6. Pogledaj slike i usporedi:

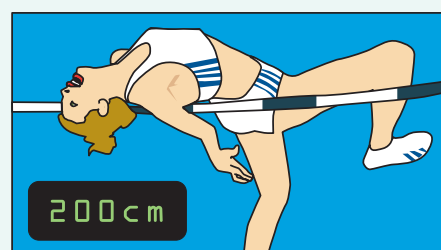
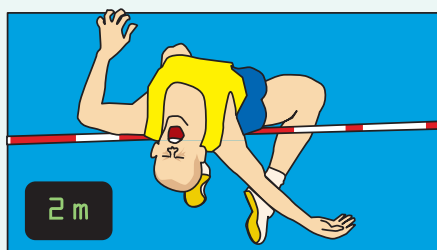
a)



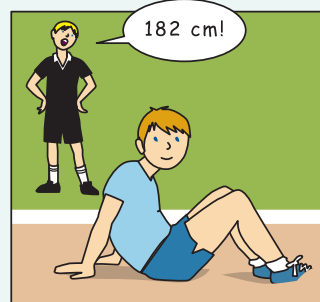
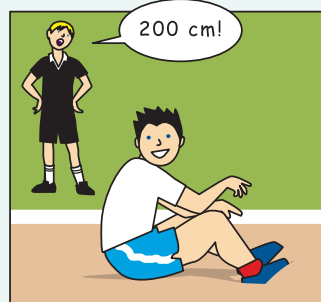
a) Koliko je visoka Ana, a koliko Luka? Tko je viši?

b) Tko je skočio više?

b)



c)

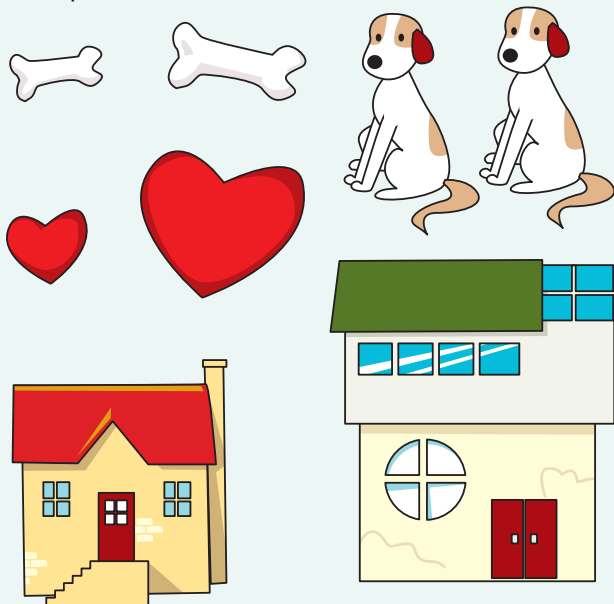


c) Tri dječaka skaču udalj. Tko je skočio najdalje, a tko ima najslabiji rezultat?

7. Pročitaj i zaokruži tvrdnje koje su točne:

- a) $2 < 5$, $1 < 1$, $3 < 7$, $14 < 5$, $6 < 8$, $9 < 2$,
 $15 < 14$, $45 < 7$, $16 < 61$, $61 < 16$, $2 < 22$,
 $110 < 101$, $99 < 100$, $49 < 48$;
 b) $4 > 5$, $5 > 1$, $2 > 2$, $6 > 23$, $23 > 6$, $12 > 3$,
 $202 > 220$, $1010 > 1009$, $12 > 11$, $56 > 65$,
 $65 > 56$, $99 > 101$, $239 > 293$, $77 > 76$;
 c) $14 > 2$, $9 = 9$, $1 < 12$, $12 > 15$, $23 > 24$, $67 > 76$,
 $77 < 78$, $5 < 500$, $1 > 3$, $0 > 5$, $405 < 504$, $5 < 6$.

8. Usporedi:



9. U prazan kvadratić stavi jedan od znakova: $>$, $<$ ili $=$.

- $22 \square 27$, $45 \square 44$, $505 \square 505$, $23 \square 78$,
 $0 \square 12$, $34 \square 56$, $32 \square 32$, $44 \square 4$.

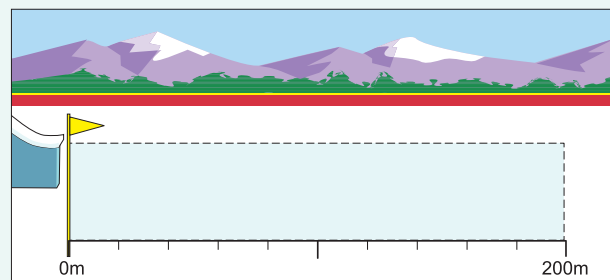
10. Poredaj ove brojeve po veličini, počevši od najmanjeg:

- a) 34, 12, 9, 45, 32, 16, 2;
 b) 6, 0, 45, 67, 1, 45, 54, 12, 21.

11. Poredaj ove brojeve po veličini, počevši od najvećeg:

- a) 37, 23, 2, 3, 71, 97, 11, 13;
 b) 87, 40, 12, 37, 11, 9, 21, 6, 49, 40

12. Na slici do crtaj zastavice koje pokazuju duljinu skoka pojedinog skijaša. Tko je skočio najdalje? Prema duljini skoka skijaši osvajaju medalje. Tko je dobio zlatnu, srebrnu, a tko brončanu medalju? Tko je skočio više od 100 m?



Luka : 100 m



Ana : 80 m



Marko: 160 m



Lucija: 110 m

Poredaj ove riječi abecednim redom:
 učenik, učitelj,
 učionica, učiteljica,
 učionica, učiti

Zadaci

13. Označi na brojevnom pravcu sljedeće brojeve:

- ◊ 1967. – prvi put presađeno ljudsko srce
- ◊ 1928. – otkriven penicilin
- ◊ 1941. – počela klinička upotreba penicilina
- ◊ 1953. – otkrivena molekula DNA
- ◊ 1954. – Jonas E. Salk pronašao cjepivo protiv dječje paralize
- ◊ 1958. – izumljen peacemaker

Poredaj ove događaje po redoslijedu događanja.

14. Označi na brojevnom pravcu sljedeće brojeve:

- ◊ 1961. – prvi čovjekov let u svemir (Jurij A. Gagarin)
- ◊ 1958. – utemeljena NASA
- ◊ 1957. – lansiran prvi umjetni satelit Sputnjik 1
- ◊ 1965. – astronaut prvi put izlazi iz broda u svemirski prostor
- ◊ 1969. – letjelicom Apollo 11 prvi ljudi se spustili na Mjesec
- ◊ 1967. – SAD, SSSR i Velika Britanija potpisale ugovor o miroljubivom korištenju i istraživanju svemira
- ◊ 1968. – svemirski brod Apollo 8 deset puta obilazi Mjesec

Poredaj ove događaje po redoslijedu događanja.

Osim znakova $<$ i $>$ postoje i znakovi

uspoređivanja $\leq$ i $\geq$.

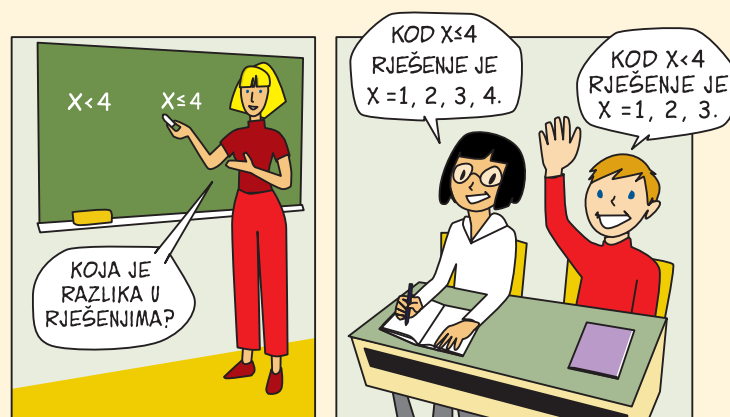


$x \leq 6$ čitamo "x je manje od ili jednako 6",
 $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$x \geq 6$ čitamo "x je veće od ili jednako 6",
 $x = 6, 7, 8, 9, 10, \dots$

Riješi zadatke:

$x \leq 8$; $x \geq 10$; $x \leq 2$; $x \leq 3$



Primjer 5.

Nađi sve prirodne brojeve x takve da je:

- a) $x < 12$;
- b) $x > 18$;
- c) $12 < x < 20$.

Rješenje:

- a) Traže se svi prirodni brojevi manji od 12.
Zaključujemo da je $x = 1, 2, 3, \dots, 10, 11$.

- b) Traže se svi prirodni brojevi veći od 18.

Naravno da takvih brojeva ima beskonačno mnogo, pa ćemo zapisati $x = 19, 20, 21, 22, 23, \dots$

- c) Ova oznaka $12 < x < 20$ znači: traže se svi prirodni brojevi koji su veći od 12, a manji od 20. Drugim riječima, traže se svi prirodni brojevi koji se nalaze između 12 i 20.
Zaključujemo da je $x = 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19$.

Zadaci

15. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da je:

- a) $x < 7$;
- b) $x > 16$;
- c) $x < 2$;
- d) $x < 1$.

16. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $3 < x < 8$;
- b) $674 < x < 676$;
- c) $796 < x < 804$.

Zadaci

17. Spoji parove:

$x < 5$	260, 261, 262, ...
$13 < x < 18$	35, 36, 37, ..., 302, 303.
$x < 2$	14, 15, 16, 17
$x > 259$	1, 2, 3, 4, ..., 97, 98
$x > 1$	1, 2, 3, 4
$x < 99$	1
$34 < x < 304$	2, 3, 4, 5, 6, ...

18. Kako možeš matematičkim jezikom zapisati:

- a) 3, 4, 5, 6, ...;
- b) 1, 2, 3, 4, 5, 6;
- c) 1, 2;
- d) 37, 38, 39, 40;
- e) 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005.

19. Pronađi broj x takav da je $689 < x < 700$, ako je x paran broj.

1.4. Približna vrijednost

Grad	Broj stanovnika
Zagreb	779 145
Rijeka	144 043
Šibenik	51 553
Osijek	144 616
Varaždin	49 075

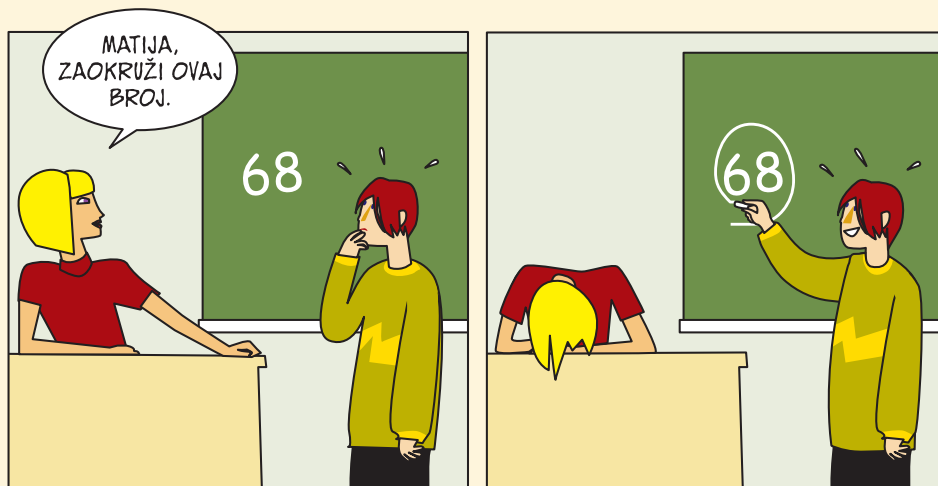
Broj stanovnika

U tablici se nalazi broj stanovnika nekih naših gradova (bez okolice) po popisu stanovništva iz 2001. godine:

- a) Koji od gradova iz tablice ima najviše, a koji najmanje stanovnika? Usmeno poredaj ove gradove po redu, počevši od onog s najviše stanovnika.
- b) Po popisu stanovništva iz 2001. godine grad Zagreb ima 779 145 stanovnika. Zašto se često kaže da Zagreb ima milijun stanovnika?
- c) Po popisu stanovništva iz 2001. godine grad Varaždin ima 49 075 stanovnika. Zašto se često kaže da Varaždin ima 50 000 stanovnika?
- d) Koliki je broj stanovnika Šibenika? Zašto se često kaže da Šibenik ima 50 000 stanovnika?

U svakodnevnom životu višeznamenaste brojeve često zamjenjujemo s njima približnim brojevima, kako bismo ih lakše pamtili i njima računali. Taj postupak se naziva **zaokruživanje** prirodnih brojeva na desetice, stotice, tisućice itd.

približna vrijednost



Primjerice, ako neka škola ima 652 učenika, možemo reći da ih približno ima 650. Ovdje smo broj učenika zaokružili na desetice. Ako neka škola ima 1176 učenika, možemo reći da ih približno ima 1200. Ovdje smo broj učenika zaokružili na stotice.

zaokruživanje
prirodnih brojeva

Primjer 1.

Zaokruživanje na desetice

Pogledaj tablicu i odgovori kada se broj zaokružuje na manju deseticu, a kada na veću:

Točna vrijednost	Približna vrijednost nakon zaokruživanja
450	450
451	450
452	450
453	450
454	450

Točna vrijednost	Približna vrijednost nakon zaokruživanja
455	460
456	460
457	460
458	460
459	460

Rješenje:

Ako broj završava znamenkama 0, 1, 2, 3 ili 4 zaokružujemo ga na prvi manji broj koji završava s nulom.

Primjerice, to zapisujemo ovako:

$452 \approx 450$ i čitamo: "broj 452 je približno jednak broju 450".

Ako broj završava s 5, 6, 7, 8 ili 9 zaokružujemo ga na prvi veći broj koji završava s nulom.

Primjerice, to zapisujemo ovako:

$457 \approx 460$ i čitamo: "broj 457 je približno jednak broju 460".

$\approx$ "je približno jednako"

Primijetimo da smo brojeve 452 i 457 zaokružili na prvi manji ili veći broj koji završava nulom. Dakle, željeli smo na mjestu jedinica dobiti nulu, a na mjestu desetica najbliži zaokružen broj. Zato ovo zaokruživanje nazivamo **zaokruživanje na desetice**.

zaokruživanje na desetice

Primjer 2. Zaokruživanje na stotice

Pogledaj podatke s nekima od najviših vrhova svijeta. Zaokruži ih na stotice i rezultate upiši u treći stupac.

Vrh	Točna visina	Približna visina
Mount Everest (Azija)	8848 m	
Aconcagua (Juž. Amerika)	6960 m	
McKinley (Sjev. Amerika)	6194 m	
Kilimanjaro (Afrika)	5895 m	
Mont Blanc (Europa)	4807 m	
Markken (Antarktik)	4520 m	
Kosciusko (Australija)	2230 m	

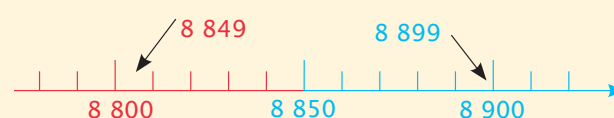
Zatim dobivene podatke prikaži grafički. Svakih 1000 m u prirodi prikaži s 10 mm (1 cm) na papiru.

Rješenje:

U treći stupac upišimo odgovarajuće brojeve zaokružene na stotice. Prirodni brojevi se zaokružuju na stotice na sličan način kao i na desetice.

zaokruživanje na stotice

Pogledajmo ovu sliku:



Sve brojeve od 8800 do 8849 zaokružujemo na **8800**, a sve brojeve od 8850 do 8900 zaokružujemo na **8900**.

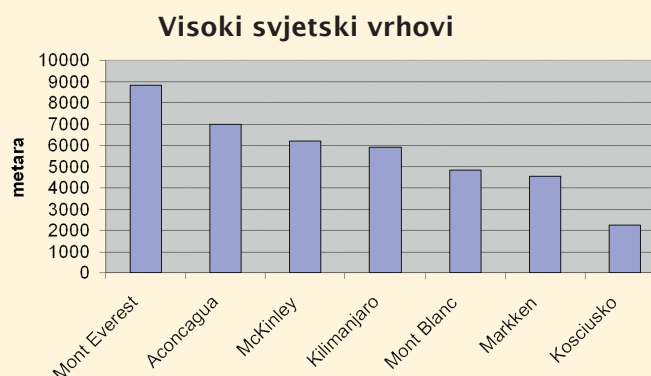
Ako je znamenka desetica 0, 1, 2, 3 ili 4 zaokružujemo ga na prvi manji broj koji završava s dvije nule.

Ako je znamenka desetica 5, 6, 7, 8 ili 9 zaokružujemo ga na prvi veći broj koji završava s dvije nule.

Primjerice, kako je Mount Everest visok 8848 m, zaokružiti ćemo duljinu na **8800** m. Na isti način zaokružimo na stotice i visine ostalih vrhova.

Vrh	Točna visina	Približna visina
Mount Everest (Azija)	8848 m	8800 m
Aconcagua (Južna Amerika)	6960 m	7000 m
McKinley (Sjev. Amerika)	6194 m	6200 m
Kilimanjaro (Afrika)	5895 m	5900 m
Mont Blanc (Europa)	4807 m	4800 m
Marken (Antarktik)	4520 m	4500 m
Kosciusko (Australija)	2230 m	2200 m

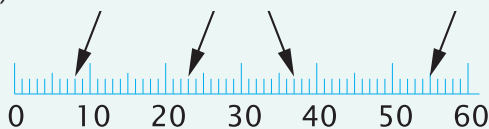
Prikažimo ova rješenja i grafički:



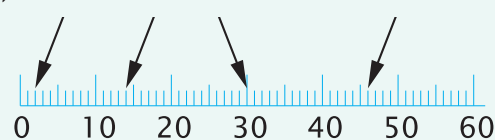
Zadaci

1. Pročitaj broj s ravnala i zaokruži ga na desetice:

a)



b)



2.

Zaokruži na desetice:

23, 451, 67, 77, 90, 95, 101, 432, 664, 903, 994.

3. Zaokruži na stotice:

- a) 120, 340, 670, 210, 550, 540, 560, 7770, 6540, 3450, 3330;
b) 302, 336, 379, 1346, 1200, 1345, 1550, 1234, 1367, 1899, 3402, 3434, 7878.

4. Zaokruži na tisućice:

- a) 3400, 12 300, 14 500, 2700, 6900, 5400, 7500, 5600, 12 300, 34 600, 72 100, 125 500;
b) 3456, 12 309, 2351, 3092, 5654, 19 888, 1973, 3422, 6671, 8991, 4545, 4554, 4499, 4500, 8237.

5. Zaokruži na najveću mjesnu vrijednost: 25, 39, 51, 123, 543, 5432, 2234, 12 340, 55 670.

6. Procijeni kolika je otprilike površina svakog od nacionalnih parkova u Hrvatskoj. Mjerne jedinice su hektari (ha). Podatke zaokruži na tisućice i zapiši ih u treći stupac.

Nacionalni park	Površina (ha)	Približna površina (ha)
Plitvička jezera	29 482	
Paklenica	10 200	
Risnjak	6400	
Mljet	5480	
Kornati	23 400	
Brijuni	3635	
Krka	10 300	
Sjeverni Velebit	10 900	

Poredaj približne vrijednosti po veličini, počevši od najvećeg nacionalnog parka. Rezultate prikaži grafički kao u Primjeru 2 tako da je 1000 ha u prirodi prikazano s 1 mm na papiru.

7. Ana je mjerila svoju sobu. Izmjerila je da je dugačka točno 3 metra i 78 centimetara, a široka 2 metra i 31 centimetar. Kolike su približne mjere Anine sobe, mjereno u cm?

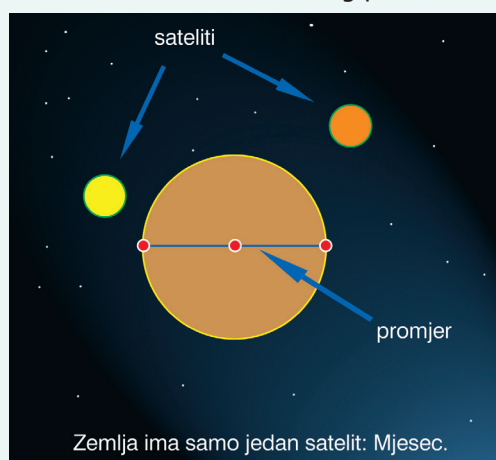


Plitvička jezera

8. U tablici su prikazane najveće dubine mora na Zemlji.

More	Dubina
Atlantski ocean	9220 m
Sredozemno more	5150 m
Tihi ocean	11 516 m
Crno more	2135 m

- a) Poredaj ove veličine, počevši od najdubljeg mora;
b) Dodaj treći stupac tablice i nađi približne dubine mora, zaokruženo na stotice.
9. Mama i tata su kupili nove bicikle. Mamin bicikl stoji 1172 kune, a tatin 1327 kuna. Zaokruži ove cijene na desetice i na stotice.
10. Zaokruži na desetice:
4, 7, 25, 28, 41, 543, 643, 766, 886, 899, 909, 1002, 1020, 1026, 1222, 1229, 1289, 1299.
11. Zaokruži na stotice:
23, 56, 87, 5, 234, 345, 546, 4342, 5432, 12789, 12765, 12739, 54320, 5400, 876540, 123456, 654321.
12. Zaokruži na tisućice:
6543, 7653, 5632, 5656, 5639, 12345, 87654, 10000, 4532987, 54367, 8732, 154, 856, 675831.
13. Zaokruži na milijune:
543213, 7654321, 987612346, 34215799, 11111111, 5454545411, 65656565652, 99999999999.
14. Zaokruži na najveću mjesnu vrijednost:
34, 56, 82, 65, 432, 345, 723, 852, 679, 5499, 3434, 2456, 6521, 54321, 56437, 87543, 876543, 111111.
15. U tablici su zapisani podaci o promjeru planeta Sunčeva sustava (u kilometrima) i o broju otkrivenih satelita svakog planeta.



Planet	Promjer (km)	Broj satelita
Merkur	4878	0
Venera	12 104	0
Zemlja	12 756	1
Mars	6787	2
Jupiter	142 800	63
Saturn	120 660	33
Uran	51 118	15
Neptun	49 528	2
Pluton	2284	1

- Zaokruži promjere planeta na tisuću kilometara. Nacrtaj tablicu i poredaj ih od najvećeg do najmanjeg prema njihovim promjerima.
 - Zaokruži broj satelita na desetice.
16. U tablici se nalazi 10 najvećih europskih gradova, prema popisu stanovništva iz 2000. godine.

Grad	Broj stanovnika
Atena	3 070 000
Moskva	8 720 000
Madrid	5 180 000
Berlin	3 470 000
Pariz	9 060 000
St. Peterburg	4 840 000
Rim	2 650 000
Barcelona	4 750 000
Kijev	2 630 000
London	7 070 000

- a) Pročitaj naglas sve podatke;
b) Koji grad je imao najviše stanovnika 2000. godine?
c) U bilježnicu nacrtaj tablicu u koju ćeš upisati gradove po broju stanovnika, počevši od grada s najvećim brojem stanovnika;
d) Zaokruži broj stanovnika svakog grada na milijune i to upiši u treći stupac svoje tablice.

Vježbalica

- Koji od navedenih brojeva su parni: 254, 40009, 1023, 6, 48, 86, 500, 608, 456347.
- Koji od navedenih brojeva su neparni: 600, 90, 543, 3, 678, 44, 323, 7876, 76675, 57655, 67, 9.

3. Napiši brojevima i riječima:

- Koliko grama ima u kilogramu?
- Koliko centimetara ima u metru?
- Koliko litara ima u hektolitr?
- Koliko kilograma ima u toni?
- Koliko milimetara ima u kilometru?
- Koliko decilitara ima u hektolitr?

4. Promatraj učenike u svom razredu i prebroji koliko ih ima:

crvenu majicu	
traperice	
dugu kosu	
plave oči	
majicu s dugim rukavima	
suknju	
smeđu kosu	

5. Napiši još tri člana zadanog niza prirodnih brojeva:

- 1, 4, 7, 10, 13, ...;
- 8, 10, 12, 14, 16, ...;
- 2, 4, 8, 16, 32, ...;
- 2, 7, 12, 17, 22, 27, ...;
- 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...;
- 2, 3, 6, 18, 108, 1944,

6. Zapiši sve troznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 4, 0 i 5. Koliko ih ima?

7. Zapiši sve troznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 8, 6 i 3. Koliko ih ima?

8. Zapiši sljedbenike ovih brojeva: 432, 500, 70000, 6, 80, 1009, 899, 8999, 10, 1, 699.

9. Zapiši prethodnike ovih brojeva: 600, 90, 61, 10000, 1799, 6400, 2407, 15009, 50, 11, 110.

10. Dopuni:

Broj 25 je _____ broja 24.

Broj 567 je _____ broja 568.

Broj 45 je _____ broja 46.

Broj 100 je _____ broja 99.

Broj 56 je sljedbenik broja ____.

Broj 789 je prethodnik broja ____.

Broj 25 je prethodnik broja ____.

Broj 1000009 je sljedbenik broja ____.

11. Zapiši i pročitaj traženi broj, te njegov prethodnik i sljedbenik:

- najmanji sedmeroznamenkasti broj;
- najveći troznamenkasti broj koji ima samo dvije znamenke 9;
- najveći dvoznamenkasti broj koji sadrži jednu znamenku 1;
- najmanji četvaroznamenkasti broj u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jednom;
- najveći peteroznamenkasti broj u kojem se znamenka 0 pojavljuje dvaput;
- najmanji četveroznamenkasti broj u kojem nema znamenke 2 i u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jedanput;
- najveći osmeroznamenkasti broj u kojem nema znamenke 9, niti 7 i u kojem se svaka znamenka pojavljuje samo jedanput.

12. Dopuni ove nizove tako da to budu nizovi uzastopnih prirodnih brojeva:

- ?, ?, 58, ?;
- ?, ?, ?, 113;
- ?, ?, 46, ?, ? .

13. Dopuni ove nizove tako da to budu nizovi uzastopnih parnih brojeva:

- a) ?, ?, ?, ?, 50, ?;
b) ?, ?, 78, ?, ?, ?.

14. Dopuni ove nizove tako da to budu nizovi uzastopnih neparnih brojeva:

- a) ?, ?, 25, ?, ?, ?, ?, ?;
b) ?, ?, ?, 559, ?, ?, ?.

15. Stranice trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Kolika je duljina svake stranice ako je najdulja stranica duga 17 cm?

16. Stranice trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Kolika je duljina svake stranice ako je srednja stranica duga 8 cm?

17. Stranice trokuta su uzastopni parni brojevi. Kolika je duljina svake stranice ako je najdulja stranica duga 46 mm?

18. Stranice trokuta su uzastopni neparni brojevi. Kolika je duljina svake stranice ako je najkraća stranica duga 9 cm?

19. Zapiši brojka:

- a) tri milijarde šezdeset tisuća petsto tri;
b) sedam bilijuna četiri milijarde tristo tisuća i dva;
c) tristo bilijardi dvadesetpet bilijuna pedeset i jedan.

20. Nacrtaj brojevni pravac $s = 6$ mm. Na njemu istakni točke A i B koje su pridružene brojevima 4 i 16. Zatim istakni sve točke koje se nalaze između točaka A i B.

21. Nacrtaj brojevni pravac $s = 12$ mm. Na njemu istakni točke koje su pridružene brojevima 3 i 10. Zatim istakni sve točke koje se nalaze između točaka A i B.

22. Poredaj ove brojeve po veličini počevši od najmanjeg:

- a) 43, 21, 5, 54, 23, 61, 7;
b) 13, 0, 34, 76, 19, 37, 39, 10, 1.

23. Poredaj ove brojeve po veličini počevši od najvećeg:

- a) 73, 32, 21, 34, 17, 79, 51, 89;
b) 78, 4, 24, 73, 71, 8, 15, 95, 48, 60.

24. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da je:

- a) $x < 9$; b) $x = 16$;
c) $x > 27$; d) $x = 5$;
e) $x < 177$; f) $x = 11$;
g) $x > 3$; h) $x < 14$; i) $x = 16$.

25. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $7 < x < 11$; b) $67 < x < 76$;
c) $96 < x < 104$; d) $45 < x < 55$.

26. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $x < 12$; b) $11 < x < 16$;
c) $x = 10$; d) $4 < x < 6$.

27. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $x > 11$; b) $x < 56$;
c) $24 < x < 34$; d) $x = 15$.

28. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $3 < x < 6$; b) $116 < x < 126$;
c) $14 < x < 15$; d) $x > 5$.

29. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

- a) $7 < x < 11$; b) $7 < x < 11$;
c) $7 < x < 11$; d) $7 < x < 11$.

30. Pronađi sve prirodne brojeve x takve da vrijedi:

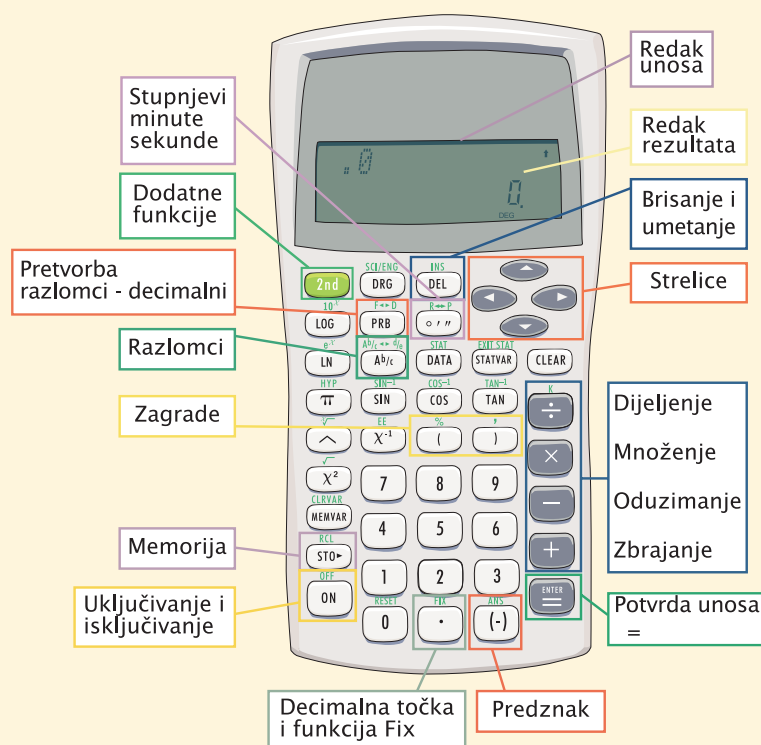
- a) $23 < x < 28$; b) $x < 6$;
c) $x < 14$; d) $4 < x < 5$.

1.5. Upoznajmo džepno računalo

Promišljena upotreba džepnog računala može olakšati rješavanje, istraživanje i donošenje zaključaka o raznim matematičkim problemima. Džepno računalo ne može samo stalno rješavati probleme, ono je alat koji olakšava učenje. Uporaba džepnog računala ne isključuje klasičan način računanja s olovkom i papirom, a u nekim zadacima čak je brže i jednostavnije doći do rješenja na takav način.

Većina današnjih džepnih računala ima sličan izgled i slične mogućnosti. Ovdje možete pročitati osnovne upute za jedno ogledno džepno računalo, a ukoliko radite s drugačijim modelom pronađite na njemu odgovarajuće tipke

Neki modeli džepnog računala imaju zaslon s dva retka, što je pogodno za provjeravanje tijekom upisa rezultata. Prvi redak (redak unosa) prikazuje unesene brojeve i znakove. Ukupna duljina mu je 88 znakova. Pritiskom na tipke sa strelicama pomičete se po retku lijevo ili desno. Drugi redak (redak rezultata) prikazuje rezultat do 10 znamenaka. Ako rezultat ima više znamenaka prikazuje se u znanstvenom zapisu.

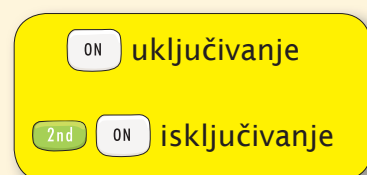


Osnovne operacije

Primjer 1. Uključivanje i isključivanje džepnog računala

1. Za uključivanje džepnog računala pritisnite tipku **ON**. Na zaslonu se pojavi pokazivač (treptajući crni pravokutnik).

2. Za isključivanje džepnog računala pritisnite najprije tipku **2nd** te zatim tipku **ON**.

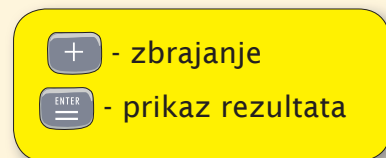


Primjer 2. Zbrajanje

Da biste izračunali koliko je $12 + 7$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima **1** **2**
2. Tipku za zbrajanje **+**
3. Tipku s brojem **7**

4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku **ENTER**.
5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 19.

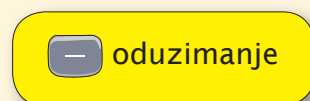


Primjer 3. Oduzimanje

Da biste izračunali koliko je $123 - 78$ pritisnite:

1. Tipke sa brojevima **1** **2** **3**
2. Tipku za oduzimanje **-**

3. Tipku s brojevima **7** **8**
4. Za prikaz rezultata pritisnite tipku **ENTER**.
5. Na zaslonu će se prikazati rezultat 45.



Brisanje

Primjer 4.

Brisanje jednog ili nekoliko znakova

Ponekad je potrebno neki broj ili znak obrisati.

1. Primjerice napisali ste 563 umjesto 53.
2. Da biste izbrisali broj 6 pritiskom na strelicu

 pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6

3. Pritisnite tipku 

4. Ukoliko želite obrisati više znakova postupak ponovite.

 **brisanje udesno**

Primjer 5. Brisanje cijelog retka

Da biste obrisali cijeli redak pritisnite tipku

.

Tipka  ne briše sadržaj memorije.

 **brisanje cijelog retka**

Primjer 6.

Brisanje svih redaka i memorije

Istovremenim pritiskom na tipke  i  brišu se svi podaci iz memorije i svi prije

unešeni reci. Pri tom se džepno računalo vraća na osnovne postavke.

 
potpuno brisanje

Ispravljanje

Primjer 7. Ispravljanje unosa

1. Utipkajte brojeve  , pritisnite tipku  te zatim brojeve  
2. Želimo umjesto unesenih brojeva napisati 41 i 26
3. Pritiskom na strelicu  pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6 te pritisnite tipku s brojem . Time smo broj 6 zamijenili brojem 1

4. Zatim pritiskom na strelicu  pomaknite pokazivač na broj 3 i pritisnite tipku s brojem . Time smo broj 3 zamijenili brojem 6
6. Pritiskom na tipku  dobivamo rezultat zadane računske operacije
7. Na zaslonu će se prikazati rezultat 67.

 
pomicanje po retku unosa

Primjer 8.

Ispravljanje unosa s umetanjem

U prethodnom primjeru ste vidjeli da svaki novi unos broja briše prethodno napisani broj. Ukoliko želite umetnuti neki broj ili znak potrebno je uključiti funkciju *Insert*.

1. Utipkajte brojeve  
2. Pritisnite tipku za zbrajanje 
3. Utipkajte brojeve  
4. Želimo umjesto broja 46 imati broj 416. Dakle, između 4 i 6 trebamo unijeti broj 1
5. Pritiskom na strelicu  pomaknite pokazivač ulijevo na broj 6

6. Pritisnite tipku za uključivanje dodatnih funkcija , te zatim tipku . Pokazivač je promijenio oblik u treptajuću crticu
7. Pritisnite tipku s brojem . Na zaslonu su se brojevi 4 i 6 razmaknuli i između njih se pojavio broj 1
8. Pritiskom na strelicu  pomaknite pokazivač na desni kraj. Funkcija umetanja (*Insert*) se automatski isključuje.
9. Pritisnite tipku  da biste dobili rezultat.
10. Na zaslonu će se prikazati rezultat 439.

 
uključivanje umetanja

1.6. Zbrajanje prirodnih brojeva

Komplet bojica:

Luka ima u pernici 14 flomastera i 15 drvenih bojica. Koliko ih je ukupno u njegovoj pernici?

Koja računska operacija nam je potrebna da riješimo taj zadatak?

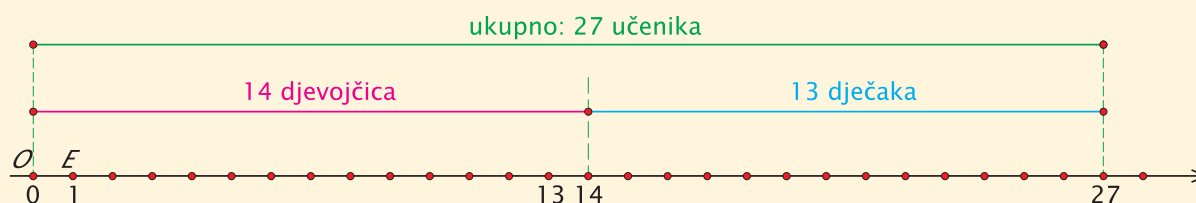


U 5.a razredu ima 14 djevojčica i 13 dječaka. Jasno je da je ukupan broj učenika 5.a razreda 27. Taj smo rezultat dobili zbrajanjem broja učenika i učenica u razredu. U svakodnevnom životu vrlo često trebamo jednoj veličini pribrojiti drugu. Brojeve koje zbrajamo nazivamo **pribrojnicima**, a rezultat pri zbrajanju je **zbroj ili suma**.

$$14 + 13 = 27$$

pribrojnici zbroj ili suma

Zbrajanje možemo prikazati i na brojevnom pravcu:



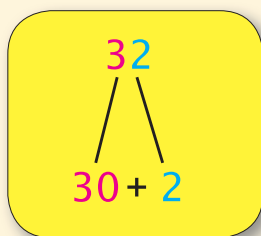
Primjer 1. Zbrajanje napamet

Napamet izračunaj $53 + 32$.

Rješenje:

$$53 + 32 = ?$$

Brže ćemo računati napamet ako zbroj rastavimo na dva dijela. U prvom dijelu zbrajamo $53 + 30 = 83$, a zatim dobivenom zbroju pribrojimo preostale jedinice: $83 + 2 = 85$.

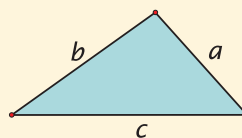


Primjer 2.

Duljina stranice a trokuta iznosi 7 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 2 cm dulja od stranice a , a stranica c za 3 cm dulja od stranice b ?

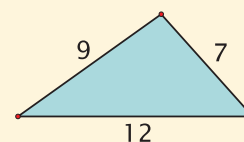
Rješenje:

Stranica a trokuta duga je 7 cm. Stranica b je dulja od a , a stranica c je dulja od b . Stoga zaključujemo da je a najkraća, a c najdulja stranica u trokutu.



Stranica b je dulja od a za 2 cm. To znači da je $b = 7 + 2 = 9$ cm. Stranica c je za 3 cm dulja od b .

To znači da je $c = 9 + 3 = 12$ cm.



Primjer 3. Procjena

Tko je u pravu?

Rješenje:

Zbrojimo li 399 i 499 dobit ćemo $399 + 499 = 898$ kn. Ako tražimo točan rezultat, tada ni mama ni Maja nisu u pravu. Međutim, u životnim situacijama, kao što je ova prikazana u stripu, često koristimo približne vrijednosti brojeva. One mogu više ili manje odstupati od točnog broja. Tada govorimo o zaokruživanju brojeva. Mama je do svog rezultata došla tako da je brojeve 399 i 499 zaokružila na 400 i 500. Maja je do svog rezultata došla tako da je brojeve 399 i 499 zaokružila na 300 i 400, što je pogrešno zaokruživanje, o čemu smo učili u poglavlju 1.6. Dakle, ako tražimo približan rezultat, mama je u pravu. Kažemo da je mama dobro procijenila rezultat. **Procjena** je naslućivanje rezultata bez strogog računanja. Pri procjeni brojeve obično zaokružujemo na najveću mjesnu vrijednost. I procjenu treba vježbati, stoga pokušaj procijeniti rješenja sljedećih zadataka.

procjena



Primjer 4. Pisano zbrajanje

U Hrvatskoj je do 2005. izgrađeno 1073 km autocesta i poluautocesta. Nakon 2005. planira se izgraditi još 391 km. Koliko će ukupno km autocesta i poluautocesta biti izgrađeno?

Rješenje:

Kod zbrajanja većih brojeva koristit ćemo se pisanim zbrajanjem. Zapišimo oba pribrojnika jednog ispod drugoga tako da jedinice jednog broja budu ispod jedinica drugog broja, te desetice budu također jedna ispod druge itd. Zatim zbrajamo počevši od znamenki jedinica, pazeći pritom na prelazak preko broja 10 pri zbrajanju.

Bude li izgradnja tekla po planu, imat ćemo izgrađeno 1464 km autocesta i poluautocesta.

pisano zbrajanje
ili zbrajanje s
potpisivanjem

$$\begin{array}{r} 1073 \\ + 391 \\ \hline 1464 \end{array}$$



Zadaci

1. Izračunaj napamet: $50 + 60$, $30 + 50$, $110 + 70$, $230 + 40$, $350 + 60$, $220 + 130$, $150 + 240$, $560 + 110$, $450 + 450$, $320 + 90$, $110 + 220$.
2. Na lijevu stranu vage stavi dva utega tako da vaga bude u ravnoteži. Na desnoj strani vage je uteg od: a) 70 g; b) 50 g; c) 45 g; d) 40 g. Postoji li više mogućnosti u pojedinom zadatku?



3. Izračunaj napamet: $300 + 200$, $400 + 900$, $700 + 600$, $1200 + 800$, $3200 + 4500$, $6500 + 9100$, $22\ 800 + 3700$, $45\ 500 + 5600$, $11\ 900 + 11\ 900$, $2700 + 1400$, $34\ 800 + 12\ 300$, $25\ 100 + 1800$.
4. Izračunaj napamet: $56 + 40$, $12 + 80$, $40 + 76$, $45 + 80$, $120 + 33$, $320 + 56$, $67 + 660$, $235 + 50$, $780 + 88$, $560 + 56$, $440 + 122$.
5. Izračunaj napamet: $42 + 55$, $33 + 22$, $25 + 31$, $72 + 27$, $45 + 91$, $35 + 54$, $38 + 11$, $132 + 42$, $456 + 32$, $641 + 18$, $435 + 74$, $227 + 43$.
6. Duljina stranice a trokuta iznosi 8 cm. Kolike su preostale dvije stranice, ako je stranica b za 2 cm dulja od stranice a , a stranica c za 5 cm dulja od stranice b ?
7. Duljina stranice a trokuta iznosi 5 cm. Kolike su preostale dvije stranice, ako je stranica b za 1 cm dulja od stranice a , a stranica c za 4 cm dulja od stranice a ?

8. Luka ide u Kanadu u posjet svom bratiću. Putuje 20.6., a vraća se 35 dana kasnije. Izračunaj točno kojeg datuma Luka dolazi kući.

9. Pas Beni je 12.1. bio kod veterinara zbog cijepljenja. Tada je veterinar rekao: "Dodite opet za 40 dana". Kojeg datuma Beni opet treba k veterinaru?



10. U nekom izlogu na prvoj lutki hlače stoje 399 kn i majica 149 kn. Na drugoj je cijena haljine 599 kn i šala 99 kn, a treća lutka ima suknju koja stoji 139 kn i majicu 55 kn.

Odredi koliko stoji odjeća na svakoj lutki.

11. Koje procjene su krive? Prekriži ih!
 $34 + 88 \approx 400$, $45 + 66 \approx 100$,
 $77 + 897 \approx 105$, $32 + 55 \approx 90$.
12. U tablici je prikazan primjer procjene i točnog rezultata.

Zadatak	Procjena	Točan rezultat
$57 + 21$	$\approx 60 + 20 = 80$	$= 78$
$23 + 47$	$\approx 20 + 50 = 70$	$= 70$
$145 + 37$	$\approx 150 + 40 = 190$	$= 182$

Procijeni pa izračunaj točan rezultat: $45 + 88$, $56 + 11$, $38 + 35$, $25 + 71$, $32 + 57$, $38 + 83$, $56 + 13$, $123 + 45$.

13. Je li zbroj bliži broju 60 ili 70?
a) $23 + 33$;
b) $66 + 11$;
c) $56 + 10$;
d) $45 + 15$.

Zadaci

14. Bez računanja odgovori koji broj je veći:

- a) 12 ili $12 + 3$;
- b) $245 + 6$ ili $245 + 5$;
- c) $514 + 67$ ili 67 ;
- d) $214 + 56$ ili $213 + 56$.

Objasni svoje odgovore.

15. Bez računanja odgovori koji broj je manji:

- a) 2567 ili $4 + 2567$;
- b) $912 + 0$ ili 912 ;
- c) $405 + 32$ ili $402 + 32$;
- d) $35 + 665$ ili $665 + 35$.

16. Luka je bio u knjižnici 12. rujna i posudio knjigu. Knjigu mora vratiti u roku od 35 dana.

- a) Procijeni kojeg datuma najkasnije Luka mora vratiti knjigu;
- b) Izračunaj točan rok vraćanja knjige.

17. Maja je otišla na more 30. srpnja i ostat će 3 tjedna.

- a) Procijeni datum Majinog povratka s mora;
- b) Izračunaj točan datum Majinog povratka s mora.

18. Jednakokrakan trokut ima osnovicu dugu 7 cm, a svaki krak je za 4 cm dulji od osnovice. Kolika je duljina svakog kraka?

19. Maja je složila puzzle-sliku za 57 minuta. Luki je za istu sliku trebalo 27 minuta više. Za koliko vremena je Luka složio sliku? Koliko je to sati?

20. Izračunaj, pa napiši zaključak:

- a) $26 + 14 =$; $44 + 46 =$; $50 + 18 =$;
Zbroj parnog i parnog broja je _____ broj.
- b) $26 + 13 =$; $44 + 45 =$; $50 + 17 =$;
Zbroj parnog i neparnog broja je _____ broj.
- c) $21 + 12 =$; $41 + 44 =$; $51 + 12 =$;
Zbroj neparnog i parnog broja je _____ broj.
- d) $12 + 13 =$; $44 + 45 =$; $50 + 51 =$;
Zbroj dva uzastopna broja je _____ broj.
- e) $13 + 13 =$; $44 + 44 =$; $50 + 50 =$;
Zbroj dva jednaka broja je _____ broj.

21. Izračunaj napamet: $55 + 16$, $34 + 48$, $49 + 13$, $21 + 39$, $22 + 99$, $48 + 84$, $56 + 65$, $124 + 36$, $32 + 229$, $41 + 419$, $205 + 27$, $32 + 119$.

22. Izračunaj napamet: $35 + 59$, $321 + 85$, $67 + 92$, $141 + 119$, $558 + 84$, $327 + 45$, $221 + 91$, $505 + 67$, $702 + 53$, $79 + 368$, $586 + 68$.

23. Ako želimo zbrojiti $56 + 19$, zgodno je zbrojiti $56 + 20 = 76$. Kako dodajemo 19 koji je za jedan manji od 20, zaključujemo da je traženi zbroj za jedan manji od 76, pa je $56 + 19 = 75$.

Napamet izračunaj: $55 + 9$, $76 + 19$, $45 + 19$, $123 + 19$, $56 + 59$, $59 + 32$, $66 + 29$, $45 + 29$, $33 + 19$, $44 + 9$, $71 + 79$.

24. Pisanim zbrajanjem izračunaj:

$$\begin{array}{r} 45639 \\ + 348 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 23450 \\ + 12654 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 12005 \\ + 1203 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 32951 \\ + 1359 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \\ + 14789 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 34527 \\ + 76239 \\ \hline \end{array}$$

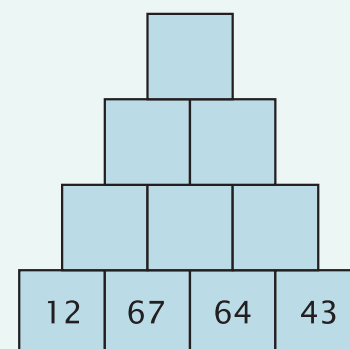
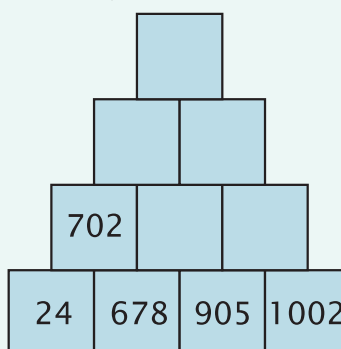
$$\begin{array}{r} 7843 \\ + 55661 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 452 \\ + 67583 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 \\ + 63778 \\ \hline \end{array}$$

25. Procijeni rezultat tako da najprije zaokružiš pribrojnik na desetice, a zatim pisanim zbrajanjem izračunaj:

- a) $56 + 678$, $497 + 453$, $5506 + 4537$;
- b) $5611 + 5007$, $34\,227 + 7106$, $56\,991 + 43\,226$;
- c) $56 + 345$, $89 + 9610$, $562 + 264$, $301 + 976$;
- d) $435\,798 + 6452$, $2134 + 5\,346\,437$, $67\,857 + 6578$.

26. U svako polje piramide dolazi zbroj dvaju polja ispod njega. Koji je broj na vrhu piramide?

a) b)



27. U prazna mjesta upiši znamenke tako da zbroj bude točan:

$$\begin{array}{r} ??42 \\ +710? \\ \hline 102?5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5?29 \\ +10?2 \\ \hline ?16? \end{array} \quad \begin{array}{r} 7074 \\ +?? \\ \hline ??97 \end{array} \quad \begin{array}{r} 45\ 6?9\ 30? \\ +?3\ ?0?\ 3?5 \\ \hline 6?\ 681\ ?36 \end{array}$$

28. Matija predstavlja svoju školu u atletskoj disciplini skok udalj. U prvom skakanju preskočio je 156 cm. U drugom skakanju preskočio je 11 cm više nego u prvom, a u trećem je preskočio 2 cm više nego u drugom skakanju. Koliko je Matija preskočio u drugom i trećem skakanju?

29. Šibenska katedrala visoka je 38 m. Ona je za 67 m niža od zagrebačke katedrale. Koliko je visoka zagrebačka katedrala?

Šibenska katedrala



30. Luka je pročitao 58 stranica knjige iz lektire. Ostalo mu je za pročitati još 5 stranica više nego je pročitao dosad. Koliko stranica ima knjiga koju Luka čita?



31. Ispuni ovu brojčanu križaljku:

VODORAVNO →:
1) $154 + 278$;
5) $12163 + 13306$;
7) $199 + 103$;
8) $4023 + 1594$.

OKOMITO ↓:

1) $32109 + 15106$;
2) $222 + 103$;
3) $597 + 495$;
4) $1024 + 2583$;
6) $134 + 297$.

1	2			3
			4	
5		6		
		7		
8				

32. Marko je odličan učenik srednje škole. Od svojeg grada dobiva godišnju stipendiju za školovanje. Prve godine stipendija je iznosila 1250 kn. Druge godine je dobio 375 kn više, a treće još 520 kn više. Kolika je bila Markova stipendija druge, a kolika treće godine? Koliko je Marko dobio u sve tri godine?
33. Lucijin razred se sprema na planinarenje. Lucija je kupila novu opremu. Ruksak je platila 537 kn, vreću za spavanje 1258 kn, a cipele 389 kn. Koliko je ukupno Lucija potrošila na opremu?
34. a) Koji broj je za 12 veći od broja 33?
b) Koji broj je za 23 veći od broja 67?
c) Koji broj je za 1 veći od broja 145?
d) Koji broj je za 56 veći od broja 56?
e) Koji broj je za 78 veći od broja 23?
f) Koji broj je za 360 veći od broja 1?

1.7. Svojstva zbrajanja prirodnih brojeva

Tko će prije?

Uzmi štopericu ili stavi ispred sebe ručni sat. Pokušaj u što kraćem vremenu riješiti ovaj zadatak. Vrijeme sad!

$$98 + 114 + 2 =$$

Ovaj zadatak se može riješiti za vrlo kratko vrijeme ako dobro poznajemo zbrajanje prirodnih brojeva. Upoznajmo stoga osnovna svojstva zbrajanja. Svojstva nam pomažu brže i uspješnije rješavati matematičke zadatke, a iz primjera ćemo zaključiti da ih svakodnevno koristimo.



Primjer 1. Zbroj prirodnih brojeva

Zbroji po volji dva prirodna broja. Je li njihov zbroj prirodan broj?

Rješenje:

Koja god dva prirodna broja odabrali, njihov zbroj će opet biti prirodan broj.

Zbroj dvaju prirodnih brojeva je uvijek prirodan broj.

Ako pribrojnicima zamijenimo mjesta, zbroj će ostati isti.

Komutativnost vrijedi za bilo koja dva prirodna broja, a kako prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, to ćemo pravilo zapisati simbolima

$$a + b = b + a,$$

pri čemu a i b mogu biti bilo koji prirodni brojevi.

komutativnost
komutacija = zamjena

Primjer 2. Komutativnost

Martinina majka na posao putuje najprije autobusom 25 km, a zatim tramvajem još 8 km. Koliko kilometara ona prijeđe pri odlasku na posao? Koliko kilometara prijeđe kad se vraća s posla?

Rješenje:

Martinina majka prelazi isti put kad odlazi na posao kao i kad se vraća s posla, a to je 33 km. Ali, na putu prema poslu ona prvo prijeđe 25 km autobusom pa 8 km tramvajem.

$$25 + 8 = 33$$

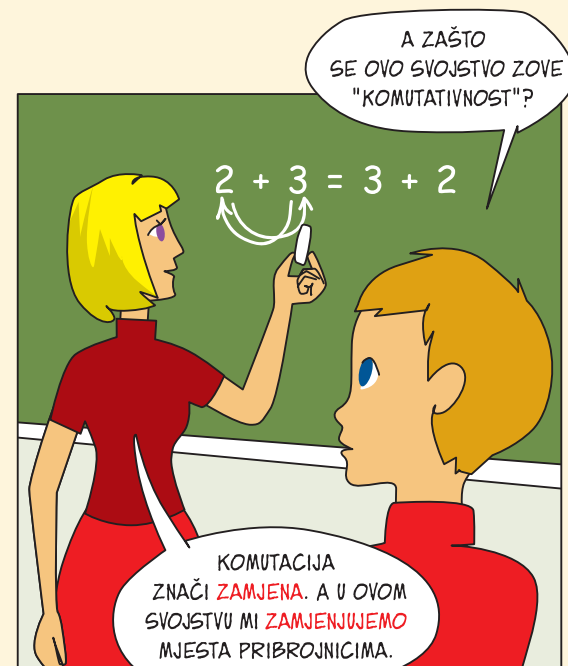
Na povratku s posla ona prvo prijeđe 8 km tramvajem, a zatim 25 km autobusom.

$$8 + 25 = 33$$

Primijetimo da smo pribrojnicima 25 i 8 zamijenili mjesta, a zbroj je ostao 33. Ovo svojstvo prirodnih brojeva naziva se **komutativnost**.

Svojstvo komutativnosti

Ako pribrojnici zamijene mjesta, zbroj će ostati isti.



Primjer 3. Asocijativnost

Koliko je štapića na slici?



Maja: "10 + 7 = 17, 17 + 4 = 21, Tu je 21 štapić!"

Luka: "Rezultat ti je dobar, ali si krivo računala.

Računa se ovako: 4 + 10 = 14, 14 + 7 = 21. Zato je odgovor 21 štapić!"

Tko je u pravu?

Rješenje:

U prvom kupu su 4 štapića, u drugom 10, a u trećem kupu 7 štapića. Maja je prvo zbrojila štapiće iz posljednja dva kupa, a zatim je tom zbroju dodala broj štapića iz prvog kupa. Ako u zagrade stavimo zbroj koji se prvo računa, to možemo zapisati ovako:

$$4 + (10 + 7) = 4 + 17 = 21$$

Luka je išao drugim redoslijedom:

$$(4 + 10) + 7 = 14 + 7 = 21$$

$$(4 + 10) + 7 = 4 + (10 + 7)$$

Iz ove slike se vidi da se ukupan broj štapića nije promijenio kako god udružili kupove. To se svojstvo zbrajanja naziva **asocijativnost**.

Ako iste pribrojnice združimo na različite načine, zbroj će uvijek biti jednak.

Asocijativnost vrijedi za bilo koja tri prirodna broja, a kako prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, to ćemo pravilo zapisati simbolima

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

pri čemu a , b i c mogu biti bilo koji prirodni brojevi.

Zato izraz $4 + 10 + 7$ možemo rješavati redoslijedom kojim želimo.

Svojstvo asocijativnosti

Ako pribrojnice združimo na različite načine, zbroj će ostati isti.

asocijativnost

asocijacija = udruživanje, združivanje

Primjer 4. Nula kao pribrojnik

Izračunaj:

a) $5 + 0 =$; b) $0 + 11 =$; c) $5 + 0 + 10 =$.

Nula kao pribrojnik

Ako prirodnom broju pribrojimo nulu, zbroj će biti jednak tom broju.

Rješenje:

a) $5 + 0 = 5$; b) $0 + 11 = 11$; c) $5 + 0 + 10 = 15$

Ako nulu pribrojimo nekom prirodnom broju a , rezultat će biti a . To vrijedi za svaki prirodan broj, pa zapisujemo $a + 0 = a$.

Zadaci

1. Primjeni svojstva zbrajanja i što jednostavnije izračunaj na pamet:

a) $125 + 237 + 43 + 75$

b) $1164 + 111 + 36 + 99$

c) $279 + 27 + 11 + 333 + 50$

d) $1012 + 632 + 88 + 451 + 449$

e) $43 + 22 + 10 + 18 + 17 + 0$,

f) $22 + 34 + 54 + 78 + 92 + 11 + 33$,

g) $23 + 43 + 4 + 56 + 7 + 13 + 45 + 1 + 10$,

h) $22 + 43 + 54 + 22 + 14 + 43 + 72 + 9$.

Zadaci



2. Ispuni ovu tablicu zbrajanja. Gdje primjećuješ svojstvo komutativnosti?

+	15	34	39	53	62	77
15						
34						
39						
53						
62						
77						

3. U zadacima s tri pribrojnika brže ćemo doći do rezultata ako koristimo svojstva komutativnosti i asocijativnosti te združimo odgovarajuće pribrojnike: $54 + 22 + 6 = 60 + 22 = 82$



Združi brojeve čiji zbroj završava nulom.

Napamet riješi:

- $66 + 4 + 12$, $15 + 144 + 5$;
 - $27 + 34 + 6$, $73 + 22 + 7$;
 - $23 + 45 + 17$, $45 + 54 + 66$;
 - $92 + 35 + 25$, $122 + 18 + 78$.
4. Učenci petih razreda idu na izlet. Iz 5.a razreda 22 učenika, iz 5.b 23, a iz 5.c 27 učenika:
- procijeni koliko otprilike učenika petih razreda ide na izlet;
 - napamet izračunaj njihov točan broj.
5. Zbog asocijativnosti i komutativnosti na pogodan način možemo udruživati i više od 3 pribrojnika: $34 + 8 + 10 + 6 = 40 + 18 = 58$
- Izračunaj:
- $56 + 8 + 66 + 44$, $24 + 6 + 12 + 15$;
 - $51 + 17 + 9 + 22$, $78 + 34 + 5 + 12$;
 - $67 + 45 + 15 + 23$, $55 + 11 + 21 + 15$;
 - $23 + 46 + 11 + 54$, $95 + 33 + 14 + 36$;
 - $2 + 35 + 88 + 14$, $93 + 41 + 24 + 36$;
 - $77 + 32 + 23 + 77$, $55 + 94 + 66 + 13$.
6. Avion je u ponedjeljak prešao 2889 km, u utorak 5600 km, u srijedu 1200 km i u četvrtak 6782 km. Koliko je ukupno kilometara prešao avion od ponedjeljka do četvrtka?
7. Zbrajamo dva broja i jedan pribrojnik je 0. Što možeš reći o zbroju?
8. Zbroj je jednak jednom od pribrojnika. Što možeš reći o drugom pribrojniku?



9. U tablici je prikazan broj stanovnika u istarskim gradovima prema popisu stanovništva iz 2001. godine.



Grad	Stanovništvo
Buje	5340
Buzet	6059
Labin	12426
Novigrad	4002
Pazin	9227
Poreč	17 460
Pula	58 594
Rovinj	14 234
Umag	12 901

- Prepiši tablicu u bilježnicu i gradove poredaj počevši s istarskim gradom s najviše stanovnika.
 - Koliko ukupno stanovnika u Istri stanuje u navedenim gradovima?
10. Majina mama zbraja iznose računa koje treba platiti:
- | | |
|-------------------|--------|
| Struja | 215 kn |
| Plin | 385 kn |
| Voda | 129 kn |
| TV pretplata | 56 kn |
| Smeće | 44 kn |
| Čišćenje stubišta | 21 kn |
- Zgodnim grupiranjem pribrojnika pokušaj napamet izračunati koliko kuna Majina mama treba odvojiti za režije. Svoj račun zatim provjeri pisanim zbrajanjem.
11. Stranice trokuta su tri uzastopna prirodna broja. Izračunaj mu opseg ako je srednja stranica duga 45 cm.
12. Stranice trokuta su tri uzastopna broja. Izračunaj mu opseg ako je najdulja stranica duga 212 cm.
13. Stranice trokuta su tri uzastopna parna broja. Izračunaj mu opseg ako je najkraća stranica duga 516 cm.
14. Zbroji sve troznamenkaste brojeve koji se mogu zapisati pomoću znamenaka 5, 6 i 4:
- svaka znamenka u broju smije biti napisana samo jednom
 - znamenke se smiju ponavljati.
15. Izračunaj opseg trokuta sa stranicama:
- 145 cm, 212 cm i 209 cm; b) 203 cm, 302 cm i 419 cm.

1.8. Oduzimanje prirodnih brojeva



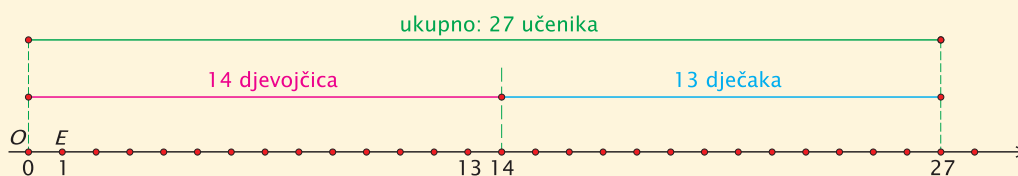
Novi pisač

Luka želi kupiti pisač za računalo koji stoji 2100 kn. On je uštedio 540 kn, a roditelji su mu obećali da će oni dati ostatak novca. Koliko novca trebaju dodati mama i tata?

Ako u 5.a razredu ima ukupno 27 učenika, a od toga je 14 djevojčica, pitamo se koliko je u tom razredu dječaka. Naravno, u tom će razredu biti 13 dječaka. Taj smo rezultat dobili oduzimanjem broja učenica od ukupnog broja učenika u tom razredu, $27 - 14 = 13$. U svakodnevnom životu vrlo često trebamo od jedne veličine oduzeti drugu. Pritom broj od kojeg oduzimamo nazivamo **umanjenik**, broj kojim oduzimamo **umanjitelj**, a rezultat pri oduzimanju **razlika ili diferencija**.

$$\begin{array}{c} 27 - 14 = 13 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\ \text{umanjenik} \quad \text{umanjitelj} \quad \text{razlika ili diferencija} \end{array}$$

Oduzimanje možemo prikazati i na brojevnom pravcu:



Primjer 1. Oduzimanje napamet

Lukin djed ima 68 godina, a njegova majka ima 37 godina manje. Napamet izračunaj koliko godina ima Lukina majka.

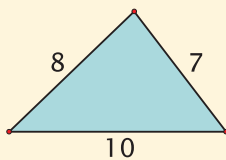
Rješenje:

$$\begin{array}{c} 37 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 30 + 7 \end{array}$$

Brže ćemo računati napamet ako umanjitelj rastavimo na dva dijela. U prvom dijelu oduzimamo $68 - 30 = 38$, a zatim od dobivene razlike oduzmemo preostale jedinice: $38 - 7 = 31$.

Primjer 2.

Duljina stranice a trokuta iznosi 10 cm. Kolike su preostale dvije stranice, ako je stranica b za 2 cm kraća od stranice a , a stranica c za 1 cm kraća od stranice b ?



Rješenje:

Poznato je da je duljina stranice a 10 cm. Stranica b je za 2 cm kraća od a . To znači da je $b = a - 2 = 10 - 2 = 8$ cm. Stranica c je za 1 cm kraća od b , tj. $c = b - 1 = 8 - 1 = 7$ cm.

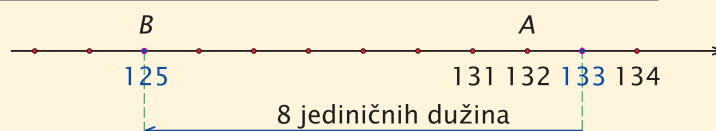
Primjer 3.

Koji je broj za 8 manji od broja 133?

Rješenje:

$$133 - 8 = 125$$

Pogledajmo ovu situaciju na brojevnom pravcu.



Jasno je da se trebamo od točke A pomaknuti za 8 jediničnih dužina ulijevo jer se traži manji broj. Tako dolazimo do točke B, koja je pridružena broju 125. Broj 125 je za 8 manji od broja 133.

Zadaci

1. Napamet izračunaj:
 - a) $55 - 9$, $76 - 19$, $45 - 19$, $23 - 9$;
 - b) $45 - 29$, $33 - 19$, $78 - 59$, $49 - 39$;
 - c) $70 - 29$, $51 - 9$, $73 - 49$, $100 - 9$;
 - d) $100 - 29$, $100 - 39$, $302 - 99$, $123 - 19$;
 - e) $156 - 59$, $145 - 89$, $321 - 59$, $450 - 29$, $228 - 79$, $121 - 99$.
2. Napamet izračunaj:
 - a) $125 - 24$, $234 - 22$, $341 - 12$, $672 - 44$;
 - b) $379 - 37$, $438 - 29$, $202 - 22$, $205 - 64$;
 - c) $132 - 33$, $912 - 31$, $426 - 45$, $815 - 53$.
3. Koji broj je za 1 manji od broja 1000?
4. Koji broj je za 19 manji od broja 56?
5. Koji broj je za 36 manji od broja 47?
6. Lukin tata ima veličinu cipele br. 45, a Luka ima tenisicu 7 brojeva manju.
 - a) Koju veličinu cipele nosi Luka?
 - b) Ana ima tenisicu za 3 broja manju od Luke. Kolika je veličina Anine tenisice?
 - c) Za koliko brojeva je Anina tenisica manja od tatine cipele?
7. Duljina stranice a trokuta iznosi 15 cm. Kolike su preostale dvije stranice, ako je stranica b za 6 cm kraća od stranice a , a stranica c za 4 cm kraća od stranice a ?
8. Duljina stranice a trokuta iznosi 20 cm. Kolike su preostale dvije stranice, ako je stranica b za 3 cm kraća od stranice a , a stranica c za 4 cm dulja od stranice a ?
9. Jednakokraki trokut ima osnovicu dugu 12 cm, a svaki krak je za 3 cm kraći od osnovice. Kolika je duljina svakog kraka?
10. Umanjenik je 450, umanjitelj je 220. Kolika je razlika?
11. Umanjitelj je 23, umanjenik je 25. Kolika je razlika?
12. Sada je 17 h 28 min, a film počinje u 18 h. Koliko je minuta ostalo do početka filma?
13. Sada je 20 h 37 min, a film počinje u 21 h. Koliko je minuta ostalo do početka filma?
14. Napamet izračunaj:
 - a) $23 - 2$, $49 - 6$, $45 - 9$, $55 - 7$,
 - b) $23 - 5$, $62 - 8$, $94 - 8$, $34 - 7$,
 - c) $56 - 6$, $65 - 6$, $74 - 9$, $34 - 8$,
 - d) $23 - 7$, $75 - 7$, $56 - 9$, $67 - 8$,
 - e) $34 - 5$, $76 - 9$, $99 - 3$, $87 - 9$.
15. Napamet izračunaj:
 - a) $70 - 10$, $220 - 110$, $150 - 60$,
 - b) $250 - 240$, $590 - 330$, $230 - 80$,
 - c) $160 - 40$, $2450 - 50$, $640 - 600$,
 - d) $310 - 20$, $630 - 50$, $270 - 90$.
16. a) Koji broj je za 2 manji od broja 30?
 b) Koji broj je za 13 manji od broja 26?
 c) Koji broj je za 130 manji od broja 132?
 d) Koji je broj za 14 manji od broja 97?
17. Đakovačka katedrala visoka je 84 m, a Hvarska je za 47 m niža od đakovačke. Koliko je visoka Zagrebačka katedrala ako je ona za 68 m viša od Hvarske?



Primjer 6. Razlika prirodnih brojeva

Ako oduzimamo dva prirodna broja, hoće li razlika uvijek biti prirodan broj?

**Rješenje:**

Ovdje razlikujemo dva slučaja. U primjeru $10 - 6 = 4$ primjećujemo da je razlika dvaju prirodnih brojeva opet prirodan broj. Ako je umanjenik veći od umanjitelja razlika će biti prirodan broj. Međutim, u slučajevima $10 - 10 = 0$ ili $8 - 10 = ?$ razlika nije prirodan broj. Dakle, ako je umanjenik manji od umanjitelja ili su oni jednaki, razlika nije prirodan broj.

Ako je umanjenik manji od umanjitelja ili su oni jednaki, razlika nije prirodan broj.

Primjer 7. Komutativnost

Vrijedi li svojstvo komutativnosti za oduzimanje prirodnih brojeva?

Rješenje:

Hoće li razlika ostati jednaka ako umanjitelj i umanjenik zamijene mjesta? Pogledajmo pri-

mjer $10 - 8 = 2$, ali ako zamijenimo mjesta razlika $8 - 10$ nije prirodan broj. Stoga zaključujemo da oduzimanje nije komutativno u skupu prirodnih brojeva.

Oduzimanje nije komutativno u skupu prirodnih brojeva.

Primjer 8. Asocijativnost

Vrijedi li svojstvo asocijativnosti za oduzimanje prirodnih brojeva?

Rješenje:

Pokušajmo riješiti ovaj zadatak preko nekog primjera s brojevima. Primjerice, pogledajmo je

li jednako $10 - (7 - 3)$ i $(10 - 7) - 3$.

$$10 - (7 - 3) = 10 - 4 = 6$$

$$(10 - 7) - 3 = 3 - 3 = 0$$

Članove smo združili na različite načine, ali nismo dobili jednak rezultat. Dakle, oduzimanje nije asocijativno u skupu N .

Oduzimanje nije asocijativno u skupu N .

Primjer 9. Nula kao umanjitelj

Koliko je $56 - 0$? Zamisli da umjesto broja 56 staviš bilo koji prirodan broj. Kolika će tada biti razlika?

Rješenje:

Lako je izračunati $56 - 0 = 56$. Možemo reći da za svaki prirodan broj a vrijedi da je $a - 0 = a$.

Nula kao umanjitelj

Ako od prirodnog broja oduzmemo nulu, razlika će biti jednaka tom prirodnom broju.

Napomena: Slučaj $0 - a$ ne možemo promatrati u skupu prirodnih brojeva, jer je svaki prirodni broj veći od nule.

Primjer 10. Oduzimanje jednakih brojeva

Što će se dogoditi ako od prirodnog broja oduzmemo taj isti broj?

Rješenje:

Pogledajmo nekoliko primjera:

$$5 - 5 = 0, \quad 7 - 7 = 0, \quad 246 - 246 = 0.$$

Ako su umanjitelj i umanjenik jednaki, razlika je jednaka nuli.

Kako za oduzimanje ne vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti, ne smijemo mijenjati redoslijed brojeva, niti ih po volji združivati. Pri rješavanju zadataka držimo se pravila redoslijeda:

1. najprije računamo izraze u zagradama;
2. kad u zagradi ostane samo jedan broj, uklonimo je;
3. računamo preostala zbrajanja ili oduzimanja, slijeva nadesno.

Zadaci:

22. Pisanim oduzimanjem izračunaj:

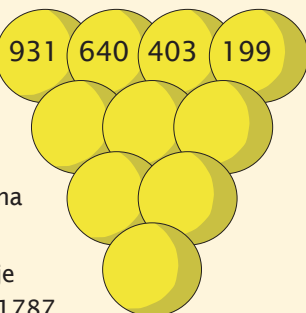
$$\begin{array}{r} 3126 \\ - 278 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 13450 \\ - 654 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 75339 \\ - 1203 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 6549 \\ - 6449 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 74563 \\ - 65570 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2997 \\ - 89 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 45637 \\ - 3507 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 2000 \\ - 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9000 \\ - 4672 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 302010 \\ - 14112 \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{r} 1010 \\ - 778 \\ \hline \end{array}$$

23. Procijeni rezultat zaokruživanjem na najveću mjesnu vrijednost, a zatim pisanim oduzimanjem izračunaj: 4779 - 678, 2330 - 453, 30 002 - 537, 5611 - 7, 34 227 - 7106, 1156 - 229, 56 991 - 43 226, 42 207 - 9610, 562 - 264, 22 301 - 976, 435 798 - 6452, 55 672 134 - 5 346 437, 67 857 - 6578, 23 459 - 23 453.

24. U svako polje grozda dolazi razlika dvaju polja iznad njega. Koji je broj na dnu grozda?



25. Matija je otišao na ljetovanje 30. lipnja, a vratio se 18. kolovoza. Koliko dana je proveo na moru?

26. Ruđer Bošković rođen je 1711. godine, a umro 1787. godine.

- a) Koliko godina je imao kad je umro?
b) Koliko bi godina danas imao?

27. Koliko dana je prošlo od 12. ožujka do 8. travnja?
28. Koliko godina je prošlo od 1734. do 2004. godine?
29. Marijan ima zbirku od 153 CD-a, a Bojan kod kuće ima 230 CD-a. Za koliko je komada Bojanova zbirka veća od Marijanove?

30. U svakom od ovih pisanih oduzimanja potkrala se greška. Pronađi je!

$$\begin{array}{r} 2735 \\ - 1450 \\ \hline 1385 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1400 \\ - 249 \\ \hline 151 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4568 \\ - 344 \\ \hline 3224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 337 \\ - 215 \\ \hline 142 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8865 \\ - 8860 \\ \hline 0005 \end{array} \quad \begin{array}{r} 356 \\ - 250 \\ \hline 196 \end{array}$$

31. U prazna mjesta upiši znamenke tako da razlika bude točna:

$$\begin{array}{r} 236?? \\ - 75?02 \\ \hline ?385 \end{array} \quad \begin{array}{r} 19?? \\ - 764 \\ \hline ?336 \end{array} \quad \begin{array}{r} ?781 \\ - 5??3 \\ \hline 177? \end{array} \quad \begin{array}{r} 587?42 \\ - ?3?6?0 \\ \hline 4?812? \end{array}$$

32. Duljina puta od Zagreba do Crikvenice je 183 km. Automobil se zaustavio nakon 97 km vožnje. Koliki put još treba prijeći?

29. Izračunaj za koliko je kuna snižena pojedina cijena.



33. Ispuni ovu brojčanu križaljku: VODORAVNO →:

- 1) 529 - 402; 5) 73 100 - 2505;
7) 431 - 145; 8) 4126 - 412.

OKOMITO ↓:

- 1) 20 014 - 291; 2) 541 - 281;
3) 9000 - 5944;
4) 5050 - 2066; 6) 706 - 185.

1	2			3
			4	
5		6		
		7		
8				

34. Učenici su dobili pročitati knjigu *Koko u Parizu* za lektiru. Roman počinje na 15. stranici knjige, a završava na 234. stranici. Koliko stranica ima roman?

35. Svakoga dana ujutro u 8 h kreće autobus iz Osijeka prema Milanu i jedan iz Milana prema Osijeku. Udaljenost između ta dva grada je 951 km. Koliko će biti udaljeni u trenutku kad jedan prevali 210 km, a drugi 325 km?

36. Luka je dobio od djeda i bake 150 kuna. Od tih novaca je kupio CD za 43 kune i torbicu za CD-e za 28 kuna. Koliko mu je kuna ostalo? Od ostatka novca bi želio kupiti majicu koja stoji 80 kn. Je li mu ostalo dovoljno novca da kupi tu majicu?

37. Površina Zemlje je 510 083 000 km², a površina svih mora na Zemlji je 361 445 000 km².
a) Procijeni ima li više kopna ili mora na Zemlji;
b) Procijeni kolika je otprilike površina kopna;
c) Izračunaj površinu kopna na Zemlji;
d) Rješenje zadatka c) zapiši slovima.

Zadaci

38. Prekriži zadatke u kojima razlika nije prirodan broj:

- a) $234 - 12$, $12 - 234$, $450 - 439$;
- b) $221 - 122$, $303 - 303$, $103 - 299$;
- c) $492 - 399$, $391 - 700$, $43 - 121$, $212 - 34$;
- d) $540 - 216$, $877 - 876$, $877 - 877$, $877 - 878$.

39. Stavi zagrade na različita mjesta i uvjeri se da ne vrijedi asocijativnost za oduzimanje:

- a) $11 - (8 - 3) = , (11 - 8) - 3 = ;$
- b) $55 - 40 - 1 ;$
- c) $22 - 11 - 3 ;$
- d) $23 - 12 - 11 .$

40. Izračunaj: $9 - 0$,

$$12 - 0, 25 - 0, 0 - 0,$$

$$44 - 0, 1 - 0, 448 - 0.$$

Popuni tablicu

a	5		501235	
b		0		0
$a - b$	0	25	0	1245

41. Prekriži zadatke u kojima razlika nije prirodan broj:

- a) $2 - 0$, $0 - 2$, $3 - 0$, $23 - 0$;
- b) $45 - 0$, $0 - 99$, $4 - 0$, $0 - 56$;
- c) $0 - 0$, $0 - 23$, $11 - 0$, $0 - 11$;
- d) $4 - 0$, $0 - 7$, $14 - 0$, $0 - 2$;
- e) $55 - 0$, $89 - 0$, $0 - 41$, $0 - 27$;
- f) $9 - 0$, $0 - 1$, $0 - 3$, $3 - 0$, $100 - 0$.

42. Izračunaj:

- a) $4 - 4$, $23 - 23$, $12 - 12$, $45 - 45$;
- b) $183 - 183$, $2\,000\,000 - 2\,000\,000$, $0 - 0$, $1 - 1$.

43. Izračunaj:

- a) $5 - 5$, $9 - 0$, $0 - 0$, $1 - 1$;
- b) $1 - 0$, $0 + 1$, $1 + 0$;
- c) $8 - 0$, $0 + 67$, $55 - 55$, $23 - 0$;
- d) $5 + 0$, $6 - 6$, $14 + 0$;
- e) $33 - 0$, $12 + 0$, $4 - 4$;
- f) $4 - 0$, $23 - 0$, $23 + 0$;
- g) $23 - 23$, $11 - 0$, $2 + 0$, $7 - 7$;
- h) $27 - 0$, $11 + 0$, $27 - 27$, $14 + 0$, $3 + 0$, $0 + 3$.

44. Koji broj nedostaje:

$$45 - \square = 29, 23 - \square = 11, \square + 45 = 102,$$

$$\square + 376 = 873, \square - 330 = 218, \square + 218 = 1999,$$

$$430 + \square = 3103, 23 + \square = 4120, 2300 - 134 = \square,$$

$$\square - 302 = 427, \square + 1986 = 3451,$$

$$\square - 321 = 187, 317 - \square = 166, 213 + \square = 456.$$

45. Umanjenik je 399, umanjitelj je 102. Kolika je razlika?

46. Umanjitelj je 405, umanjenik je 504. Kolika je razlika?

47. Umanjitelj je 303, razlika je 44. Koliki je umanjenik?

48. Razlika je 287, umanjenik je 768. Koliki je umanjitelj?

49. Ispuni tablicu:

Umanjenik	398	256		900	300	
Umanjitelj	114		44		129	863
Razlika		11	651	900		689

50. Maja predstavlja svoju školu u atletskoj disciplini skok u dalj. U prvom skakanju preskočila je 126 cm. U drugom skakanju preskočila je 9 cm manje nego u prvom, a u trećem je preskočila 12 cm više nego u drugom skakanju.

a) Koliko je Maja preskočila u drugom i trećem skakanju?

b) U sudačke tablice se upisuje samo najbolji rezultat. Koji rezultat će biti upisan?

51. Duljina puta od Zagreba do Crikvenice je 183 km. Auto je vozio sat vremena i za to vrijeme prošao 97 km. Koliki put još treba prijeći?

1.9. Zbroj i razlika

Na tajnom zadatku



Pročitajte izvještaj privatnog detektiva koji je cijeli dan sakriven motrio restoran. Prije 11 h restoran je bio prazan.

11.00 – ušlo 6 ljudi

12.00 – ušlo još 5 ljudi

13.00 – izašlo 9 ljudi

14.00 – ušla grupa od 8 ljudi

15.00 – izašlo dvoje ljudi

16.00 – ušlo 7 ljudi

17.00 – izašlo 10 ljudi

Koliko je ljudi ostalo u restoranu nakon 17 sati?

izraz bez zagrada

Ako se u zadatku pojavljuju samo operacije zbrajanja i oduzimanja bez zagrada, tada izraz računamo slijeva nadesno, npr.

$$15 + 4 - 10 = 19 - 10 = 9.$$

izraz sa zagradama

Ako se u zadanom izrazu pojavljuju zagrade, npr. $23 - (11 + 6)$, tada prvo računamo izraz u zagradi. Tako je

$$23 - (11 + 6) = 23 - 17 = 6.$$

Primjer 1. Zbrajanje i oduzimanje

Izračunaj: $243 - 111 + 56 - 46$.

Rješenje:

U zadatku ne nailazimo na zagrade, pa se izraz rješava slijeva nadesno.

$$243 - 111 + 56 - 46 = 132 + 56 - 46 = 188 - 46 = 142.$$

Zadaci

1. Izračunaj:

a) $23 + 44 - 15$, $34 + 100 - 33$, $125 - 25 + 22$;

b) $342 - 33 - 29$, $155 + 11 + 8$,
 $278 - 100 - 78$;

c) $345 - 123 - 221$, $60 + 230 - 150$,
 $735 - 206 - 33$.

2. Izračunaj:

a) $45 + 22 - 13 + 67$, $12 + 12 + 12 - 12 - 12$;

b) $34 + 25 - 33 + 120 - 1$, $340 + 1 + 12 - 329$;

c) $64 - 32 - 32 + 0$, $23 - 0 - 0 + 23$,
 $24 + 66 - 13 + 100$;

d) $73 - 13 - 13 - 13 - 13 - 13$,
 $34 + 45 - 22 + 34 - 22$;

e) $11 + 39 - 27 + 23$, $45 - 28 + 24 - 10 + 0$;

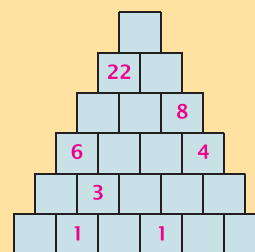
f) $29 + 29 - 58$, $56 + 33 - 12 - 1 + 67$,

$11 + 23 + 6 - 13 + 45 - 6$;

g) $27 - 11 + 45 - 2 - 5 + 1002$,

$29 + 33 + 45 - 55 + 13$.

Ispuni ovu piramidu, u kojoj je svaki broj zbroj dvaju brojeva ispod njega:



3. Izračunaj: $2 + 2 - 2 + 2 - 2 + 2 + 2 - 2 - 2 + 2$.

4. Luka se vozi autobusom iz Zagreba u Crikvenicu.

Na svakoj stanici broji koliko je putnika ušlo u autobus i izašlo iz njega:

	Zagreb	Karlovac	Severin na Kupu	Delnice	Rijeka	Crikvenica
ušlo	47	9	2	16	11	0
izašlo	0	3	4	11	24	
broj putnika u autobusu						0

Izračunaj broj putnika u autobusu nakon svake stanice i upiši podatke u treći redak u tablici. Na

Primjer 2. Jednostruke zagrade

- a) $48 - (25 + 7) - 3 =$
 b) Zbroju brojeva 45 i 77 dodaj razliku brojeva 77 i 70.

Rješenje:

- a) Prvo rješavamo izraz u zagradi, a ostalo prepisujemo:
 $48 - (25 + 7) - 3 = 48 - 32 - 3.$

kojoj stanici se broj putnika najviše promijenio?
 Koliko je putnika izašlo u Crikvenici?

5. Izmisli zadatak i daj ga prijatelju iz klupe da ga riješi:

Vozim se u vlaku i u mom vagonu nas je 35. Na prvoj stanici je izašlo 12 ljudi, a ušlo 5. Na drugoj stanici... (nastavite sami)

Sada ostaje samo izraz sa zbrajanjem i oduzimanjem, pa zadatak dalje rješavamo redosljedom slijeva nadesno:

$$48 - 32 - 3 = 16 - 3 = 13.$$

- b) Trebamo zbrojiti brojeve 45 i 77, a brojeve 77 i 70 treba oduzeti. Zatim treba zbroju $(45 + 77)$ dodati razliku $(77 - 70)$. Zapišimo to kao: $(45 + 77) + (77 - 70) = 122 + 7 = 129.$
 Koristili smo zagrade da odvojimo redosljede izvršavanja računskih operacija.

Zadaci:

6. Izračunaj:
 a) $5 - (4 - 2) + 0, 0 + (0 - 0) + 2, 4 + (0 + 9) + 1;$
 b) $2 + (10 - 2) + 3, 10 - (0 - 0) - 0, (0 + 4) + 1 - 0;$
 c) $0 + 5 - (5 + 0), 3 - (2 - 1) - 0, 3 - (2 + 1) - 0;$
 d) $5 + (3 - 2) - 2, 9 - 8 + (5 - 1) + 2, 6 - (7 - 7) + 3;$
 e) $3 + (2 - 2) - 0, 2 + (2 - 2) - 2, 3 - (4 - 1) - 0, 9 + (2 - 1) - 1.$
 7. Izračunaj:
 a) $123 + 34 + (111 - 25) - 3, 114 + (309 - 102) + 16;$
 b) $45 + (99 - 37) - 12, 189 - (208 - 150) + 302 + 11;$
 c) $(505 + 0 - 13) + 209 - 303, 486 + 486 + (983 - 111) + 305;$
 d) $(309 - 108) + 208 - 33, 22 + (404 + 505 - 12) - 72.$
 8. U autobusu se vozi 13 putnika. Na prvoj stanici izađu 3 osobe, a uđe 7 osoba. Na drugoj stanici ne izađe nitko, a uđu dvije osobe. Na trećoj stanici izađe 19 osoba. Tko je ostao u autobusu?

$\frac{a+b}{\text{ZBROJ}}$ $\frac{a-b}{\text{RAZLIKA}}$

9. Od zbroja brojeva 404 i 23 oduzmi zbroj brojeva 25 i 45.
 10. Od razlike brojeva 987 i 43 oduzmi razliku brojeva 126 i 118.

11. Od zbroja brojeva 444 i 99 oduzmi razliku brojeva 121 i 56.
 12. Od razlike brojeva 691 i 558 oduzmi razliku brojeva 133 i 0.
 13. Između svakog broja umetni znak + ili - tako da rezultat bude točan:
 $5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 9$
 $5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 1$
 $5 \square 4 \square 3 \square 2 \square 1 = 7$
 14. Matija je dobio 56 zadataka za natjecanje i odlučio ih je riješiti u 4 dana. Prvog dana riješio je 13 zadataka, drugog dana 11, a trećeg dana 25 zadataka. Koliko zadataka mu je ostalo za zadnji dan?
 15. Luka i Ana su zajedno od bake dobili 100 kn. Luka je u ponedjeljak potrošio 35 kn, Ana je u utorak potrošila 17 kn, u srijedu je Ana potrošila 5 kn, u četvrtak Luka 18 kn, a u petak je Ana potrošila 7 kn, a Luka 6 kn.
 a) Tko je više potrošio, Luka ili Ana?
 b) Koliko im je novaca ostalo u petak navečer?

16. Matija ima na štednoj knjižici 487 €. Za taj novac bi kupio bicikl, skateboard i role. Pogledao je cijene na Internetu:

bicikl	246 €
skate	149 €
role	98 €

Je li dovoljno uštedio za ove stvari?



Primjer 3.

Okrugle, uglate i vitičaste zagrade

Izračunaj:

- a) $5 + [12 - (14 - 3)]$;
 b) $222 - \{22 - [22 - (22 - 2 - 2) - 2] - 2\} - 2$.

Rješenje:

U složenijim matematičkim problemima naići ćemo i na zagrade unutar zagrada. U tom slučaju izraz rješavamo redoslijedom od unutarnjih zagrada prema vanjskima. Obično se u zadacima zagrade pišu tako da su unutarnje okrugle (), zatim izvan njih slijede uglate [], a zatim vitičaste { } zagrade.



Najprije rješavamo okrugle zagrade ()

Zatim rješavamo uglate zagrade []

Nakon toga rješavamo vitičaste zagrade { }

- a) Prvo rješavamo izraz u okrugloj zagradi jer je unutarnja. Ostalo prepisujemo:
 $5 + [12 - (14 - 3)] = 5 + [12 - 11]$.
 Zatim rješavamo izraz u jedinoj preostaloj

zagradi, a to je uglata:

$$5 + [12 - 11] = 5 + 1 = 6.$$

- b) Također, prvo rješavamo izraz u unutarnjoj zagradi:

$$222 - \{22 - [22 - (22 - 2 - 2) - 2] - 2\} - 2 = \\ = 222 - \{22 - [22 - 18 - 2] - 2\} - 2.$$

Zatim rješavamo izraz u preostaloj unutarnjoj zagradi, a to je uglata zagrada. Ostalo prepisujemo:

$$222 - \{22 - [22 - 18 - 2] - 2\} - 2 = \\ = 222 - \{22 - 2 - 2\} - 2 = 222 - 18 - 2 = 202.$$

No u zadatku sve zagrade mogu biti samo okrugle. I u tom slučaju vrijedi pravilo da zadatak rješavamo od unutarnjih zagrada prema vanjskima.

Ako su zadane samo okrugle zagrade...

$(...((()))...)$

... onda rješavamo zagrade od unutarnjih prema vanjskima!

1. ()
2. ()
3. ()...
4. ()



Zadaci



17. Izračunaj:

- a) $3 + [33 - (3 - 3)] - 3$;
 b) $99 - [99 - (99 - 9)] - 9$;
 c) $[1 + (1 - 1) + 1] - 1$;
 d) $\{4 + [4 + (4 + 4)] + 4\} + 4$;
 e) $2 + (2 + (2 + (2 + 2)))$.

18. Izračunaj:

- a) $22 + [45 - (33 - 6)]$;
 b) $[48 - 5 + 6 - (10 - 3)] + 11$;
 c) $23 + [96 - (100 - 37)] - 41$.

19. Izračunaj:

- a) $56 + [(37 - 23) + 11] - 4 + (34 - 17)$;
 b) $(5 + 76) - [1 + (27 - 3) + 21] - 4 + (38 + 49)$;
 c) $[25 + (307 - 93) + 191] + 4 - (64 - 27)$.

20. Izračunaj:

- a) $43 + \{32 + [21 - (34 - 10 - 10) + 15] - 12\} - 37$;
 b) $(45 - 18) + 39 - \{42 - [32 - (4 - 3 - 1) - 2] + 13\} - (12 - 9)$

1.10. Množenje prirodnih brojeva

Enciklopedije

Želimo komplet enciklopedija staviti na policu za knjige. Širina jedne enciklopedije je 35 mm.

a) Koliko prostora (duljina u mm) će nam zauzeti komplet od 8 enciklopedija? Sve enciklopedije su iste širine.

b) Hoće li polica od 250 mm biti dovoljna da se sve enciklopedije stave u jedan red?



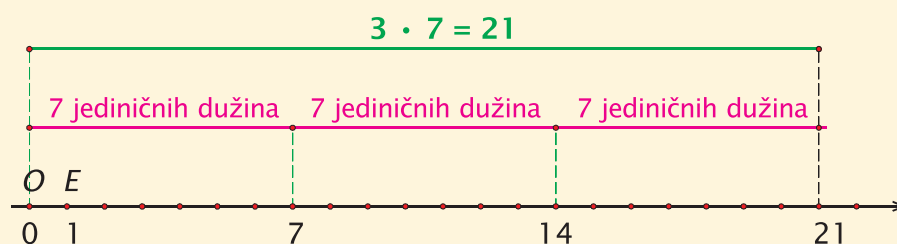
Pogledajmo broj učenika u nekim petim razredima. Ako u 5.a ima 25 učenika, u 5.b 29 učenika te u 5.c 26 učenika, njihov ukupan broj dobit ćemo zbrajanjem $25 + 29 + 26 = 80$. Dakle, u sva tri razreda ima ukupno 80 učenika.

No, ako u 5.a ima 26 učenika, u 5.b 26 učenika i u 5.c također 26 učenika, kako možemo dobiti njihov ukupan broj u sva tri razreda? Možemo zbrojiti $26 + 26 + 26 = 78$. Ovakvo zbrajanje jednakih pribrojnika može se kraće pisati u obliku množenja $3 \cdot 26 = 78$. Brojeve koje množimo nazivamo **faktorima**, a rezultat pri množenju je **umnožak ili produkt**.

$$3 \cdot 26 = 78$$

faktori umnožak ili produkt

Množenje možemo prikazati i na brojevnom pravcu. Primjerice, $3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 = 21$.



Hrvatski	Engleski	Njemački	Talijanski	Francuski
faktor	factor	der Factor	il fattore	le facteur
umnožak	product	das Produkt	il prodotto	le produit



Primjer 1. Tablica množenja do 100

Izračunaj napamet: $7 \cdot 9$, $3 \cdot 7$, $8 \cdot 6$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Rješenje:

Tablicu množenja poznajemo iz nižih razreda osnovne škole. Koristeći to znanje možemo riješiti napamet ove zadatke.

Ako si zaboravio tablicu množenja obavezno je ponovi i nauči.



$$7 \cdot 9 = 63, \quad 3 \cdot 7 = 21, \quad 8 \cdot 6 = 48$$

Pogledajmo pripadajuća zbrajanja:

$$7 \cdot 9 = 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9$$

“sedam puta po 9”

$$8 \cdot 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$$

“osam puta po 6”

$$3 \cdot 7 = 7 + 7 + 7$$

“tri puta po 7”

Primjer 2.

a) Koji je broj **6 puta veći** od broja 10?

b) Koji je broj **za 6 veći** od 10?

Rješenje:

a) Šest puta veći broj dobivamo množenjem sa 6. Dakle, $6 \cdot 10 = 60$. Broj 60 je 6 puta veći od broja 10.

b) Broj za 6 veći od 10 je 16 jer je $10 + 6 = 16$. Broj 16 je za 6 veći od broja 10.

“6 puta veći” – množimo sa 6

“za 6 veći” – pribrajaemo 6



Primjer 3. Množenje s 10, 100, 1000, ...

Izračunaj $4 \cdot 10$, $4 \cdot 100$, $4 \cdot 1000$, $4 \cdot 10000$, $4 \cdot 100000$, $4 \cdot 1000000$.

Rješenje:

Zapišemo li ova množenja u obliku zbrajanja, a zatim izračunamo, dobit ćemo zanimljive rezultate:



Pročitaj naglas:

$$7 \cdot 9 = 63$$

$$7 \cdot 90 = 630$$

$$7 \cdot 900 = 6300$$

$$7 \cdot 9000 = 63000$$

$$7 \cdot 90000 = 630000$$

$$4 \cdot 10 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

$$4 \cdot 100 = 100 + 100 + 100 + 100 = 400$$

$$4 \cdot 1000 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 = 4000$$

$$4 \cdot 10000 = 10000 + 10000 + 10000 + 10000 = 40000$$

$$4 \cdot 100000 = 100000 + 100000 + 100000 + 100000 = 400000$$

$$4 \cdot 1000000 = 1000000 + 1000000 + 1000000 + 1000000 = 4000000$$

Primjer 4.

$7 \cdot 9 =$

$7 \cdot 90 =$

$7 \cdot 900 =$

Rješenje:

Znamo da je $7 \cdot 9 = 63$. Zapišemo li množenje

$7 \cdot 90$ i $7 \cdot 900$ u obliku zbrajanja dobit ćemo

$$7 \cdot 90 = 90 + 90 + 90 + 90 + 90 + 90 + 90 = 630,$$

$$7 \cdot 900 = 900 + 900 + 900 + 900 + 900 + 900 + 900 + 900 = 6300,$$

pa pišemo kraće da je $7 \cdot 90 = 630$ i $7 \cdot 900 = 6300$.

Usporedimo množenja:

$7 \cdot 9 = 63$

$7 \cdot 90 = 630$

$7 \cdot 900 = 6300$

Na isti način bismo napamet računali

$$7 \cdot 9000 = 63\,000, 7 \cdot 90\,000 = 630\,000 \text{ itd.}$$

Pomnožimo brojeve 7 i 9 te umnošku

dopišemo onoliko nula koliko ih se pojavljuje na kraju faktora.

Primjer 5.

Izračunaj napamet:

$4 \cdot 5 =$

$40 \cdot 50 =$

$40 \cdot 500 =$

$4000 \cdot 50\,000 =$

Rješenje:

Na isti način kao i u prethodnim primjerima možemo izračunati i ovaj zadatak.

$4 \cdot 5 = 20$

$40 \cdot 50 = 2000$

$40 \cdot 500 = 20\,000$

$4000 \cdot 50\,000 = 200\,000\,000$

Množenje s 10 → dopišemo jednu nulu zdesna, $25 \cdot 10 = 250$

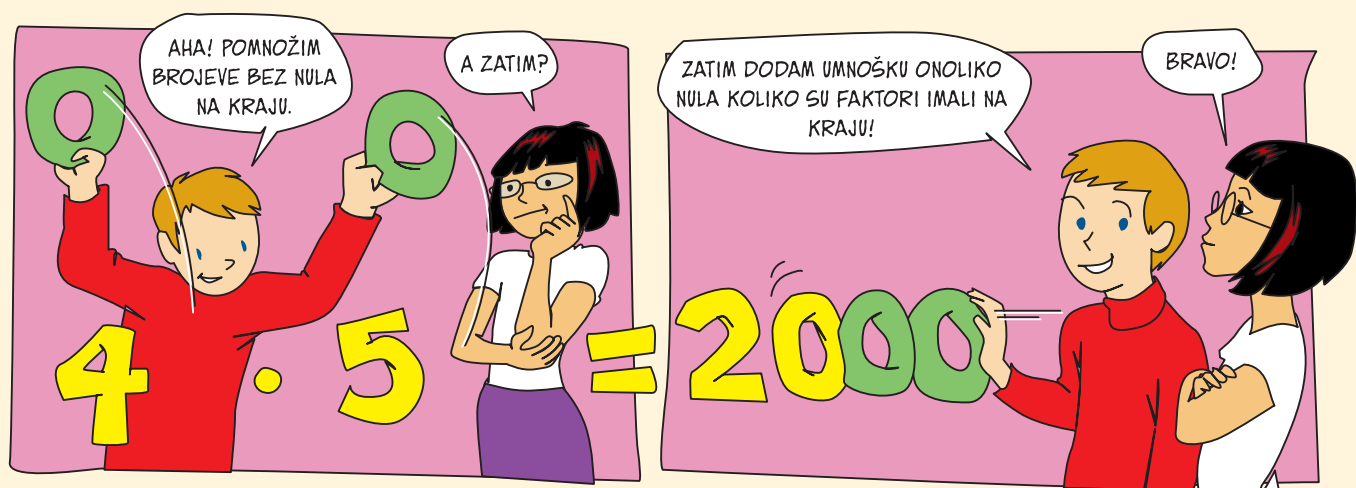
Množenje sa 100 → dopišemo dvije nule zdesna, $25 \cdot 100 = 2500$

Množenje s 1000 → dopišemo tri nule zdesna, $25 \cdot 1000 = 25\,000$

Množenje s 10 000 → dopišemo četiri nule zdesna

$25 \cdot 10\,000 = 250\,000$

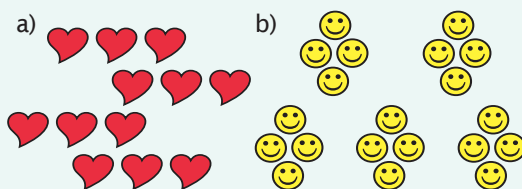
itd...



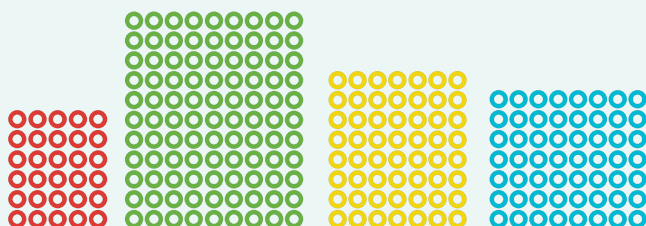
Zadaci

- Zapiši u obliku umnoška pa izračunaj:
 - $10 + 10 + 10 + 10$, $2 + 2 + 2 + 2 + 2$,
 $1 + 1 + 1 + 1 + 1$;
 - $15 + 15 + 15$, $9 + 9$,
 $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$;
 - $4 + 4 + 4 + 4 + 4$, $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6$,
 $3 + 3 + 3 + 3 + 3$;
 - $7 + 7 + 7 + 7$, $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4$.
- Koje zbrajanje se krije iz zapisa u obliku množenja:
 $4 \cdot 5$, $5 \cdot 4$, $7 \cdot 7$, $3 \cdot 6$, $6 \cdot 3$, $2 \cdot 10$,
 $10 \cdot 2$, $4 \cdot 8$, $8 \cdot 4$, $1 \cdot 6$, $6 \cdot 1$,
 $0 \cdot 2$, $2 \cdot 0$.

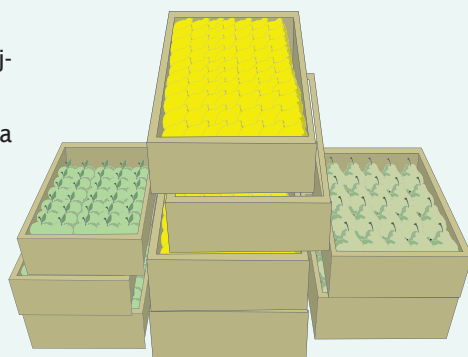
- Kako ćeš najbrže izračunati koliko je srca/smješkaća na slikama?



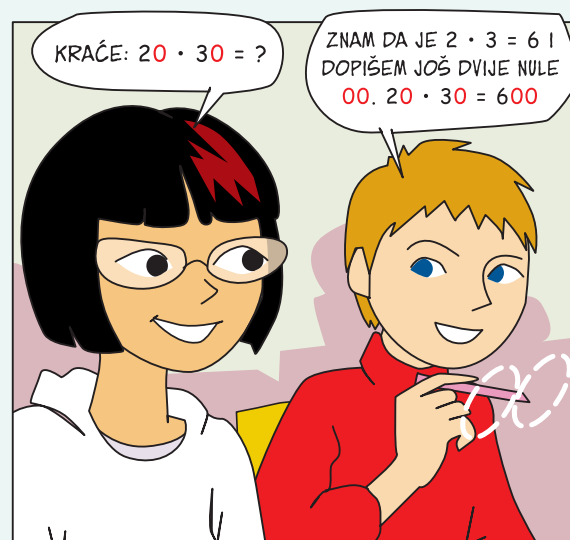
- Koliko je kružića na slici?



- Koliko je voća u najgornjim sanducima sa slike?



- Izračunaj napamet:
 - $5 \cdot 7$, $9 \cdot 6$, $3 \cdot 8$, $5 \cdot 5$, $4 \cdot 9$, $5 \cdot 7$, $10 \cdot 5$;
 - $5 \cdot 10$, $2 \cdot 9$, $5 \cdot 6$, $7 \cdot 6$, $8 \cdot 2$, $3 \cdot 3$, $7 \cdot 8$;
 - $8 \cdot 7$, $2 \cdot 10$, $3 \cdot 9$, $9 \cdot 3$, $9 \cdot 7$, $6 \cdot 4$, $5 \cdot 8$;
 - $7 \cdot 4$, $6 \cdot 6$, $10 \cdot 10$, $9 \cdot 4$, $1 \cdot 7$, $6 \cdot 8$, $4 \cdot 3$;
 - $2 \cdot 5$, $5 \cdot 2$, $9 \cdot 9$, $6 \cdot 9$, $10 \cdot 3$, $3 \cdot 8$, $7 \cdot 6$,
 $1 \cdot 1$, $4 \cdot 8$, $9 \cdot 4$, $6 \cdot 8$.



- Koji je broj duplo veći od 9?
- Koji je broj 2 puta veći od broja 11?
- Maja: Mama, koliko ti imaš godina?
Mama: To je nepristojno pitanje.
Maja: Zašto? Ja se uopće ne sramim reći da imam 11 godina.
Mama: A ja ću ti samo reći da ja imam 4 puta više.
Koliko Majina mama ima godina?
- Zapiši kao umnožak dvaju faktora: 20, 32, 16, 81, 25, 28, 64, 35, 72, 63, 15, 90, 12.
Primjer: $20 = 2 \cdot 10$ ili $20 = 4 \cdot 5$.
- Koji broj je 5 puta veći od broja 8?
- Koji broj je 8 puta veći od broja 5?
- a) Koji broj je trostruko veći od 4?
b) Koji broj je za 3 veći od 4?
- Izračunaj napamet, a zatim naglas pročitaj umnoške:
 - $49 \cdot 100$, $23 \cdot 10$, $244 \cdot 1000$, $3 \cdot 1\,000\,000$;
 - $48 \cdot 1000$, $56 \cdot 100$, $34 \cdot 10\,000$,
 $4050 \cdot 100\,000$;
 - $300 \cdot 100$, $2050 \cdot 1000$, $321 \cdot 10$,
 $23\,456\,999 \cdot 10$.
- Kako glasi pravilo množenja nekog prirodnog broja brojem 10, 100, 1000 itd.?

duplo, dvostruko,
dva puta

16. Izračunaj napamet:

- a) $4 \cdot 300, 200 \cdot 5, 2 \cdot 8000, 70 \cdot 7, 30 \cdot 6$;
- b) $500 \cdot 8, 60 \cdot 9, 8000 \cdot 7, 600 \cdot 4, 20 \cdot 7$;
- c) $60 \cdot 8, 7000 \cdot 4, 200\,000 \cdot 5, 300 \cdot 3, 6 \cdot 8000, 900 \cdot 9$.

17. Izračunaj napamet:

- a) $20 \cdot 500, 300 \cdot 80, 900 \cdot 90, 5000 \cdot 60$;
- b) $200 \cdot 400, 1000 \cdot 600, 500 \cdot 50, 400 \cdot 800$;
- c) $2000 \cdot 90, 4000 \cdot 500\,000, 60 \cdot 700, 200 \cdot 200$.

18. Anina mama ispekla je palačinke za Anu, Luku i Petra. Ana je pojela dvije palačinke. Petar je pojeo četiri palačinke više od Ane, a Luka je pojeo tri

puta više palačinki nego Ana. Koliko palačinki je pojela Ana, koliko Luka, a koliko Petar? Ako je mama ispekla 20 palačinki, koliko ih je ostalo?

19. Majina mama radi bukete cvijeća. U svakom je 5 ruža. Koliko joj ruža treba ako želi napraviti 11 buketa?

20. Stranica a pravokutnika iznosi 5 cm, a stranica b je dvostruko dulja. Kolika je njena duljina?

21. Duljina stranice a trokuta iznosi 8 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 4 cm dulja od stranice a , a stranica c dva puta dulja od stranice a ?

Primjer 6. Procjena

Matija: Mama, sutra mi je rođendan i želio bih počastiti razred. Svakom bih kupio jednu čokoladnu bananicu.

Mama: Može. Koliko vas je u razredu?

Matija: Ima nas 23. A jedna bananica stoji 2 kn.

Mama: U redu. Evo ti 50 kn, to će biti dosta.

Matija: Hm, jesi li sigurna da je to dosta?

Je li mama dobro procijenila?

Rješenje:

Jedna bananica stoji 2 kn, a potrebno je kupiti 23 bananice. Znamo da je $20 \cdot 2 = 40$, a mi ne množimo 20, već 23 pa zaključujemo da je umnožak nešto veći od 40. S druge strane, znamo da je $25 \cdot 2 = 50$, a mi ne množimo 25, već 23 pa zaključujemo da je umnožak nešto manji od 50.

Točno, $23 \cdot 2 = 46$, što znači da je Matijina majka dobro procijenila rezultat.

$$23 \cdot 2 \approx 20 \cdot 2 = 40$$

Zadaci

22. Procijeni umnožak tako da najprije veći faktor zaokružiš na desetice:

- a) $63 \cdot 9, 42 \cdot 8, 39 \cdot 6, 77 \cdot 7, 42 \cdot 2, 78 \cdot 8$;
- b) $99 \cdot 2, 35 \cdot 5, 76 \cdot 4, 59 \cdot 5, 66 \cdot 4, 92 \cdot 6$;
- c) $91 \cdot 9, 32 \cdot 6, 44 \cdot 8, 25 \cdot 6, 14 \cdot 9, 62 \cdot 4$;
- d) $38 \cdot 3, 81 \cdot 6, 72 \cdot 9, 21 \cdot 3, 17 \cdot 6, 45 \cdot 3$;
- e) $5 \cdot 83, 7 \cdot 49, 25 \cdot 7, 16 \cdot 4, 12 \cdot 9, 5 \cdot 88$.

Rješenje:

Treba izračunati $63 \cdot 9$. Zaokružimo na desetice

$63 \approx 60$ i napamet izračunamo

$$63 \cdot 9 \approx 540 \text{ jer je } 60 \cdot 9 = 540.$$

23. Koje procjene su točne? Zaokruži ih!

$$32 \cdot 3 \approx 90, 2 \cdot 52 \approx 200, 36 \cdot 6 \approx 100,$$

$$51 \cdot 7 \approx 350, 12 \cdot 6 \approx 70, 42 \cdot 4 \approx 16\,000, \\ 5 \cdot 92 \approx 451, 76 \cdot 4 \approx 280, 76 \cdot 4 \approx 300, \\ 76 \cdot 4 \approx 400, 49 \cdot 5 \approx 20, 13 \cdot 3 \approx 40, \\ 81 \cdot 8 \approx 72, 62 \cdot 8 \approx 480, \\ 21 \cdot 7 \approx 280, 24 \cdot 7 \approx 14\,000, \\ 5 \cdot 88 \approx 4500, 19 \cdot 9 \approx 180.$$

24. Jedan dan se sastoji od 24 sata.

- a) Procijeni koliko sati ima u jednom tjednu.
- b) Koliko sati ima u radnom tjednu?



25. Procijeni:

- $32 \cdot 50, 43 \cdot 40, 29 \cdot 30, 33 \cdot 90, 20 \cdot 49;$
- $40 \cdot 41, 25 \cdot 30, 66 \cdot 70, 50 \cdot 55, 45 \cdot 20;$
- $30 \cdot 71, 28 \cdot 30, 43 \cdot 80, 91 \cdot 30, 43 \cdot 70;$
- $60 \cdot 59, 21 \cdot 80, 27 \cdot 50, 75 \cdot 70, 46 \cdot 60;$
- $30 \cdot 27, 40 \cdot 32, 48 \cdot 80, 88 \cdot 80, 19 \cdot 30, 20 \cdot 12, 25 \cdot 60.$

26. Procijeni:

- $32 \cdot 10, 32 \cdot 100, 32 \cdot 20, 32 \cdot 200, 45 \cdot 800, 35 \cdot 90;$
- $21 \cdot 600, 42 \cdot 3000, 13 \cdot 40, 39 \cdot 300, 24 \cdot 500, 12 \cdot 6000;$
- $79 \cdot 400, 80 \cdot 64, 32 \cdot 500.$

27. Procijeni umnožak tako da najprije faktore zaokružiš na desetice:

- $42 \cdot 27, 61 \cdot 69, 28 \cdot 80, 36 \cdot 36;$
- $25 \cdot 54, 71 \cdot 78, 83 \cdot 31, 32 \cdot 32.$

Množenje na džepnom računalu

Da biste izračunali koliko je $23 \cdot 8$ pritisnite:

- Tipke sa brojevima **2** **3**
- Tipku za množenje **×**
- Tipku s brojem **8**
- Za prikaz rezultata pritisnite tipku **=**
- Na zaslonu će se prikazati rezultat 184.



×
množenje

Primjer 7. Pisano množenje

Nogometni klub je za svoje igrače i pomoćno osoblje naručio nove trenirke. Koliko će novca morati izdvojiti iz blagajne za kupnju trenirki, ako jedna trenirka stoji 435 kn, a naručene su 23 trenirke?

Rješenje:

Pokušajmo prvo napraviti dobru procjenu. Množimo 435 s 23, dakle broj veći od 400 s brojem nešto manjim od 25.

Kako je $400 \cdot 25 = 10\,000$, procijenit ćemo da će klub potrošiti oko 10 000 kn za nove trenirke. Prisjetimo se i pisanog množenja jer umnožak višeznamenastih brojeva teško možemo izra-

čunati napamet. Ako jedna trenirka stoji 435 kn, tražimo koliko stoje 23 trenirke. Treba pomnožiti $23 \cdot 435$. Pogledajmo kako:

$$\begin{array}{r} 23 \cdot 435 \\ 92 \\ 69 \\ +115 \\ \hline 10005 \end{array}$$

Kod pisanog množenja prvi faktor množimo sa svakom znamenkom drugog faktora (u smjeru nadesno) i zapisujemo **međurezultate** pomičući se udesno, kao što je to prikazano na slici. Međurezultate na kraju zbrojimo i dobivamo rješenje zadatka. Klub za kupnju novih trenirki treba izdvojiti 10 005 kn.

Zadaci

28. Procijeni umnožak tako da najprije faktore zaokružiš na najveću mjesnu vrijednost, a zatim izračunaj točan umnožak:

- $56 \cdot 678, 497 \cdot 453, 43 \cdot 121, 325 \cdot 39;$
- $899 \cdot 99, 231 \cdot 434, 203 \cdot 57, 378 \cdot 54;$
- $5009 \cdot 35, 388 \cdot 8, 641 \cdot 23, 632 \cdot 13;$
- $555 \cdot 33, 412 \cdot 49, 316 \cdot 36, 111 \cdot 11;$
- $808 \cdot 26, 712 \cdot 81, 309 \cdot 7.$

Kad drugi faktor počinje jedinicom...

$$\begin{array}{r} 643 \cdot 12 \\ +1286 \\ \hline 7716 \end{array}$$

... onda ne trebamo potpisivati crtu, već se prvim faktorom služimo kao međurezultatom.



29. Procijeni rezultat pa izračunaj: $145 \cdot 12$,
 $214 \cdot 19$, $45 \cdot 111$, $290 \cdot 132$, $287 \cdot 1890$,
 $1973 \cdot 1973$.
30. Majina mama želi prestati pušiti. Ona svakog dana za kutiju cigareta potroši 14 kuna. Izračunaj koliko bi kuna prestankom pušenja uštedjela Majina mama:
- za tjedan dana;
 - za mjesec dana;
 - za godinu dana.
31. U jednom satu prođe 60 minuta. Koliko minuta prođe za:
- jedan dan;
 - jedan tjedan;
 - jedan mjesec (30 dana);
 - jednu godinu?



32. Ulaznica za bazen stoji 15 kn. Mjesečna ulaznica za bazen stoji 400 kn.
- Koliko se novca može uštedjeti mjesečnom ulaznicom za osobu koja će svaki dan ići na kupanje?
 - Za koliko ulazaka se isplati uzeti mjesečnu ulaznicu?



33. Godišnja pretplata za informatički časopis stoji 216 kn. Časopis izlazi 10 puta godišnje, a jedan primjerak časopisa stoji 24 kn.
- Koliko se novca može uštedjeti pretplatom?
 - Za koliko brojeva se isplati uzeti pretplatu?

34. Koji je broj 12 puta veći od broja 11?
35. Koji je broj duplo veći od 459?
36. Koji broj je peterostruko veći od broja 812?
37. a) Koji broj je trostruko veći od 144?
 b) Koji broj je za 3 veći od 144?
38. a) Koji je broj za 453 veći od 191?
 b) Koji je broj 453 puta veći od 191?
39. a) Koji je broj 48 puta veći od 603?
 b) Koji je broj za 48 veći od 603?
 c) Koji je broj za 48 manji od 603?
 d) Koji je broj 603 puta veći od 48?



MNOŽENJE U JEDNOM RETKU



Kada neki broj množimo jednoznamenkastim brojem, umnožak možemo izračunati bez potpisivanja:

$$562 \cdot 7 =$$

$$562 \cdot 7 = \quad 4 \quad (2 \cdot 7 = 14, \text{ "4 pišem, 1 pamtim"})$$

$$562 \cdot 7 = \quad 34 \quad (6 \cdot 7 = 42, \text{ "42 + 1 = 43, 3 pišem, 4 pamtim"})$$

$$562 \cdot 7 = \quad 3934 \quad (5 \cdot 7 = 35, \text{ "35 + 4 = 39, pišem 39"})$$

40. Ispuni ovu brojčanu križaljku:

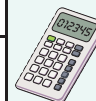
VODORAVNO →:

- $56 \cdot 13$;
- $16 \cdot 4759$;
- $21 \cdot 45$;
- $883 \cdot 8$.

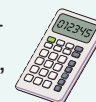
OKOMITO ↓:

- $1427 \cdot 51$;
- $143 \cdot 2$;
- $81 \cdot 45$;
- $101 \cdot 44$;
- $14 \cdot 14$.

1	2			3
			4	
5		6		
		7		
8				



41. Svjetlost putuje brzinom od 300 000 km u sekundi. Kolika je približno udaljenost Sunca od Zemlje, ako svjetlosti treba 8 minuta i 20 sekundi da od Sunca dođe do Zemlje?



Posloži znamenke



5, 6, 7, 8 i 9 na crtice tako da umnožak bude najveći mogući: _____ · _____

42. Ana želi raditi nakit od ukrasnih perlica i fimo mase. Za to joj je potreban sljedeći materija: fimo masa, perlice, žica i kopčice. U trgovini je vidjela da je cijena jednog paketića fimo mase 13 kn, perlica 18 kn, žica se prodaje po 21 kn, a kopčice po 2 kn. Ana želi kupiti tri boje fimo mase i pet vrsta perlica. Za izradu ogrlica, narukvica i naušnica potrebna su joj dva paketa žice i četiri paketa kopčica. Je li Ani dovoljno 100 kuna da kupi sve što joj je potrebno?

1.11. Svojstva množenja prirodnih brojeva



Tko će prije?

Uzmi štopericu ili stavi pred sebe ručni sat. Pokušaj u što kraćem vremenu riješiti ovaj zadatak. Vrijeme sad!

$$25 \cdot 47 \cdot 4 \cdot 1 =$$

Ovaj zadatak se može riješiti za vrlo kratko vrijeme, ako dobro poznajemo **svojstva množenja** prirodnih brojeva. Svojstva nam pomažu brže i uspješnije rješavati matematičke zadatke, a iz primjera ćemo zaključiti da ih svakodnevno koristimo.

Primjer 1. Umnožak prirodnih brojeva

Pomnoži neka dva prirodna broja. Je li njihov umnožak prirodan broj?

Rješenje:

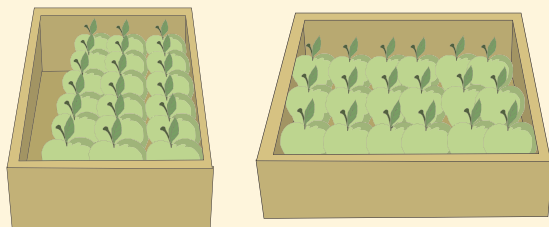
Koja god dva prirodna broja pomnožili, njihov umnožak će opet biti prirodan broj.

Umnožak dvaju prirodnih brojeva je uvijek prirodan broj.

Primjer 2. Komutativnost

Pogledaj ove slike:

a)



b)



Što zaključuješ?

Rješenje:

a) Na slici je sanduk sa 6 redaka i u svakom po 3 jabuke, pa je u sanduku ukupno 18 jabuka. U drugom su sanduku 3 retka sa po 6 jabuka, pa je u sanduku ukupno također 18 jabuka. Pišemo: $6 \cdot 3 = 3 \cdot 6$

b) Imamo li 5 kovanica od 2 kn, to je 10 kn. Imamo li 2 kovanice od po 5 kn, to je opet 10 kn. Pišemo: $5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$

U oba slučaja zamijenili smo mjesta faktorima i umnožak je ostao isti. Ovo svojstvo množenja prirodnih brojeva naziva se **komutativnost**.

Komutativnost vrijedi za množenje bilo koja dva prirodna broja, a kako prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, to ćemo pravilo zapisati simbolima $a \cdot b = b \cdot a$ pri čemu a i b mogu biti bilo koji prirodni brojevi.

komutativnost
komutirati = zamijeniti

Svojstvo komutativnosti

Ako faktori zamijene mjesta, umnožak će ostati isti.

Primjer 3. Asocijativnost

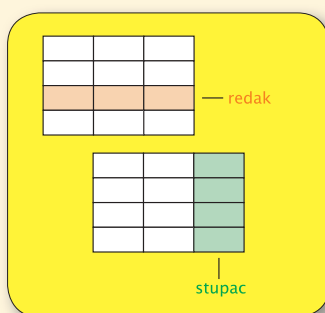
Koliko je rajčica na slici?



Tko je u pravu?

Rješenje:

U jednom sanduku je 10 redaka, a u svakom retku po 6 rajčica. Na slici su tri takva sanduka.



Gospođa je prvo izračunala rajčice iz prvog stupca, a kako takvih redaka ima 6, pomnožila je rezultat sa 6. Ako u zagrada stavimo

umnožak koji se prvo računa, to možemo zapisati ovako:

$$6 \cdot (10 \cdot 3) = 6 \cdot 30 = 180.$$

Gospodin je išao drugim redoslijedom, on je prvo izračunao broj rajčica u jednom sanduku, a zatim ga množio s 3 jer su tri takva sanduka:

$$(6 \cdot 10) \cdot 3 = 60 \cdot 3 = 180.$$

Bez obzira na to kako smo udružili faktore, umnožak je bio jednak u oba slučaja. To se svojstvo množenja naziva **asocijativnost**. Ako iste faktore združimo na različite načine, umnožak će uvijek biti jednak.

asocijativnost
asocijacija = udruživanje

Asocijativnost vrijedi za množenje bilo koja tri prirodna broja, a kako prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo, to ćemo pravilo zapisati simbolima

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

pri čemu a , b i c mogu biti bilo koji prirodni brojevi.

Zato izraz $6 \cdot 10 \cdot 3$ možemo rješavati redoslijedom kojim želimo.

Svojstvo asocijativnosti

Ako faktore združimo na različite načine, umnožak će ostati isti.

Primjer 4. Broj 1 kao faktor

U kvadratić upiši broj tako da jednakost bude točna:

$$45 \cdot \square = 45.$$

Rješenje:

Broj 45 treba pomnožiti s nepoznatim brojem da umnožak opet bude 45. Jedini broj koji zadovoljava ovaj uvjet je broj 1, pa ga zapišimo u kvadratić. Broj 1 ima svojstvo da ako ga pomno-

žimo s bilo kojim prirodnim brojem a , umnožak će biti a . To zapisujemo u obliku $a \cdot 1 = a$, pri čemu a može biti bilo koji prirodan broj.

Broj 1 kao faktor

Ako prirodni broj pomnožimo s 1, umnožak će biti jednak tom prirodnom broju.

Zbog komutativnosti vrijedi da je

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

Primjer 5. Množenje s nulom

Zapiši u obliku zbrajanja umnoške:

$$5 \cdot 1 =$$

$$5 \cdot 0 =$$

Rješenje:

Zapišimo zadane umnoške u obliku zbroja:

$$5 \cdot 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$5 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Znamo da će za svaki prirodni broj a vrijediti da

je $a \cdot 1 = a$. Zamislimo neki prirodni broj n i pokušajmo odgovoriti koliko je $n \cdot 0$. To znači da zbrajamo n puta pribrojnik nula:

$$n \cdot 0 = \underbrace{0 + 0 + 0 + \dots + 0}_{n \text{ puta}} = 0$$

Množenje s nulom

Množimo li bilo koji prirodni broj s nulom, umnožak će biti 0.

Zadaci

1. Izračunaj:

a) $3 \cdot 0, 0 \cdot 2, 4 \cdot 0, 23 \cdot 0, 390 \cdot 0,$
 $0 \cdot 0, 25 \cdot 0, 0 \cdot 1, 0 \cdot 3000,$
 $1000 \cdot 0, (234 \cdot 133) \cdot 0,$
 $359 \cdot (335 \cdot 0), 2\,000\,000 \cdot 0;$

b) $1 \cdot 5, 35 \cdot 1, 46 \cdot 1, 1 \cdot 1, 1 \cdot 2,$
 $2399 \cdot 1, 1 \cdot 254, 2009 \cdot 1,$
 $50\,991 \cdot 1, 1 \cdot 19.$

2. Izračunaj:

a) $6 + 0, 6 \cdot 1, 3 \cdot 0, 0 \cdot 6, 0 \cdot 0, 45 \cdot 0, 8 - 0;$
 b) $0 + 8, 0 \cdot 2, 6 - 6, 4 \cdot 0, 0 \cdot 4, 0 - 0, 2 - 2;$
 c) $32 \cdot 0, 7 - 0, 0 + 12, 0 - 7, 5 \cdot 1, 41 \cdot 0, 13 - 0.$

3. Ispuni ovu tablicu množenja. Gdje primjećuješ komutativnost?

·	7	8	9	11	12	17
7						
8						
9						
11						
12						
13						

4. Množimo li pismeno $8 \cdot 3287$, brže ćemo doći do rezultata zamijenimo li mjesta faktorima i pomnožimo $3287 \cdot 8$. Pomnoži na oba načina. Zašto je drugi slučaj lakši? Koje svojstvo množenja pritom koristimo?

Umjesto množenja

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 3287 \\ 24 \\ 16 \\ 64 \\ + 56 \\ \hline 26296 \end{array}$$

koristimo komutativnost i zamijenimo mjesta faktorima!

$$\begin{array}{r} 3287 \cdot 8 \\ \hline 26296 \end{array}$$

Brže ćeš računati ako ti je drugi faktor manji broj! (a možeš ti i na dulji način ako ti se da...)



5. Pomnoži:

a) $345 \cdot 9, 246 \cdot 3, 4 \cdot 679, 2 \cdot 144;$
 b) $56 \cdot 345, 3405 \cdot 56, 7004 \cdot 312;$
 c) $67 \cdot 24\,778, 76\,521 \cdot 333, 4087 \cdot 23\,444,$
 $1010 \cdot 287\,705.$



6. Izračunaj $40 \cdot 600$!

Ovakve smo zadatke već radili u prethodnom poglavlju, ali tek sada vidimo da je to upotreba asocijativnosti.

Zapišimo 40 i 600 zgodno u obliku umnoška i udružimo neke faktore:
 $40 \cdot 600 = 4 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 100 = 24 \cdot 1000 = 24\,000$

Naravno, od tebe se oćekuje da odmah napišeš rezultat.

Izraćunaj napamet:

- $15 \cdot 200, 23 \cdot 2000, 5 \cdot 5000, 9 \cdot 8000,$
 $2000 \cdot 18, 4000 \cdot 7, 54 \cdot 20, 7000 \cdot 8,$
 $5 \cdot 500, 3 \cdot 6\,000\,000, 14 \cdot 2\,000\,000, 40\,000 \cdot 7;$
- $300 \cdot 30, 250 \cdot 200, 40 \cdot 50, 10 \cdot 600 \cdot 6000,$
 $50 \cdot 60 \cdot 70, 20 \cdot 7 \cdot 100, 5 \cdot 80 \cdot 900,$
 $60\,000 \cdot 9\,000\,000, 500 \cdot 800 \cdot 20,$
 $200 \cdot 2000 \cdot 20\,000;$
- $60 \cdot 20 \cdot 100, 40 \cdot 20 \cdot 300, 50 \cdot 50 \cdot 50,$
 $100 \cdot 30 \cdot 2000, 20 \cdot 200 \cdot 2000,$
 $4 \cdot 80 \cdot 300, 100 \cdot 1000 \cdot 100\,000,$
 $70 \cdot 7 \cdot 500, 80 \cdot 6 \cdot 2000, 400 \cdot 7 \cdot 100.$

7. Izraćunaj: $4 \cdot 25, 20 \cdot 5, 8 \cdot 125.$



ZAPAMTI!

$$5 \cdot 20 = 100$$

$$4 \cdot 25 = 100$$

$$8 \cdot 125 = 1000$$

8. U zadacima s tri faktora brže ćemo doći do rezultata ako koristimo svojstva komutativnosti i asocijativnosti:

$$5 \cdot 13 \cdot 2 =$$

$$10 \cdot 13 = 130$$



Združi faktore čiji umnožak ima na kraju nule.

Napamet riješi:

a) $66 \cdot 5 \cdot 20, 50 \cdot 45 \cdot 2, 458 \cdot 20 \cdot 5;$

b) $23 \cdot 25 \cdot 4, 246 \cdot 987 \cdot 0, 457 \cdot 8 \cdot 125;$

c) $25 \cdot 2907 \cdot 4, 8 \cdot 888 \cdot 125, 37 \cdot 2 \cdot 5,$
 $50 \cdot 682 \cdot 2, 4 \cdot 303 \cdot 25.$

9. Zbog asocijativnosti i komutativnosti na pogodne načine možemo udruživati i više od 3 faktora:

$$15 \cdot 25 \cdot 3 \cdot 4 = 45 \cdot 100 = 4500$$

Izraćunaj napamet: $50 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 6,$

$$245 \cdot 125 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 8, 87 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 25,$$

$$134 \cdot 50 \cdot 1 \cdot 2, 8 \cdot 25 \cdot 40 \cdot 7,$$

$$100 \cdot 20 \cdot 467 \cdot 5, 782 \cdot 125 \cdot 2 \cdot 4,$$

$$909 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 5, 413 \cdot 25 \cdot 100 \cdot 4,$$

$$763 \cdot 5 \cdot 1000 \cdot 2, 4098 \cdot 125 \cdot 8 \cdot 10,$$

$$25 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 10.$$

10. Luka svakoga dana od kuće do škole prijeđe 4 km i isto toliko u povratku kući. Koliko km Luka prijeđe:

a) u jednom danu;

b) u jednom radnom tjednu?

11. Lukina obitelj svakog dana troši 2 kruha. Cijena jednog kruha je 4 kn. Koliko novaca Lukina obitelj troši na kruh:

a) tjedno;

b) godišnje?

12. Trgovac u voćarni narućio je svježje jabuke.

Jabuke su došle u dvjema velićinama sanduka: 6 velikih sanduka i 17 malih. U velikom sanduku jabuke su naslagane u 13 redaka, a u malom u 8. Jedan redak sadrži 48 jabuka.

Izraćunaj koliko je ukupno komada jabuka narućio trgovac.



13. Baka ima devetero djece, a svako njeno dijete ima po troje djece.

a) Koliko unuka ima baka?

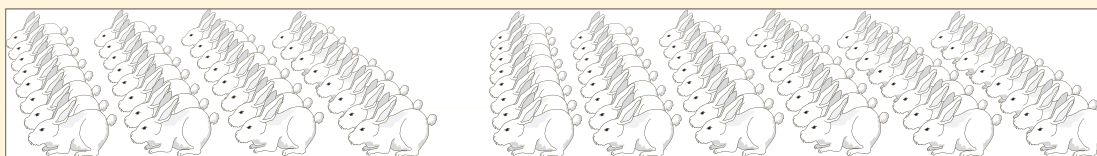
b) Za bakin 81. rođendan okupila su se sva djeca i unuci. Koliko je bilo ljudi na proslavi?

c) Svaki unuk joj je donio po 3 ruže. Je li bilo više ruža ili svjećica na rođendanskoj torti?

1.12. Distributivnost

Tko će prije?

Na slici su dvije skupine zećeva. Koliko je ukupno zećeva na slici?



Naućili smo osnovna svojstva množenja i zbrajanja prirodnih brojeva. Upoznajmo **svojstvo distributivnosti**, u kojem se povezuju zbrajanje i množenje. Iz uvodnog zadatka naslućujemo da će nam distributivnost, primjerice, pomoći u množenju napamet.



Primjer 1. Distributivnost

Ispuni tablicu:

$3 \cdot (4 + 5) =$	$3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 =$
$9 \cdot (15 - 5) =$	$9 \cdot 15 - 9 \cdot 5 =$
$(10 + 6) \cdot 2 =$	$10 \cdot 2 + 6 \cdot 2 =$
$(14 - 10) \cdot 6 =$	$14 \cdot 6 - 10 \cdot 6 =$

Što primjećuješ?

Rješenje:

Riješimo tablicu:

$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 9 = 27$	$3 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 12 + 15 = 27$
$9 \cdot (15 - 5) = 9 \cdot 10 = 90$	$9 \cdot 15 - 9 \cdot 5 = 135 - 45 = 90$
$(10 + 6) \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$	$10 \cdot 2 + 6 \cdot 2 = 20 + 12 = 32$
$(14 - 10) \cdot 6 = 4 \cdot 6 = 24$	$14 \cdot 6 - 10 \cdot 6 = 84 - 60 = 24$

Primijetimo da su rezultati u prvom retku isti i iznose 27, u drugom oba rezultata iznose 90,

u trećem retku 32, a u četvrtom su rezultati jednaki 24. Zaključujemo da je:

$$3 \cdot (4 + 5) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 5$$

$$9 \cdot (15 - 5) = 9 \cdot 15 - 9 \cdot 5$$

$$(10 + 6) \cdot 2 = 10 \cdot 2 + 6 \cdot 2$$

$$(14 - 10) \cdot 6 = 14 \cdot 6 - 10 \cdot 6$$

Svaki član iz zagrade pomnožili smo s **faktorom koji množi zagradu** i te umnoške zbrojili. Tako dobivamo jednak rezultat kao kad pribrojnik u zagradi zbrojimo pa pomnožimo s faktorom izvan zagrade. To se svojstvo naziva **distributivnost množenja prema zbrajanju**. Na isti način imamo i **distributivnost množenja prema oduzimanju**.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

distributivnost,
distribucija

Primjer 2.

Lukina majka čita debelu knjigu. Izračunala je da će, ako svakoga dana u tjednu pročita 93 stranice, u 7 dana pročitati cijelu knjigu. Koliko ta knjiga ima stranica?

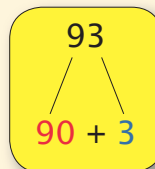
Rješenje:

Procjena: Umnožak iznosi oko 630 jer je $7 \cdot 90 = 630$. Dakle, $7 \cdot 93 \approx 630$.

Računanje napamet: Brže ćemo računati napamet, ako broj 93 rastavimo na dva dijela, $93 = 90 + 3$. Želimo li pomnožiti $7 \cdot 93$, prvo množimo $7 \cdot 90 = 630$, a zatim mu pribrojimo $7 \cdot 3 = 21$, pa je rezultat

$$7 \cdot 93 = 7 \cdot 90 + 7 \cdot 3 = 630 + 21 = 651.$$

Knjiga ima 651 stranicu.



Zadaci

1. Napamet izračunaj:

- $5 \cdot 60, 6 \cdot 40, 70 \cdot 7, 30 \cdot 4, 120 \cdot 2;$
- $50 \cdot 8, 30 \cdot 9, 8 \cdot 40, 3 \cdot 50, 7 \cdot 90;$
- $9 \cdot 70, 60 \cdot 6, 4 \cdot 80, 60 \cdot 8, 70 \cdot 3;$
- $40 \cdot 9, 80 \cdot 7, 90 \cdot 6, 30 \cdot 3.$

2. Napamet izračunaj:

- $4 \cdot 56, 8 \cdot 85, 51 \cdot 5, 37 \cdot 8, 22 \cdot 9;$
- $34 \cdot 6, 72 \cdot 5, 34 \cdot 5, 29 \cdot 7, 45 \cdot 6;$
- $55 \cdot 5, 31 \cdot 7, 21 \cdot 3, 45 \cdot 6, 67 \cdot 3.$

3. Napamet izračunaj koliko sati prođe u tri dana!

4. Knjiga ima 65 stranica. Koliko stranica zajedno ima 5 takvih istih knjiga?

5. Ivana ima 27 godina. Njen pradjed je četiri puta stariji od nje. Koliko pradjed ima godina?

6. Šampon za kosu stoji 18 kn. Koliko će stajati 5 takvih šampona?

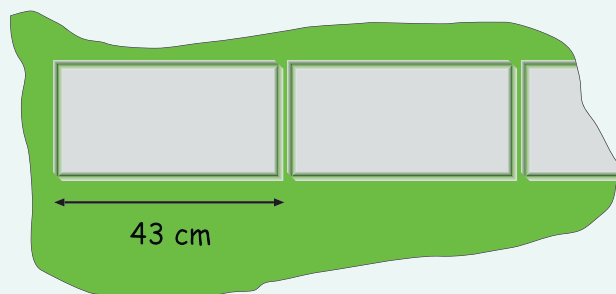
7. Frizura u frizerskom salonu "Štefica" stoji 75 kn. U četvrtak je bilo 7 mušterija koje su tražile frizuru po 75 kn. Koliko je vlasnica u četvrtak zaradila samo na frizurama?

8. Procijeni rezultat i izračunaj napamet:

- a) $8 \cdot 33$, $6 \cdot 21$, $45 \cdot 6$, $31 \cdot 8$;
- b) $92 \cdot 3$, $9 \cdot 99$, $8 \cdot 88$, $77 \cdot 7$;
- c) $66 \cdot 6$, $44 \cdot 5$, $33 \cdot 3$, $22 \cdot 2$.

9. Na slici su ploče kojima Lukin djed želi popločiti stazu u dvorištu.

Dvorište je dugo 450 cm, a djed je kupio 9 takvih ploča.



- a) Je li djed kupio dovoljno ploča, ako ih stavlja jednu tik do druge?
- b) Pronađi koliki bi trebao biti razmak među pločama da se staza poploči s 9 ploča.

10. Izračunaj bez pisanog množenja: $123 \cdot 7$.

Rješenje:

Pomoću svojstva distributivnosti možemo računati i umnožak kada je faktor troznamenkast broj. Kako je $123 = 100 + 20 + 3$, množimo

$$123 \cdot 7 = 100 \cdot 7 + 20 \cdot 7 + 3 \cdot 7 = 700 + 140 + 21 = 861.$$

Izračunaj:

- a) $103 \cdot 2$, $205 \cdot 5$, $505 \cdot 9$, $717 \cdot 3$;
- b) $2 \cdot 144$, $8 \cdot 333$, $5 \cdot 175$, $6 \cdot 122$;
- c) $510 \cdot 3$, $717 \cdot 7$, $503 \cdot 9$, $815 \cdot 5$;
- d) $767 \cdot 4$, $911 \cdot 3$, $315 \cdot 8$, $547 \cdot 2$, $943 \cdot 4$.

11. Zaokruži točne zadatke: $34 \cdot 6 = 184$,
 $71 \cdot 4 = 284$, $312 \cdot 3 = 636$, $705 \cdot 8 = 50\ 640$,
 $255 \cdot 5 = 1225$, $419 \cdot 4 = 1676$,
 $512 \cdot 8 = 496$.

12. Riješi zadatak na dva načina: $(45 + 5) \cdot 6$.

1. način: Prvo računamo izraz u zagradi:
 $(45 + 5) \cdot 6 = 50 \cdot 6 = 300$.

2. način: Koristimo svojstvo distributivnosti:
 $(45 + 5) \cdot 6 = 45 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 270 + 30 = 300$.

U oba slučaja rješenja su jednaka.



Na dva načina riješi zadatke i uvjeri se u točnost rješenja:

$$3 \cdot (22 + 9), 7 \cdot (37 + 91), 5 \cdot (42 + 66), \\ 13 \cdot (25 - 11), (2 + 57) \cdot 3, (11 + 32) \cdot 6, \\ 7 \cdot (21 + 27), 5 \cdot (45 + 55), 6 \cdot (16 + 72), \\ 8 \cdot (4 + 90), (24 - 11) \cdot 10.$$

13. Na dva načina riješi:

- a) $23 \cdot (17 + 55)$, $(125 + 507) \cdot 33$;
- b) $986 \cdot (999 + 1)$, $(101 + 492) \cdot 534$;
- c) $36 \cdot (36 - 36)$, $(24 + 782) \cdot 105$;
- d) $266 \cdot (509 - 118)$, $712 \cdot (209 + 648)$.

14. Broj 19 pomnoži zbrojem brojeva 14 i 15.

15. Broj 6 pomnoži zbrojem brojeva 13 i 89.

16. Zbroj brojeva 44 i 80 pomnoži s 25.

17. Zbroj brojeva 35 i 85 pomnoži s 30.

18. Broj 6 pomnoži razlikom brojeva 34 i 19.

19. Broj 166 pomnoži razlikom brojeva 255 i 105.

20. Razliku brojeva 289 i 256 pomnoži brojem 13.

21. Razliku brojeva 609 i 199 pomnoži brojem 71.

22. Zbroj brojeva 12, 88 i 10 pomnoži brojem 40.



Primjer 3.

Izlučivanje zajedničkog faktora

Izračunaj napamet: $75 \cdot 453 + 25 \cdot 453 =$

Rješenje:

Velike brojeve je teško računati napamet, a u ovom zadatku se traži prvo pomnožiti $75 \cdot 453$, zatim pomnožiti $25 \cdot 453$ pa još dobivene umnoške zbrojiti. I to sve još napamet! Takav zadatak je vrlo težak čak i za nastavnika, a kamoli za učenika. No sigurno postoji lakši način. Primijetimo da se broj 453 pojavljuje kao faktor u oba množenja $75 \cdot 453 + 25 \cdot 453$.

zajednički faktor

On se naziva **zajednički faktor** obaju izraza.

Prisjetimo li se distributivnosti, prepoznat ćemo u izrazu $75 \cdot 453 + 25 \cdot 453$ desnu stranu distributivnosti.

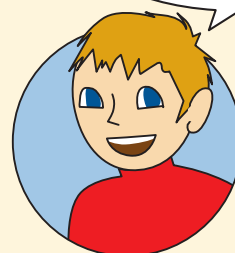
$$\underbrace{a \cdot (b + c)}_{\text{lijeva strana jednakosti}} = \underbrace{a \cdot b + a \cdot c}_{\text{desna strana jednakosti}}$$

Pa krenimo po svojstvu distributivnosti "obrnutim redoslijedom":

$$\begin{aligned} 75 \cdot 453 + 25 \cdot 453 &= \\ &= (75 + 25) \cdot 453 = \\ 100 \cdot 453 &= 45300. \end{aligned}$$

Kažemo da smo zajednički faktor **453** izlučili iz oba umnoška, a preostale faktore zbrojili. Ovaj se postupak naziva **izlučivanje zajedničkog faktora**.

DOSAD SMO IMALI
 $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
SADA ĆEMO ZAMIJENITI
LIJEVU I DESNU STRANU I IMAMO
 $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$



izlučivanje zajedničkog faktora

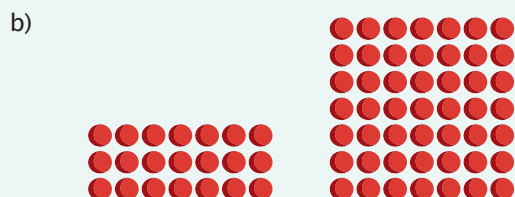
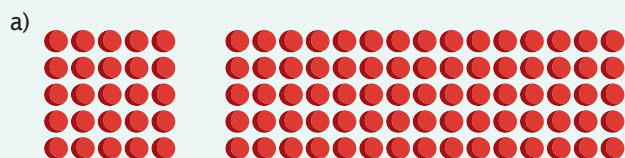
Zadaci

23. Izračunaj koliko je kuglica na slici:



Rješenje: Na prvoj slici je $3 \cdot 8$, a na drugoj $3 \cdot 12$ kuglica. Koristimo izlučivanje zajedničkog faktora:
 $3 \cdot 8 + 3 \cdot 12 = 3 \cdot (8 + 12) = 3 \cdot 20 = 60$.

24. Izračunaj koliko je kružića na slici:



25. Izračunaj napamet koristeći distributivnost:

- $23 \cdot 8 + 37 \cdot 8$, $9 \cdot 18 + 9 \cdot 92$,
 $45 \cdot 2 + 45 \cdot 2$;
- $3 \cdot 73 + 3 \cdot 17$, $4 \cdot 78 + 32 \cdot 4$,
 $49 \cdot 5 + 5 \cdot 11$;
- $63 \cdot 6 + 17 \cdot 6$, $83 \cdot 7 + 7 \cdot 217$.

26. Izračunaj napamet koristeći distributivnost::

- $75 \cdot 11 + 25 \cdot 11$, $43 \cdot 3 + 7 \cdot 3$;
- $22 \cdot 5 + 31 \cdot 5 + 47 \cdot 5$, $65 \cdot 13 + 65 \cdot 87$;
- $402 \cdot 32 + 402 \cdot 45 + 123 \cdot 402$.

27. Od umnoška brojeva 99 i 4 oduzmi umnožak brojeva 29 i 4.

28. Umnožak brojeva 56 i 7 oduzmi od umnoška brojeva 99 i 7.

29. Blizanke Sanja i Tanja kreću u prvi razred. Njihovi roditelji sve moraju kupovati dvostruko. Koliko će novca ukupno potrošiti, ako pernica stoji 20 kn, flomasteri 15 kn, torba 200 kn, par papuča 85 kn, mapa 15 kn, trenirka 433 kn, a pokaz 47 kn?

30. U trgovini je zaposleno 5 radnika, no ne dobivaju svi jednaku plaću jer neki rade već dugi niz godina, a drugi su radnici novi. Vlasnik ih po satu plaća: 30 kn, 35 kn, 36 kn, 37 kn i 45 kn.

- Što misliš, koji radnik dobiva 30 kn po satu? Onaj koji već godinama radi u toj trgovini ili onaj koji je tek došao?
- Ako radnici tjedno rade 35 sati, koliko vlasnik trgovine svakog tjedna mora izdvojiti za njihove plaće?

31. Grof Drakula sprema večeru za svojih 13 gostiju.
Bio je na Mračnoj tržnici i kupio je:
13 ludih gljiva, svaku po 3 novčića
13 šišmiševih krila, svako po 7 novčića
13 mišjih kopita, svako po 5 novčića
13 kapi žabljih suza, svaku po 10 novčića
13 otrovnih mrava, svaki po 11 novčića.
Izračunaj koliko je sve to platilo.

32. Gospođa von Stauss kupuje sitnice za svoj dvorac.
Kupila je:
8 svijećnjaka, svaki po 175 kn
8 svijeća, svaku po 25 kn
8 stolnjaka, svaki po 45 kn
8 pepeljara, svaku po 55 kn.
Napamet izračunaj koliko je sve to platila.

Vježbalica

- Koji broj je za 24 veći od broja 87?
- Koji broj je za 48 veći od broja 989?
- Koji broj je za 345 veći od broja 5?
- Duljina stranice a trokuta iznosi 12 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 4 cm dulja od stranice a, a stranica c za 3 cm dulja od stranice b?
- Duljina stranice a trokuta iznosi 15 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 2 cm dulja od stranice a, a stranica c za 4 cm dulja od stranice a?
- Jednakokrakan trokut ima osnovicu dugu 17 cm, a svaki krak je za 5 cm dulji od osnovice. Kolika je duljina svakog kraka?
- Je li zbroj bliži broju 60 ili 70?
a) $45 + 33$; b) $23 + 56$; c) $35 + 32$; d) $36 + 25$.
- Primjeni svojstva zbrajanja i što jednostavnije izračunaj:
a) $345 + 677 + 63 + 55$; b) $5644 + 781 + 456 + 7569$;
c) $99 + 37 + 11 + 33 + 50$.
- Izračunaj opseg trokuta sa stranicama 234 mm, 256 mm i 330 mm.
- Izračunaj opseg trokuta sa stranicama 23 cm, 31 cm i 49 cm.
- Stranice trokuta su tri uzastopna prirodna broja. Izračunaj mu opseg ako je srednja stranica duga 33 cm.
- Stranice trokuta su tri uzastopna parna broja. Izračunaj mu opseg ako je najdulja stranica duga 24 cm.
- Stranice trokuta su tri uzastopna neparna broja. Izračunaj mu opseg ako je najkraća stranica duga 9 cm.
- Koji broj je za 12 manji od broja 378?
- Koji broj je za 44 manji od broja 76?
- Koji broj je za 11 manji od broja 1078?
- Koji broj je za 10 manji od broja 506?
- Duljina stranice a trokuta iznosi 15 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 3 cm kraća od stranice a, a stranica c za 2 cm kraća od stranice b?
- Duljina stranice a trokuta iznosi 45 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 6 cm kraća od stranice a, a stranica c za 4 cm kraća od stranice a?
- Duljina stranice a trokuta iznosi 29 cm. Kolike su preostale dvije stranice ako je stranica b za 7 cm kraća od stranice a, a stranica c za 5 cm dulja od stranice a?
- Jednakokrakan trokut ima osnovicu dugu 22 cm, a svaki krak je za 5 cm kraći od osnovice. Kolika je duljina svakog kraka?
- Umanjenik je 4960, umanjitelj je 2260. Kolika je razlika?
- Umanjitelj je 273, umanjenik je 825. Kolika je razlika?
- Je li razlika bliža broju 40 ili 30?
a) $56 - 16$; b) $60 - 24$; c) $79 - 45$.
- Koji broj nedostaje:
a) $356 + \square = 745$; b) $65 + \square = 456$;
c) $\square + 75 = 89$; d) $67 + \square = 145$;
e) $56 + \square = 67$; f) $\square + 14 = 22$; g) $\square + 54 = 99$.
- Umanjenik je 456, umanjitelj je 232. Kolika je razlika?
- Umanjitelj je 40, umanjenik je 56. Kolika je razlika?
- Umanjitelj je 33, razlika je 44. Koliki je umanjenik?
- Razlika je 27, umanjenik je 78. Koliki je umanjitelj?
- Izračunaj:
a) $12 - 12$; b) $8 - 0$; c) $17 - 17$; d) $23 - 0$;
e) $4 + 0$; f) $0 + 12$; g) $15 + 15$.
- Izračunaj:
a) $454 + 227 - 134 + 674$; b) $304 + 205 - 303 + 120$; c) $614 - 322 - 332 + 0$; d) $713 - 123 - 133 - 143 - 153$; e) $101 + 390 - 67 + 203$; f) $299 + 299 - 508$;
g) $127 - 111 + 145 - 21 - 25$.
- Izračunaj:
a) $35 - (44 - 12) + 0$; b) $(30 + 42) + 1 - 50$;
c) $20 + 25 - (5 + 20)$; d) $92 - 81 + (45 - 31) + 52$.
- Izračunaj:
a) $85 - (75 - 42) + 9$; b) $(25 + 54) - 11 - 3$;
c) $206 + 1205 - (205 + 225)$;
d) $198 - 98 + (45 - 31) + 2$.

34. Od razlike brojeva 45 i 13 oduzmi broj 3.
35. Od zbroya brojeva 675 i 26 oduzmi broj 89.
36. Broju 506 dodaj razliku brojeva 146 i 33.
37. Broju 182 dodaj razliku brojeva 314 i 302.
38. Broju 1019 dodaj zbroj brojeva 35 i 25.
39. Razlici brojeva 354 i 202 dodaj broj 515.
40. Zbroju brojeva 213 i 33 dodaj razliku brojeva 65 i 11.
41. Razlici brojeva 24 i 22 dodaj razliku brojeva 205 i 9.
42. Razlici brojeva 116 i 3 dodaj zbroj brojeva 408 i 48.
43. Zbroju brojeva 46 i 59 dodaj zbroj brojeva 45 i 10.
44. Razlici brojeva 480 i 28 dodaj razliku brojeva 104 i 16.
45. Od razlike brojeva 635 i 505 oduzmi zbroj brojeva 33 i 11.
46. Od zbroya brojeva 44 i 23 oduzmi zbroj brojeva 2 i 45.
47. Od razlike brojeva 97 i 3 oduzmi razliku brojeva 16 i 11.
48. Od zbroya brojeva 44 i 99 oduzmi razliku brojeva 121 i 50.
49. Izračunaj:
 - a) $9 + [73 - (13 - 3)] - 53$;
 - b) $92 - [89 - (56 - 17)] - 6$;
 - c) $[51 + (19 - 11) + 18] - 76$.
50. Izračunaj:
 - a) $202 + [405 - (330 - 86)]$,
 - b) $[498 - 65 + 7 - (310 - 63)] + 17$,
 - c) $3 + [76 - (120 - 117)] - 41$,
 - d) $[320 - 0 + (400 + 103)] - (45 - 6)$,
51. Izračunaj:
 - a) $506 + [(376 - 232) + 191] - 47 + (39 - 17)$,
 - b) $(85 + 96) - [81 + (24 - 23) + 27] - 14 + (308 + 49)$,
 - c) $[5 + (37 - 3) + 11] + 4(6 - 2)$
52. Izračunaj:
 - a) $403 + \{302 + [210 - (34 - 11 - 19) + 151] - 2\} - 307$,
 - b) $(419 - 418) + 439 - \{422 - [32 - (445 - 433 - 1) - 21] + 13\} - (12 - 9)$,
 - c) $51 + [32 + (21 - 17)] - 16 + \{13 + [66 - (18 + 15 - 4) - 6] + 17\} - (0 + 9)$.

1.13. Dijeljenje prirodnih brojeva

Rođendan

Luka je za svoj rođendan pripremio 50 čokoladica za svoje prijatelje iz razreda.

U Lukinom razredu ima 24 učenika.

a) Koliko će čokoladica dobiti svaki učenik?

b) Hoće li nešto ostati i za razrednicu?

U 5.c razredu je jednak broj dječaka i djevojčica. Ako znamo da u 5.c ima ukupno 26 djece, lako je dobiti broj dječaka i broj djevojčica. Treba ukupan broj podijeliti na dva dijela, tj. izračunati $26 : 2 = 13$. U 5.c razredu je 13 dječaka i 13 djevojčica.

Taj smo rezultat dobili **dijeljenjem** ukupnog broja djece s 2 jer se razred dijeli na dvije osnovne skupine, dječake i djevojčice. Pri tome broj koji dijelimo nazivamo **djeljenik**, broj kojim dijelimo **djelitelj**, a rezultat pri dijeljenju **količnik ili kvocijent**

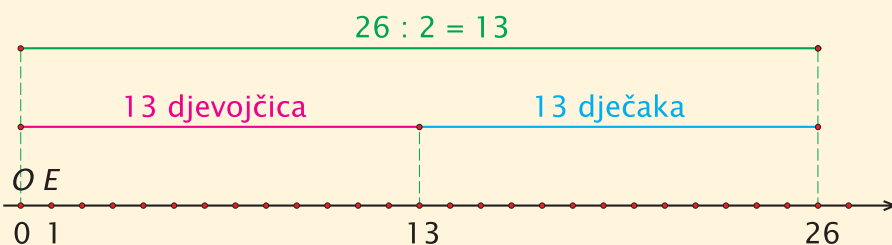
$$26 : 2 = 13$$

djeljenik djelitelj količnik ili kvocijent

Pazi na pravopis! IJE i JE
IJE: kvocijent, dijeljenje
JE: djeljenik, djelitelj



Dijeljenje možemo prikazati i na brojevnom pravcu:



Primjer 1. Dijeljenje do 100

Izračunaj napamet $48 : 8$, $72 : 9$, $12 : 6$.

Rješenje :

Tablicu dijeljenja znamo iz nižih razreda osnovne škole. Koristeći to znanje možemo riješiti napamet ove zadatke.

a) $48 : 8 = 6$ jer je $6 \cdot 8 = 48$.

b) $72 : 9 = 8$ jer je $8 \cdot 9 = 72$.

c) $12 : 6 = 2$ jer je $2 \cdot 6 = 12$.

Ako znaš množiti, onda znaš i dijeliti!

$6 \cdot 3 = 18$ $18 : 6 = 3$

$2 \cdot 12 = 24$ $24 : 2 = 12$

$8 \cdot 7 = 56$ $56 : 8 = 7$

Primjer 2.

Koji je broj 6 puta manji od broja 54?

Koji je broj za 6 manji od 54?

Rješenje :

Šest puta manji broj dobivamo dijeljenjem sa 6. Dakle, $54 : 6 = 9$. Broj 9 je 6 puta manji od broja 54.

Broj za 6 manji od 54 je 48 jer je $54 - 6 = 48$.

Broj 48 je za 6 manji od broja 54.

“6 puta manji”
dijelimo sa 6

“za 6 manji”
oduzimamo 6



Primjer 3.

Izračunaj napamet:

a) $25 : 5 =$

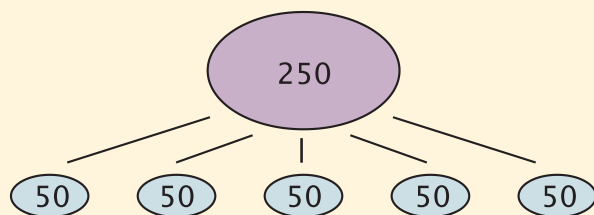
b) $250 : 5 =$

c) $2500 : 5 =$

d) $25\ 000\ 000 : 5 =$

Rješenje :

Znamo da je $25 : 5 = 5$. Želimo li 250 bombona podijeliti ravnomjerno na 5 učenika, svaki učenik će dobiti 50 bombona.



Usporedimo dijeljenja $25 : 5 = 5$ i $250 : 5 = 50$.

U prvom slučaju djeljenik je 25, a u drugom djeljenik je 10 puta veći, dakle 250. Tada će i količnik biti deset puta veći. Zaista, 50 je 10 puta veći od 5. Isto vrijedi i za 100 puta veći djeljenik itd. Dakle, i ovakve tipove zadataka možemo riješiti napamet.

Tako je $2500 : 5 = 500$,

$25\ 000\ 000 : 5 = 5\ 000\ 000$.

Na isti način bismo napamet računali

$25\ 000 : 5 = 5000$, $250\ 000 : 5 = 50\ 000$ itd.

Pročitaj na glas:

$25 : 5 = 5$

$250 : 5 = 50$

$2500 : 5 = 500$

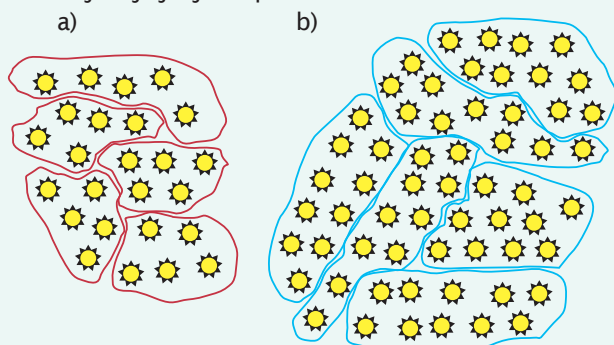
$25\ 000 : 5 = 5000$

$250\ 000 : 5 = 50\ 000$



Zadaci

1. Koja dijeljenja su prikazana na slici:



2. Računske operacije množenja i dijeljenja su povezane. Na primjer, $21 : 7 = 3$ jer je $7 \cdot 3 = 21$. Podijeli i rezultat provjeri množenjem:
- $49 : 7$, $15 : 3$, $27 : 9$, $40 : 4$, $32 : 8$, $90 : 10$;
 - $56 : 7$, $45 : 5$, $63 : 7$, $48 : 8$, $27 : 3$, $42 : 7$;
 - $81 : 9$, $35 : 7$, $28 : 7$, $10 : 2$, $9 : 3$, $12 : 4$;
 - $120 : 6$, $1200 : 1$, $120 : 12$, $12\ 000 : 2$, $6400 : 8$;
 - $7700 : 7$, $72\ 000 : 8$, $100 : 10$, $6000 : 3$, $20 : 5$, $870 : 1$;
 - $14\ 000\ 000 : 7$, $300\ 000 : 15$, $240\ 000 : 12$.



Prepolovi!

12, 10, 100, 50, 40, 22, 66, 34, 58, 46, 38, 500, 900, 1000, 32, 68, 72.

- Izračunaj napamet:
 - $560 : 8$, $450 : 9$, $100 : 2$, $3200 : 4$, $250 : 5$, $200 : 4$;
 - $320 : 8$, $240 : 3$, $720 : 8$, $4500 : 5$, $2100 : 7$, $900 : 3$.
- Daska duga 12 m treba se podijeliti na 4 jednaka dijela. Kolika će biti duljina svakog odrezanog dijela? Nacrtaj skicu.
- Razred od 27 učenika treba podijeliti u 3 jednake grupe učenika. Koliko učenika će biti u svakoj grupi?
- Dasku dugu 120 cm treba otpiliti na jednake dijelove. Kolika će biti duljina svakog dijela, ako dasku treba prepiliti na
 - 2 dijela;
 - 3 dijela;
 - 6 dijelova;
 - 10 dijelova;
 - 12 dijelova?
- Podijeli broj 36 brojevima 1, 2, 3, 4, 6, 9, 36.
- Koji je broj 2 puta manji od broja 50?
- Koji je broj duplo manji od 12?
- Koliko puta je broj 40 veći od 4?
- Koji broj je 7 puta manji od broja 49?
- Koji broj je trostruko manji od 27?
 - Koji broj je za 3 manji od 27?

- Koji je broj za 5 manji od 45?
- Koji je broj 5 puta manji od 45?

duplo =
dvostruko =
= dva puta

- Koji je broj 6 puta veći od 36?
- Koji je broj za 6 veći od 36?
- Koji je broj za 6 manji od 36?
- Koji broj je 6 puta manji od 36?
- Koliko puta je broj 6 manji od 36?
- Koji je broj za 36 veći od 6?

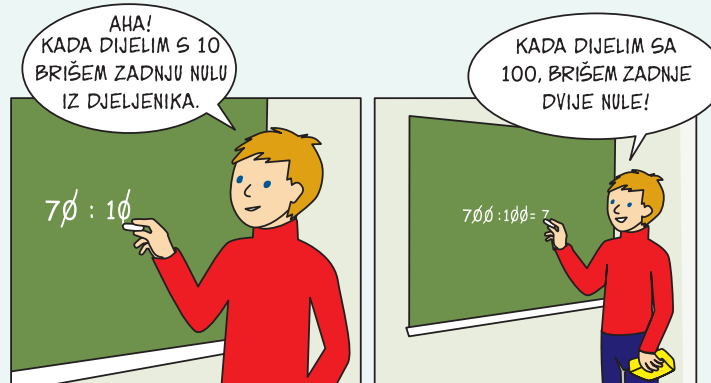
15. **Dijeljenje sa 10, 100, 1000...**

Pogledajmo ova dijeljenja. Što je zajedničko svim dijeljenjima u prvom stupcu? Što je zajedničko svim dijeljenjima u drugom stupcu, a što u trećem?

$70 : 10 = 7$	$500 : 100 = 5$	$2000 : 1000 = 2$
$400 : 10 = 40$	$8000 : 100 = 80$	$41000 : 1000 = 41$
$250 : 10 = 25$	$2400 : 100 = 24$	$255000 : 1000 = 255$

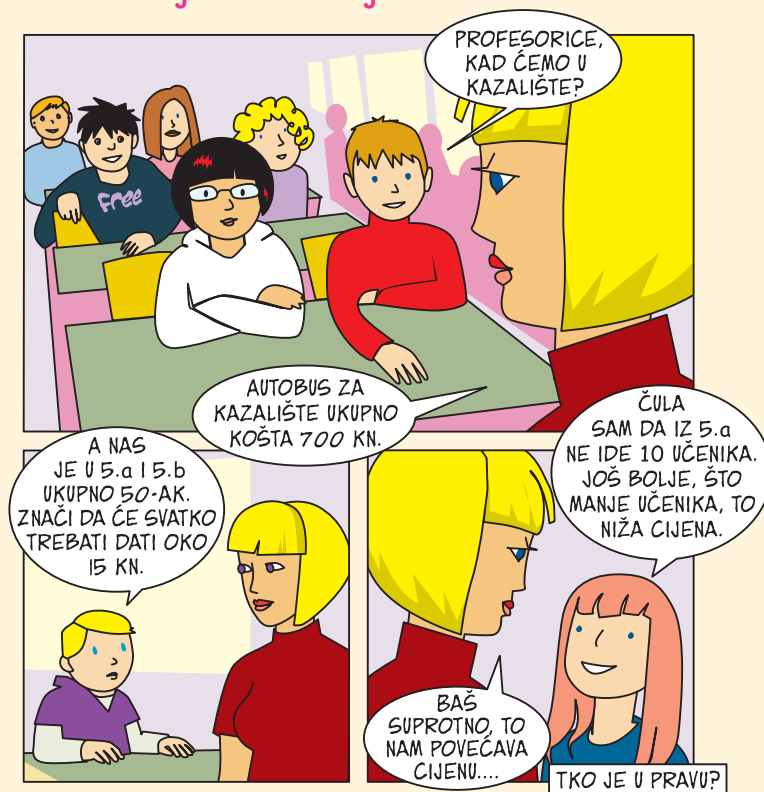
Vidiš li vezu između djeljnika i količnika u svakom stupcu?

16. Izračunaj:
- $7200 : 100$, $3040 : 10$, $20\ 000 : 100$, $20\ 000 : 10\ 000$;
 - $20\ 000 : 10$, $7070 : 10$, $111\ 000 : 100$, $9\ 100\ 000 : 10\ 000$.



- Izračunaj:
 - $2400 : 20$, $360 : 60$, $1800 : 20$, $35\ 000 : 70$;
 - $16\ 000 : 400$, $3200 : 800$, $25\ 000\ 000 : 500$, $800 : 400$;
 - $7200 : 10$, $45\ 000 : 900$, $560\ 000 : 8\ 000$, $64\ 000 : 80$;
 - $40\ 000 : 200$, $540 : 90$, $4200 : 70$, $150\ 000 : 30\ 000$.
- Opseg jednakostraničnog trokuta je 270 cm. Kolika je duljina jedne stranice tog trokuta? Pokaži rukama kolika je otprilike stranica tog trokuta i skiciraj je na ploči.
- Opseg kvadrata je 32 cm. Kolika je duljina jedne stranice tog kvadrata? Pokaži rukama kolika je otprilike stranica tog kvadrata i skiciraj taj kvadrat u bilježnicu.

Primjer 4. Procjena



Rješenje:

Kako za autobus ukupno treba platiti 700 kn, bez obzira na broj učenika koji se u njemu voze, cijenu vozne karte izračunat ćemo tako da iznos od 700 kn podijelimo s brojem učenika. Kad bi išao samo jedan učenik, on sam bi morao platiti 700 kn. Kad bi išla dva učenika, svaki bi morao platiti 350 kn jer je $700 : 2 = 350$. Ako bi bilo 50-ak učenika (to znači otprilike 50), dijeljenjem $700 : 50 = 14$ zaključit ćemo da je učenik imao pravo kad je rekao da će vozna karta stajati oko 15 kn.

Međutim, saznalo se da u kazalište ne ide 50-ak učenika, već 40-ak, jer iz 5.a ide 10 učenika manje. Sada treba podijeliti 700 na 40 učenika i jasno je da će cijena biti veća od 15 kn, jer je $800 : 40 = 20$.

Zadaci

20. Znamo da je $100 : 5 = 20$. Bez računanja odredi koji količnici će biti manji od 20.
 $100 : 1$, $100 : 4$, $100 : 10$, $100 : 25$,
 $100 : 50$, $100 : 2$, $100 : 100$.

21. Bez računanja odredi koji broj je veći: $28 : 4$ ili $28 : 7$, $36 : 6$ ili $36 : 9$, $270 : 10$ ili $270 : 9$, $702 : 9$ ili $702 : 2$, $297 : 1$ ili $297 : 3$, $450 : 10$ ili $450 : 9$.

22. Na slici je nacrtana dužina od 6 cm. Dobro je pogledaj i pokušaj bez mjerenja istu dužinu nacrtati u svojoj bilježnici.



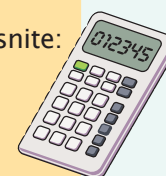
- Skiciraj dužinu od 6 cm i prostoručno je podijeli na 2 dijela;
- Skiciraj dužinu od 6 cm i prostoručno je podijeli na 3 dijela;
- Skiciraj dužinu od 6 cm i prostoručno je podijeli na 4 dijela.

23. Procijeni: $86 : 32$, $155 : 54$, $716 : 71$,
 $440 : 50$, $228 : 38$, $410 : 73$, $230 : 32$,
 $92 : 38$, $42 : 13$, $500 : 42$, $151 : 41$,
 $225 : 64$, $100 : 24$, $298 : 47$, $712 : 22$.

Dijeljenje na džepnom računalu

Da biste izračunali koliko je $375 : 5$ pritisnite:

- Tipke s brojevima
- Tipku za dijeljenje
- Tipku s brojem
- Za prikaz rezultata pritisnite tipku
- Na zaslonu će se prikazati rezultat 75.



dijeljenje

Primjer 5. Pisano dijeljenje

a) Dijeljenje bez ostatka

Matija u 7 dana treba pročitati lektiru. Knjiga ima 112 stranica. Matija je odlučio svakog dana pročitati jednako, kako bi u nedjelju bio gotov. Koliko stranica treba pročitati svakoga dana? Procijeni rezultat, a zatim izračunaj.

b) Dijeljenje s ostatkom

Matija se odlučio u nedjelju odmarati, a knjigu od 112 stranica pročitati za 6 dana. Koliko stranica on treba pročitati svakoga dana?

Rješenje:

- a) Treba podijeliti broj stranica s brojem dana, tj. $112 : 7$. Procjenjujemo da će svakoga dana Matija trebati pročitati 15-ak stranica, jer je 112 veći od 70, a manji od 140 pa se količnik $112 : 7$ nalazi između 10 i 20.

$$112 : 7 = 16$$

$$\begin{array}{r} -7 \\ 42 \\ -42 \\ 0 \end{array}$$

Točnost količnika provjeravamo množenjem: $7 \cdot 16 = 112$

- b) Ono što sigurno znamo: Matija će svakoga dana trebati pročitati više od 16 stranica ako želi biti gotov do subote, a u nedjelju se odmarati. Podijelimo li 112 sa 6 dobivamo **ostatak pri dijeljenju**:

$$112 : 6 = 18$$

$$\begin{array}{r} -6 \\ 52 \\ -48 \\ 4 \end{array}$$

ostatak

To znači da će Matija svakog dana do subote trebati pročitati 18 stranica i još će mu za nedjelju ostati 4 posljednje stranice.

Ovaj ćemo rezultat provjeriti tako da pomnožimo $6 \cdot 18 = 108$ i umnošku dodamo preostali broj stranica, $108 + 4 = 112$.

Rješenje je točno, jer smo provjerom došli do 112 stranica knjige.

Znamo računati i na kraći način!

$$\begin{array}{r} 112 : 7 = 16 \\ 42 \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 : 6 = 18 \\ 52 \\ 4 \end{array}$$



Primjer 6. Ostatak pri dijeljenju

ostatak pri dijeljenju

Luka je pokušao podijeliti $2752 : 32$, ali mu baš nije polazilo za rukom. Pogledaj kako je počeo. Samo jedno dijeljenje je točno i može se nastaviti. Koje? Možeš li pronaći i ispraviti pogreške u krivim dijeljenjima?

a) $2752 : 32 = 7$ $\underline{\hspace{1cm}}$ b) $2752 : 32 = 8$ $\underline{\hspace{1cm}}$ c) $2752 : 32 = 9$ $\underline{\hspace{1cm}}$

$$\begin{array}{r} -224 \\ 51 \end{array} \quad \begin{array}{r} -256 \\ 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} -288 \\ ? \end{array}$$

Rješenje:

Pri dijeljenju je vrlo važno dobro procijeniti rezultat. Možemo razlikovati tri vrste rezultata:

- procijenili smo premali broj (kriva procjena!) ✗
- procijenili smo dobar rezultat (točna procjena!) ✓
- procijenili smo prevelik broj (kriva procjena!) ✗

Luka je u a) zadatku procijenio da 32 u 275 ide 7 puta.

$$\begin{array}{r} 2752 : 32 = 7 \underline{\hspace{1cm}} \\ -224 \\ 51 \end{array}$$

Tako je dobio ostatak 51.

Ali, ako neki broj dijelimo s 32, ostatak mora biti manji od 32. To znači da smo procijenili premali rezultat i treba pokušati s većim brojem (u ovom slučaju to je 8).

Ako je ostatak veći od djelitelja, nismo dobro procijenili rezultat – procijenili smo premali broj.

U c) zadatku je Luka dobio oduzimanje koje nije znao riješiti jer je trebalo od manjeg broja oduzeti veći ($275 - 288 = ?$). Znamo da ostatak mora biti prirodan broj ili nula, a u ovom slučaju ne dobivamo prirodan broj. To znači da smo procijenili prevelik rezultat i treba pokušati s manjim brojem (u ovom slučaju to je 8).

Ako u međurezultatu dobijemo oduzimanje gdje od manjeg broja treba oduzeti veći, nismo dobro procijenili količnik – procijenili smo prevelik broj.

U zadatku b) Luka je dobro počeo s dijeljenjem. Točan rezultat glasi:

$$\begin{array}{r} 2752 : 32 = 86 \\ -256 \\ 192 \\ -192 \\ 0 \end{array}$$

Ovo dijeljenje provjerimo množenjem $32 \cdot 86 = 2752$.

Zadaci

24. Dopuni:

$$45 : 6 = 7 \text{ i ostatak } 3$$

$$29 : 9 =$$

$$38 : 10 =$$

$$30 : 6 =$$

$$15 : 2 =$$

$$75 : 8 =$$

$$31 : 5 =$$

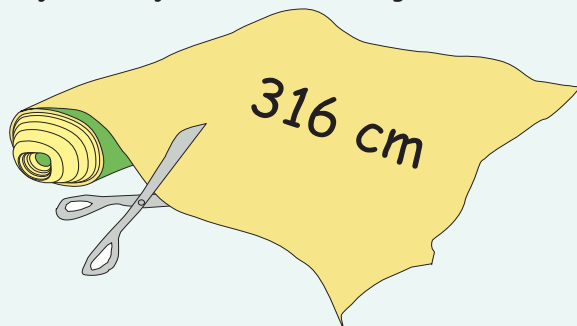
$$66 : 7 =$$

$$97 : 9 =$$

$$55 : 7 =$$

$$56 : 8 =$$

25. Ovaj komad tkanine treba razrezati na četiri jednaka dijela. Koliko će biti dug svaki dio?



26. Napravi procjenu tako da djeljenik zaokružiš.

Nakon toga izračunaj točno i provjeri rezultat:

a) $9282 : 7$, $33\,603 : 9$, $2504 : 4$, $1205 : 5$;

b) $5505 : 3$, $4206 : 6$, $63\,000 : 8$, $67\,714 : 2$;

c) $8604 : 9$, $82\,160 : 2$, $90\,115 : 5$, $62\,872 : 4$;

d) $71\,661 : 3$, $510\,936 : 6$, $111\,111 : 9$, $54\,568 : 8$;

e) $917\,002 : 2$, $72\,096 : 4$, $25\,837 : 7$,

$7\,198\,236 : 3$, $53\,198 : 2$.

27. Mama je spremala zimnicu. U svaku teglicu stavila je po 8 ukiseljenih paprika. Koliko je teglica trebala, ako je kupila ukupno 208 paprika?

28. Pod matematičke učionice sastavljen je od 1644 komada parketa. U svakom retku nalazi se 137 parketa. Koliko ima redaka?



29. Izračunaj i provjeri rezultat:

a) $7145 : 2$, $5147 : 8$, $3126 : 3$, $6190 : 5$;

b) $5844 : 6$, $81\,993 : 9$, $616\,288 : 6$, $22\,609 : 7$, $4136 : 2$;

c) $5591 : 3$, $55\,182 : 7$, $77\,716 : 9$, $71\,862 : 8$, $9073 : 3$.



30. Procijeni rezultat tako da brojeve najprije zaokružiš na desetice, a zatim izračunaj:

a) $142 : 20$, $1440 : 20$, $9135 : 30$, $4100 : 50$;

b) $8743 : 50$, $2502 : 40$, $4421 : 90$, $3313 : 80$;

c) $4217 : 50$, $2100 : 20$, $4372 : 60$, $8888 : 80$;

d) $3122 : 70$, $1111 : 10$, $3144 : 30$, $257\,111 : 30$;

e) $7065 : 50$, $3100 : 20$, $2244 : 40$, $100 : 40$.

Rješenje:

Procijenimo rezultat $142 : 20$. Zaokružimo na desetice $142 \approx 140$ i podijelimo napamet $140 : 2 = 70$, pa je $140 : 20$ deset puta manji broj od 70.

Zaključujemo da je $142 : 20 \approx 7$. Procjenu provjerimo pisanim dijeljenjem.

31. Velika stara kornjača teška je 592 kg. Luka je izračunao da je ona točno 16 puta teža od njega.

Koliko kilograma ima Luka?

32. Dobitak u igri Bingo iznosi 516 000 kn. Međutim, 12 igrača je odjednom povikalo "Bingo!" i oni će pravedno podijeliti nagradu. Koliko će dobiti svaki pobjednik?

33. Luka je tijekom ljeta radio da zaradi džeparac. Za 128 sati rada dobio je 4480 kn.

Marko je također tijekom ljeta radio. On je za 115 sati rada zaradio 4830 kn.

Procijeni koji dječak je bio bolje plaćen po satu rada. Koliki je Lukin, a koliki Markov sat rada?

34. Ispuni ovu brojčanu križaljku:

VODORAVNO $\rightarrow$:

1) $558\,454 : 611$;

5) $232\,860 : 12$;

7) $3\,924\,366 : 14\,698$;

8) $92\,000 : 23$.

OKOMITO $\downarrow$:

1) $1\,657\,872 : 18$;

2) $39\,601 : 199$;

3) $8799 : 7$;

4) $30\,600 : 10$;

6) $4620 : 11$.

1	2			3
			4	
5		6		
		7		
8				



35. Umjesto upitnika upiši znamenku tako da dijeljenje bude točno:

$$13536 : ?4 = 5??$$

$$?3?? : 47 = ???$$

$$\begin{array}{r} - ??? \\ ??? \\ - ??? \\ ?? \\ - ?? \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 4? \\ ??? \\ - 235 \\ ??? \\ - 282 \\ 0 \end{array}$$

36. U ovim dijeljenjima potkrala se pogreška. Pronađi je!

$$216 : 22 = 9$$

$$\begin{array}{r} - 188 \\ 28 \end{array}$$

$$915 : 6 = 152$$

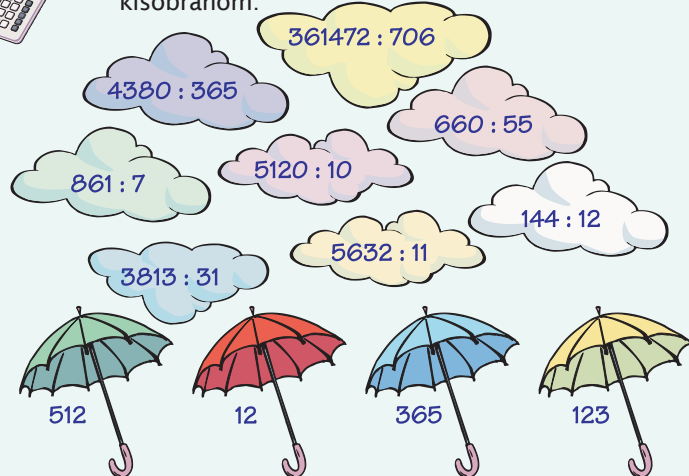
$$\begin{array}{r} - 6 \\ 31 \\ - 30 \\ 15 \\ - 10 \\ 5 \end{array}$$

$$700 : 25 = 118$$

$$\begin{array}{r} - 25 \\ 450 \\ - 450 \\ 0 \end{array}$$



37. Svaki od oblacića spoji munjom s njegovim kišobranom:



38. Najveća pustinja na svijetu, Sahara u sjevernoj Africi, ima površinu od 9 000 000 km². Koliko puta je ta pustinja veća od površine Hrvatske koja ima 60 000 km²?



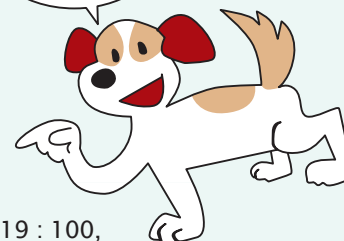
39. Mars je od Sunca udaljen 228 milijuna kilometara. Zraka svjetlosti putuje brzinom od 300 000 km u sekundi. Koliko je vremena potrebno da svjetlost dođe od Sunca do Marsa?

40. U 5.b razredu je 25 učenika. Svi su odlučili ići na izlet u Hrvatsko zagorje autobusom. Autobus su platili 700 kn, a vodiča puta 200 kn. Koliko je svaki učenik trebao platiti izlet?



41. Procijeni rezultat tako da brojeve najprije zaokružiš na najveću mjesnu vrijednost, a zatim izračunaj:

TKO OVO TOČNO RJEŠI, DOBNE OD MENE PETICU!



- a) 512 : 200, 413 : 30, 819 : 100, 5466 : 700;
- b) 4901 : 70, 5510 : 50, 4522 : 900, 3288 : 600;
- c) 43 700 : 8000, 4609 : 1000, 3155 : 40, 3333 : 3000;
- d) 4217 : 700, 1009 : 200, 1009 : 20, 3126 : 600, 4188 : 80;
- e) 3677 : 600, 7155 : 2, 9099 : 900, 2144 : 2000, 7215 : 500.

Primjer 7. Količnik prirodnih brojeva

Ako dijelimo dva prirodna broja, hoće li količnik uvijek biti prirodan broj?

Rješenje:

Želimo li 6 bombona podijeliti na dvoje djece, svako dijete će dobiti tri bombona. No imamo li 7 bombona i želimo ih podijeliti među dvoje djece, jasno je da će svako dijete dobiti tri bombona te da će jedan bombon ostati u vrećici. Dakle, kod dijeljenja se može javiti ostatak. Kada dijelimo 7 sa 2, količnik neće biti prirodan broj, jer bi pravedno bilo da i taj jedan bombon podijelimo na dva dijela. Tada bi svako dijete dobilo "tri i pol" bombona. A "tri i pol" nije

prirodan broj. **Količnik dvaju prirodnih brojeva nije uvijek prirodan broj.**

Količnik dvaju prirodnih brojeva nije uvijek prirodan broj.

DAJ NEKA DVA KOJA SE DAJU PODIJELITI! NA PRIMJER, 7 : 14! ILI JE 14 : 7? HMMM, ČEKAJ DA RAZMISLIM...



Zadaci

1. Izračunaj

- a) $5 : 5$; $5 + 5$; $5 \cdot 5$; $5 - 5$;
- b) $10 \cdot 10$; $10 + 10$; $10 : 10$; $10 - 10$;
- c) $9 - 9$; $9 : 9$; $9 \cdot 9$; $9 + 9$;
- d) $8 + 8$; $8 : 8$; $8 - 8$; $8 \cdot 8$.

2. Izračunaj:

- a) $824 + 1$; $824 \cdot 1$; $824 - 1$; $824 : 1$;
- b) $225 - 1$; $225 : 1$; $225 + 1$; $225 \cdot 1$;
- c) $453 : 1$; $453 - 1$; $453 \cdot 1$; $453 + 1$;
- d) $16 \cdot 1$; $16 + 1$; $16 : 1$; $16 - 1$.

Primjer 8. Komutativnost

Vrijedi li svojstvo komutativnosti za dijeljenje prirodnih brojeva?

Rješenje:

Hoće li količnik ostati jednak, ako djeljenik i djelitelj zamijene mjesta? Pogledajmo primjer

$10 : 2 = 5$, ali ako zamijenimo mjesta količnik $2 : 10$ nije prirodan broj. **Stoga zaključujemo da dijeljenje nije komutativno u skupu prirodnih brojeva.**

Dijeljenje nije komutativno u skupu prirodnih brojeva.

Primjer 9: Asocijativnost

Vrijedi li svojstvo asocijativnosti za dijeljenje prirodnih brojeva?

Rješenje:

Pokušajmo riješiti ovaj zadatak pomoću nekog primjera s brojevima. Primjerice, pogledajmo je li jednako $24 : (6 : 3)$ i $(24 : 6) : 3$.

$$24 : (6 : 3) = 24 : 2 = 12$$

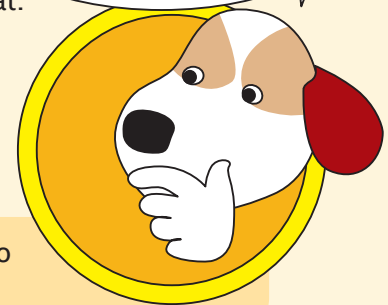
$(24 : 6) : 3 = 4 : 3$ (ovo rješenje nije iz skupa prirodnih brojeva!)

Članove smo združili na različite načine, ali nismo dobili jednak rezultat.

Dakle, **dijeljenje nije asocijativno u skupu N.**

Dijeljenje nije asocijativno u skupu N.

PA TO DIJELJENJE NEMA NI ZATVORENOST, NI KOMUTATIVNOST, NI ASOCIJATIVNOST! DAKLE, NIŠTA NAM SE NE OLAKŠAVA! NJUŠIM PROBLEME...



Primjer 10. Dijeljenje s 1

Koliko je $56 : 1$? Zamisli da umjesto broja 56 staviš bilo koji prirodan broj. Koliki će tada biti količnik?

Rješenje:

Lako je izračunati $56 : 1 = 56$. Možemo reći da

za svaki prirodan broj a vrijedi da je $a : 1 = a$.

Dijeljenje s 1

Ako prirodan broj podijelimo s 1, količnik će biti jednak tom prirodnom broju.

Primjer 11. Dijeljenje jednakih brojeva

Što će se dogoditi, ako prirodan broj podijelimo s tim istim brojem?

Rješenje:

Pogledajmo nekoliko primjera: $5 : 5 = 1$, $7 : 7 = 1$, $246 : 246 = 1$ itd.

Dijeljenje jednakih brojeva

Ako su djelitelj i djeljenik jednaki, količnik je 1.

To vrijedi za svaki prirodan broj a , pa zapisujemo:

$$a : a = 1$$

Primjer 12. Dijelimo nulu

Koliko je $0 : 5$?

Rješenje:

Dijeljenje $0 : 5$ možemo objasniti na još jedan način. Zamislimo da u vrećici nema niti jednog bombona. Onda možemo reći i da u vrećici ima 0 bombona. Koliko će svako od petero djece dobiti bombona iz te vrećice? Jasno je, niti jedan, jer ih nema. To ćemo zapisati $0 : 5 = 0$.

Dijeljenje nule

Ako nulu dijelimo prirodnim brojem, rezultat je 0.



Primjer 13. S nulom se ne dijeli

Prisjetimo se povezanosti množenja i dijeljenja.

Dopuni:

$6 : 3 = 2$ jer je $3 \cdot 2 = 6$
 $42 : 6 = 7$ jer je $6 \cdot 7 = 42$
 $0 : 6 = \underline{\quad}$ jer je $\underline{\quad}$
 $4 : 1 = \underline{\quad}$ jer je $\underline{\quad}$
 $8 : 8 = \underline{\quad}$ jer je $\underline{\quad}$
 $3 : 0 = \underline{\quad}$ jer je $\underline{\quad}$

Rješenje:

Nije bilo teško dopuniti ova dijeljenja i množenja:

$0 : 6 = 0$ jer je $6 \cdot 0 = 0$
 $4 : 1 = 4$ jer je $1 \cdot 4 = 4$
 $8 : 8 = 1$ jer je $8 \cdot 1 = 8$

Međutim, u zadnjem redu krije se zamka. Pita-mo se koliko je $3 : 0$. Sada ne dijelimo nulu na dijelove (kao u Primjeru 6), već dijelimo broj 3, a nula je djeljitelj.

Ako zapišemo $3 : 0 = 0$, onda pripadajuće mno-ženje glasi $0 \cdot 0 = 3$, a to ne može biti jer $0 \cdot 0$ nije jednako 3. Dakle, $3 : 0$ nije 0. Pa koliko je $3 : 0$?



Kada dobiješ zadatak tipa $a : 0$, prekriži ga i sa strane napiši: **S NULOM SE NE DIJELI!**

Ali pazi! Ne smiješ miješati $0 : a$ i $a : 0$!

$0 : 8 = 0$, ali ~~$8 : 0 =$~~ **s nulom se ne dijeli**

$0 : a = 0$, ali ~~$a : 0 =$~~ **s nulom se ne dijeli**

Zapišimo

$3 : 0 = ?$

jer je $0 \cdot ? = 3$.

Zapitajmo se koji broj treba doći umjesto znaka "?" da bi vrijedilo

$0 \cdot ? = 3$. No već do-bro poznajemo svojstva mno-ženja prirodnih brojeva, pa će-mo lako zaključiti da ako nepoznati

broj ? množimo s 0, rezultat mora biti 0, a ne 3.

To znači da zadatak $3 : 0 = ?$ nije moguće riješi-ti. Isto vrijedi i za ostala dijeljenja prirodnih brojeva s nulom, npr. $5 : 0$, $18 : 0$, $4 : 0$, $1775 : 0$ itd. Iz istog razloga kao i kod $3 : 0$ sva ta dije-ljenja s nulom nije moguće riješiti, pa kažemo: **s nulom se ne dijeli**.



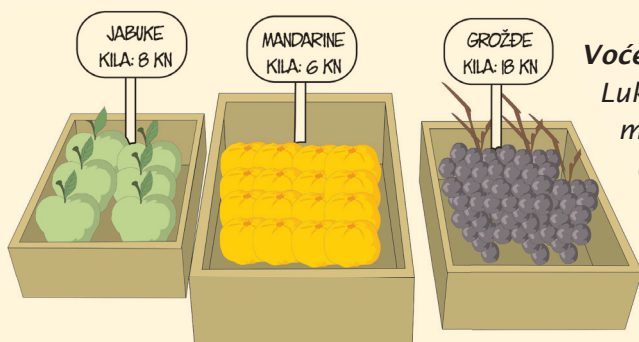
Zadaci

1. Što znači da komutativnost ne vrijedi za dijeljenje prirodnih brojeva?
2. Što znači da asocijativnost ne vrijedi za dijeljenje prirodnih brojeva?
3. Koliko je $a : 0$? Koliko je $0 : a$?
4. Stavi zagrade na različita mjesta i uvjeri se da ne vrijedi asocijativnost za dijeljenje:
 - a) $48 : (6 : 2) = , (48 : 6) : 2 = ;$
 - b) $35 : 5 : 7;$
 - c) $100 : 2 : 2;$
 - d) $64 : 8 : 2.$
5. Izračunaj:
 - a) $9 : 0, 0 : 5, 12 : 0, 0 : 144, 0 : 13, 25 : 0, 44 : 0, 0 : 100;$
 - b) $0 : 5, 0 : 0, 1 : 0, 0 : 9, 410 : 0, 0 : 64, 0 : 31\ 875\ 000.$
6. Izračunaj:
 - a) $4 : 4, 23 : 23, 12 : 12, 45 : 45;$
 - b) $183 : 183, 2\ 000\ 000 : 2\ 000\ 000, 0 : 0, 1 : 1.$
7. Izračunaj:
 - a) $5 \cdot 5, 5 \cdot 1, 5 : 1, 0 \cdot 5, 5 \cdot 0, 5 : 0, 8 \cdot 0;$
 - b) $0 \cdot 0, 0 \cdot 13, 5 \cdot 1, 5 : 1, 1 \cdot 5, 1 : 5;$
- c) $8 : 8, 213 : 213, 213 \cdot 213, 9 : 1, 0 : 9, 9 : 9, 9 \cdot 9;$
- d) $0 \cdot 9, 612 : 3, 612 \cdot 3, 612 : 612, 612 \cdot 612, 612 : 1;$
- e) $1 \cdot 612, 612 \cdot 1, 612 \cdot 0, 0 : 612, 0 \cdot 612.$
8. Prekriži zadatke u kojima se dijeli s nulom, a ostale riješi:
 - a) $12 : 0, 0 : 12, 43 : 0, 213 : 0, 15 : 0, 0 : 9, 4 : 0, 0 : 56;$
 - b) $0 : 0, 0 : 23, 11 : 0, 0 : 11, 4 : 0, 0 : 7, 14 : 0, 0 : 2, 55 : 0;$
 - c) $89 : 0, 0 : 41, 0 : 27, 9 : 0, 0 : 1, 0 : 3, 3 : 0, 100 : 0.$
9. Izračunaj :
 - a) $15 - 15, 0 - 0, 0 + 0, 1 : 1, 1 \cdot 0, 0 + 1, 1 : 0;$
 - b) $8 \cdot 0, 8 - 0, 0 \cdot 8, 8 : 0, 0 + 27, 55 - 55, 55 : 55;$
 - c) $23 \cdot 0, 5 + 0, 6 - 6, 33 \cdot 0, 0 + 12, 12 + 0, 4 : 4;$
 - d) $4 : 1, 0 \cdot 4, 4 - 0, 23 - 0, 23 + 0, 23 \cdot 0, 0 : 23.$

Vježbalica

1. Izračunaj:
 - a) $560 : 7;$ b) $450 : 5;$ c) $120 : 4;$ d) $3600 : 6.$
2. Izračunaj:
 - a) $3328 : 13;$ b) $2608 : 8;$ c) $5016 : 11;$ d) $10248 : 12;$ e) $3552 : 4;$ f) $3395 : 7;$ g) $7952 : 14;$ h) $131805 : 15;$ i) $47088 : 6;$ j) $79893 : 9;$ k) $9396 : 18.$
3. Umjesto kvadratića upiši točan broj:
 - a) $360 : \square = 8;$ b) $6345 : 9 = \square;$ c) $\square : 145 = 15;$ d) $3732 : \square = 4;$ e) $\square : 3 = 432;$ f) $125 : \square = 5;$ g) $2712 : \square = 6;$ h) $\square : 16 = 101.$
4. Koji je broj 12 puta manji od broja 540?
5. Koji je broj duplo manji od 1278?
6. Koji broj je 17 puta manji od broja 442?
7. Koji broj je 9 puta manji od broja 1107?
8. Koji broj je trostruko manji od 3327?
9. Koji broj je za 3 manji od 3327?
10. Koji je broj 16 puta veći od 32?
11. Koji je broj za 16 veći od 306?
12. Opseg jednakostraničnog trokuta je 453 cm. Kolika je duljina jedne stranice tog trokuta?
13. Opseg kvadrata je 224 cm. Kolika je duljina jedna stranice tog kvadrata?
14. Izračunaj i provjeri rezultat:
 - a) $714 : 12;$ b) $3517 : 8;$ c) $316 : 13;$ d) $6197 : 5;$ e) $2177 : 11;$ f) $45354 : 7;$ g) $334545 : 15.$
15. Kakav će biti ostatak ako 546 dijelimo s 12?
16. Kakav će biti ostatak ako 342 broj dijelimo s 10?
17. Mama je spremala zimnicu. U svaku teglicu stavila je po 7 ukiseljenih paprika. Koliko je teglica trebala ako je kupila ukupno 221 komada paprika? Koliko paprika joj je ostalo za zadnju teglicu?
18. Procijeni, izračunaj i provjeri rezultat:
 - a) $8214 : 22;$ b) $4133 : 92;$ c) $21546 : 19;$ d) $45367 : 54.$
19. Izračunaj:
 - a) $0 : 5;$ b) $34 : 1;$ c) $2355 : 2355;$ d) $557 \cdot 1;$ e) $4565 : 1;$ f) $0 \cdot 567;$ g) $4577 \cdot 0;$ h) $4535 : 0;$ i) $238 - 0;$ j) $0 + 678;$ k) $2355 - 2355.$

1.14. Povezivanje računskih operacija



Voće je zdravo

Lukina mama je u voćarni kupila 2 kg jabuka, 3 kg mandarina i 1 kilogram grožđa.

- Koliko je kilograma voća ukupno kupila?
- U novčaniku je prije kupovine imala 65 kn. Koliko joj je novaca ostalo nakon kupovine voća?
- Je li joj ostalo dosta novca da Luki kupi sladoled od 7 kn i sebi novine od 6 kn?

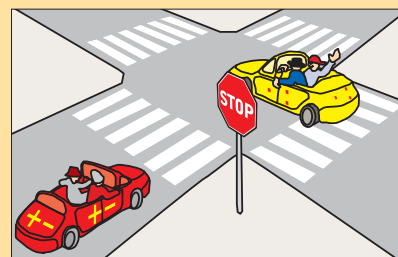
Računska operacija ili računski radnja

U složenijim zadacima s više računskih operacija moramo obratiti pozornost kojim redoslijedom rješavamo ove operacije. Ako postoji zagrada, prvo računamo izraz u zagradi. Od računskih operacija prije rješavamo množenje i dijeljenje, a zatim zbrajamo i oduzimamo.

Za zadatke u kojima računamo s prirodnim brojevima vrijedi uobičajeni redoslijed izvršavanja računskih operacija: **najprije množimo i dijelimo, pa zatim zbrajamo i oduzimamo**. Ako u zadatku postoje zagrade **najprije treba izračunati vrijednost izraza u zagradi**.

Objasni:

- ()
- , :
- + , -



Primjer 1. Redoslijed računskih operacija

Pogledaj ilustraciju. Tko je u pravu?

Rješenje:

Zapišimo zadatak iz zadaće: $2 + 2 \cdot 2$. Sada je jasnije da se prvo treba **množiti** pa onda zbrajati.

$$2 + 2 \cdot 2 = 2 + 4 = 6$$

To znači da je otac točno odgovorio na pitanje.

Zadaci

1. Izračunaj:

- $3 + 5 \cdot 6$, $8 \cdot 4 + 12$, $4 + 4 \cdot 6$, $4 \cdot 4 + 6$, $12 + 3 \cdot 7$;
- $5 - 12 : 3$, $16 : 4 + 8$, $25 + 25 : 5$, $1 + 1 \cdot 1$, $1 \cdot 1 + 9$;
- $20 - 4 \cdot 5$, $16 + 2 \cdot 1$, $27 - 5 \cdot 4$, $32 - 8 \cdot 3$, $80 - 5 \cdot 9$, $5 + 27 : 9$;
- $14 + 0 \cdot 8$, $13 - 13 : 13$, $62 + 25 : 5$, $31 - 7 \cdot 4$, $14 : 7 + 28$, $6 + 24 : 12$.

2. Izračunaj napamet:

- $8 \cdot 4 + 7$, $12 - 6 \cdot 2$, $0 + 18 : 6$, $72 : 9 + 9$, $56 - 6 \cdot 9$;
- $7 \cdot 7 - 47$, $22 - 2 \cdot 10$, $33 + 1 \cdot 0$, $25 - 42 : 6$, $64 - 8 \cdot 6$.

3. Izračunaj:

- $25 + 13 \cdot 13$, $121 : 11 + 16 \cdot 45$, $267 : 3 - 16 \cdot 5$;

- b) $12 \cdot 85 + 90 : 45 : 9 - 3$,
 $200 : 4 + 15 \cdot 47 - 145 : 5$;
 c) $10 + 1160 : 145 - 24 : 6$,
 $4056 : 6 + 11 + 16 : 4$;
 d) $35 \cdot 58 + 58 \cdot 35 - 144 : 12$,
 $5 + 5 \cdot 13 + 18 \cdot 7 + 600 : 12$,
 $200 - 100 : 4 + 13 \cdot 7$.
4. Maja je za proslavu rođendana pripremila 3 boce od 2 litre Coca Cole, 2 boce od 2 litre Fante, četiri litre soka od jabuka i 2 litre soka od višanja. Koliko je ukupno litara pripremila za proslavu?
5. Majina mama je u mesnici kupila 2 kg svinjetine, 2 kg mljevenog mesa i 1 kg teletine.
 a) Koliko je kilograma mesa ukupno kupila?
 b) Koliko je novaca potrošila ako 1 kg svinjetine stoji 55 kn, 1 kg mljevenog mesa 44 kn, a 1 kg teletine 76 kn?
6. Umjesto kvadratića stavi znak +, -, · ili : tako da jednakost bude točna. Znakovi se smiju ponavljati u istom retku.
 $4 \square 4 \square 4 = 12$
 $4 \square 4 \square 4 = 64$
 $4 \square 4 \square 4 = 4$
7. Izračunaj:
 a) $1 + 2 \cdot 3 + 4 : 2$; b) $(1 + 2) \cdot 3 + 4 : 2$;
 c) $1 + 2 \cdot (3 + 4) : 2$; d) $1 + (2 \cdot 3 + 4) : 2$;
 e) $(1 + 2) \cdot (3 + 4) : 2$.
8. Izračunaj:
 a) $7 + 7 \cdot 7 - 7 : 7$; b) $7 + 7 \cdot (7 - 7) : 7$;
 c) $(7 + 7) \cdot 7 - 7 : 7$; d) $(7 + 7) \cdot (7 - 7) : 7$;
 e) $7 + (7 \cdot 7 - 7) : 7$; f) $7 + 7 \cdot (7 - 7) : 7$;
 g) $(7 + 7 \cdot 7 - 7) : 7$.
9. Luka je za zadaću prepisao zadatak s ploče:
 $(15 + 15 : 3 - 1 =$
 Ali, zaboravio je zatvoriti zagradu! Zatvori zagradu na različitim mjestima i nađi koja sve rješenja možeš dobiti.
10. Izračunaj:
 $(6014 + 4605) : 41 - 8 \cdot (703 : 19 - 18) + (2 \cdot 967 - 166) : 8 =$
11. Zbroju brojeva 14 i 122 dodaj 13.
12. Od zbroja brojeva 12 i 10 oduzmi 6.
13. Zbroj brojeva 15 i 25 podijeli sa 4.
14. Količniku brojeva 15 i 5 dodaj količnik brojeva 16 i 4.
15. Koliki je umnožak razlike brojeva 15 i 12 i razlike brojeva 25 i 13?
16. Postavi zagrade tako da dobiješ traženi rezultat:
 a) $4 + 4 \cdot 4 - 4 = 4$; b) $4 + 4 \cdot 4 - 4 = 28$;
 c) $4 + 4 \cdot 4 - 4 = 16$; d) $4 + 4 \cdot 4 - 4 = 0$.
17. Djeca iz vrtića spremaju se na izlet s roditeljima i tetama. Na izlet ide 26 odraslih i 28 djece i svi plaćaju jednaku cijenu. Za autobus trebaju platiti 1620 kuna. Koliko kuna treba svatko dati za autobus?



Primjer 2. Zadaci sa zagradama

Izračunaj:

- a) $(2 + 2) \cdot 2$; b) $13 + (16 : 4 - 3) + 12 : 2$;

Rješenje:

- a) U ovom se zadatku nalaze isti brojevi i računske operacije kao i u Primjeru 1. Ipak, nije sve isto jer je $2 + 2$ u zagradi. To znači da prvo treba izračunati zbroj, a tek onda umnožak. Ako u zadatku postoje zagrade, najprije izračunavamo izraz u njima.
 $(2 + 2) \cdot 2 = 4 \cdot 2 = 8$
- b) U ovom složenijem zadatku prvo treba izračunati izraz u zagradi. Ostale dijelove zadatka strpljivo prepisujemo.
 $13 + (16 : 4 - 3) + 12 : 2 = 13 + (4 - 3) + 12 : 2 =$
 $= 13 + 1 + 12 : 2 = 13 + 1 + 6 = 20$.

$$16 : 4 \cdot 2 \cdot 2 : 1 = 4 \cdot 2 \cdot 2 : 1 =$$

$$8 \cdot 2 : 1 = 16 : 1 = 16$$

Izračunaj:

$$12 : 3 \cdot 8 = \quad 12 \cdot 6 : 2 : 2 =$$

$$14 : 7 \cdot 6 = \quad 64 : 2 : 2 : 2 : 2 : 2 =$$



Redoslijed računskih operacija na džepnom računalu

Džepno računalo slijedi ista pravila za redoslijed računskih operacija.

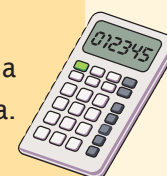
Izračunajmo:

- a) $1 + 2 \cdot 3$; b) $(1 + 2) \cdot 3$.

Za a) zadatak trebamo redom pritisnuti ove tipke: $1 \quad + \quad 2 \quad \times \quad 3 \quad =$. Rezultat je 7.

Za b) zadatak trebamo redom pritisnuti ove tipke: $(\quad 1 \quad + \quad 2 \quad) \quad \times \quad 3 \quad =$. Rezultat je 9.

Rezultati u ta dva zadatka su različiti jer je umetanje zgrade promijenilo redoslijed izvršavanja računskih operacija.



()
zgrade

Zadaci



18. Prošli tjedan 5.c razred se fotografirao. Velika slika stoji 15 kn, a manji format 12 kn. Razredni blagajnik je zapisao želje razreda :
17 učenika – mala slika
14 učenika – velika slika
a) Koliko ukupno novaca treba sakupiti blagajnik?
b) Koliko učenika ima u razredu ako se zna da su 2 učenika naručila oba formata, a 3 učenika nisu naručila sliku?



19. Izračunaj:
 $(912 - 28\,905 : 47) \cdot 13 +$
 $+ (1702 + 560) : 29 - (2018 + 2 \cdot 2015) : 48.$



20. Izračunaj:
a) $5 + [4 \cdot (2 + 8 : 4) - 1]$;
b) $[12 : (11 - 20 : 2) + 7] + 9 \cdot 3$;
c) $7 \cdot 4 + [(36 : 6 + 14) - 81 : 9] : 11.$

21. Izračunaj :
a) $\{2 + [4 \cdot (36 - 4 \cdot 8) - 1] : 3\} - 7 =$
b) $6 + \{5 \cdot [10 - (1 + 2 \cdot 3)]\} : 5;$
c) $50 - \{100 : [(25 - 1) : 8 + 7] + 14 + 4 \cdot 4\}.$

Vježbalica

1. Izračunaj:

a) $17 + 3 \cdot 12$; b) $115 - 132 : 3$;
c) $2316 : 4 + 28$; c) $120 - 4 \cdot 5 - 16 + 2 \cdot 1$;
d) $1114 + 0 \cdot 8 - 113 - 39 : 13 + 62 + 125 : 5.$

2. Izračunaj:

a) $1 + 2 \cdot 13 + 24 : 2$; b) $(1 + 2) \cdot 13 + 24 : 2$;
c) $1 + 2 \cdot (13 + 24) : 2$; d) $1 + (2 \cdot 13 + 24) : 2$;
e) $(1 + 2) \cdot (13 + 24) : 3.$

3. Izračunaj:

a) $17 + 3 \cdot 5 - 27 : 9$; b) $27 + 5 \cdot (50 - 36) : 7$;
c) $(34 + 75) \cdot 7 - 17 : 17$; d) $(47 + 7) \cdot (8 - 8) : 7$;
e) $32 + (15 \cdot 7 - 7) : 7$; f) $85 + 11 \cdot (15 - 9 : 9)$;
g) $(10 + 10 \cdot 11 - 11) : 109.$

4. Izračunaj:

a) $18 \cdot 4 + 7 - 12 - 16 \cdot 2 - 0 + 318 : 6$;
b) $7 \cdot 7 - 47 + 22 - 120 : 10$;
c) $112 + 1863 : 9 + 81 - 0 : 9 + 12 + 12 : 4$;
d) $0 \cdot 5 + 10 - 90 : 9 + 10 + 16 : 8 + 12 - 27 : 9 + 9$;
e) $0 + 12 : 2 + 11 - 15 : 3 - 18 : 2 + 111 - 45 + 19 : 19.$

5. Izračunaj:

a) $125 + 13 \cdot 3 - 121 : 11 + 6 \cdot 45 - 267 : 3 + 16 \cdot 5$;
b) $12 \cdot 85 + 900 - 45 : 9 - 3 - 200 : 4 - 15 \cdot 47 - 145 : 5 - 28$;
c) $40 + 1160 : 145 - 24 : 6 + 4056 : 6 + 11 + 16 : 4$;
d) $35 \cdot 8 - 58 \cdot 3 - 144 : 12 + 5 \cdot 13 + 18 \cdot 7 - 600 : 12.$

6. Izračunaj :

a) $(35426 + 25687) : 39 - (1345 - 1344) \cdot (703 : 19 + 530) + (3 \cdot 456 - 368) : 8$;
b) $(288 - 9758 : 34) \cdot 13 + (584 + 8000) : 29 - (352 + 5 \cdot 16) : 48.$

7. Zbroju brojeva 221 i 122 dodaj 13.

8. Od zbroja brojeva 128 i 120 oduzmi 6.

9. Zbroj brojeva 450 i 42 podijeli sa 4.

10. Količniku brojeva 615 i 15 dodaj količnik brojeva 216 i 4.

11. Od umnoška brojeva 207 i 9 oduzmi njihov kvocijent.

12. Umnožak dvije sedmice pribroji količniku brojeva 171 i 9.

13. Kolika je razlika između umnoška brojeva 115 i 5 i umnoška brojeva 114 i 4?

14. Koliki je umnožak razlike brojeva 35 i 12 i razlike brojeva 25 i 13?

15. Izračunaj:

a) $25 + [14 \cdot (23 + 28 : 4) - 11]$;
b) $[112 : (111 - 220 : 2) + 27] + 19 \cdot 3$;
c) $17 \cdot 4 + [(336 : 6 + 14) - 81 : 9] : 61 + 1$;
d) $224 - [174 : (14 + 22 \cdot 2) - 36] + 25 : 5 - 1$

16. Izračunaj:

a) $75 + [44 \cdot (22 + 88 : 4) - 11]$;
b) $[132 : (101 - 200 : 2) + 37] + 69 \cdot 3 + 4$;
c) $7 \cdot 14 + [(6 : 6 + 114) - 801 : 9] : 13$;
d) $1231 - [1580 : (14 + 12 \cdot 12) - 10] + 2155 : 5.$

17. Izračunaj:

a) $50 + [40 \cdot (20 + 80 : 5) - 10]$;
b) $[806 : (116 - 648 : 12) + 7] - 17 \cdot 3$;
c) $37 \cdot 4 + [(656 : 16 + 14) - 441 : 9] : 6 + 1$;
d) $524 - [984 : (64 + 22 \cdot 12) - 1] + 154 : 7.$

18. Izračunaj :

- a) $\{12 + [4 \cdot (306 - 4 \cdot 18) - 12 \cdot 3] : 3\} - 7$;
b) $60 + \{50 \cdot [80 - (11 + 20 \cdot 3)]\} : 5$;
c) $35 - \{116 : [(205 - 1) : 4 + 7] + 14 + 4 \cdot 4\}$.

19. Izračunaj :

- a) $\{21 + [8 \cdot (765 - 94 \cdot 8) - 2] : 3\} - 7 \cdot 5$;
b) $17 + \{15 \cdot [170 - (11 + 12 \cdot 13)]\} : 15$;
c) $5 \cdot 30 - \{1320 : [(285 - 11) : 137 + 8] + 14 + 64 : 16\}$

20. Izračunaj :

- a) $\{23 + [43 \cdot (360 - 43 \cdot 8) - 13] : 3\} : 31$;
b) $62 + \{52 \cdot [102 - (12 + 22 \cdot 3)]\} : (3 \cdot 100 + 6 \cdot 2)$;
c) $578 - \{1050 : [(255 - 71) : 8 + 7] + 5 \cdot 25 + 7 \cdot 4\} + 10$.

1.15. Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje:

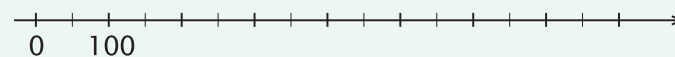
- Navedi prvih 10 prirodnih brojeva.
- Navedi neke prirodne brojeve.
- Je li 0 prirodan broj?
- Kako označavamo skup prirodnih brojeva?
- Kakav je to skup N_0 ?
- Navedi prvih 10 parnih prirodnih brojeva.
- Navedi neke troznamenkaste neparne prirodne brojeve.
- Pročitaj: 4086, 560 222.
- Koji je najmanji prirodni broj?
- Koji je najveći neparan prirodni broj?
- Koji je najmanji paran prirodni broj?
- Pročitaj: >
- Pročitaj: <
- Koji je prethodnik broja 675?

- Koji je sljedbenik broja 99 999?
- Napiši jedan primjer zbrajanja u N i zapiši imena operanada.
- Napiši jedan primjer oduzimanja u N i zapiši imena operanada.
- Napiši jedan primjer množenja u N i zapiši imena operanada.
- Napiši jedan primjer dijeljenja u N i zapiši imena operanada.
- Koja svojstva zbrajanja poznaješ?
- Koja svojstva množenja poznaješ?
- Kako glasi svojstvo distributivnosti?
- Za koje računske operacije vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti?
- Za koje računske operacije ne vrijede svojstva komutativnosti i asocijativnosti?
- Koliko je a) $6 : 0$; b) $6 - 0$; c) $6 \cdot 0$; d) $0 : 6$?

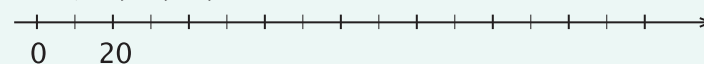
Zadaci za ponavljanje:

- Odredi najveći paran šesteroznamenkasti broj.
- Odredi najmanji i najveći četveroznamenkasti broj koji ima sve znamenke različite.
- Koliki je zbroj znamenaka broja 259?
- Nađi sve brojeve kojima je zbroj znamenaka 6:
a) dvoznamenkaste; b) troznamenkaste.
- Stranice trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Kolika je duljina svake stranice, ako je najdulja stranica duga 78 cm?
- Stranice trokuta su uzastopni neparni brojevi. Kolika je duljina svake stranice, ako je najkraća stranica duga 55 cm?
- Na brojevnom pravcu s jediničnom dužinom duljine 1 cm prikaži brojeve: 2, 5 i 3.
- Na pravcu nađi sljedeće brojeve:

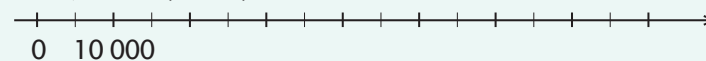
a) 200, 350, 500



b) 10, 80, 45, 60



c) 20 000, 5000, 65 000.



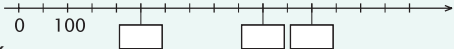
- U prazan kvadratić stavi jedan od znakova >, < ili =.
 $2 \square 27$, $48 \square 44$, $5 \square 55$, $23 \square 23$, $0 \square 12$,
 $34 \square 26$, $32 \square 302$, $44 \square 444$.
- Poredaj brojeve 807, 401, 112, 737, 411, 9, 821, 63, 479, 402 po veličini, počevši od najmanjeg.

11. Na brojevnom pravcu odredi brojeve x takve da je $x < 7$.
12. Pronađi brojeve x takve da je $45 < x < 60$, ako je x neparan broj.
13. Zaokruži brojeve 405, 311, 709, 5622, 1398, 2680, 45 511, 566, 1006, 3255.
a) na desetice; b) na stotice; c) na najveću mjesnu vrijednost.
14. Izračunaj:
a) $504 + 244$; b) $3127 + 6090$; c) $4022 + 101$;
d) $843 + 2911$; e) $1669 + 13$; f) $5133 + 20\ 008$.
15. Izračunaj:
a) $7124 - 54$; b) $3007 - 90$; c) $522 - 101$;
d) $311 - 289$; e) $4669 - 2033$; f) $5133 - 208$.
16. Maja je složila puzzle-sliku za 34 minute. Luki je za istu sliku trebalo 13 minuta više, a Matiji 9 minuta manje od Maje. Za koliko vremena su Luka i Matija složili sliku?
17. Izračunaj:
a) $210 + 615 + 90 + 33 - 215$;
b) $42 + 71 + (23 + 65) - 6$;
c) $42 + 71 - (23 + 65) + 13$;
d) $(56 + 109) - (14 + 62)$;
e) $215 - (100 - 42) + (13 + 13)$;
f) $77 - (7 + 7 + 7 - 7) + 7$.
18. Stranice trokuta su tri uzastopna broja. Izračunaj mu opseg, ako je najdulja stranica duga 212 cm.
19. Izračunaj:
a) $14 \cdot 6$; b) $144 \cdot 3$; c) $5 \cdot 487$; d) $46 \cdot 91$;
e) $288 \cdot 17$; f) $5177 \cdot 25$.
20. Izračunaj:
a) $56 : 8$; b) $234 : 9$; c) $10\ 200 : 3$;

- d) 2025 : 45; e) 6273 : 17; f) 267 575 : 973.
21. Koliki je ostatak pri dijeljenju:
a) $211 : 7$; b) $409 : 10$; c) $5980 : 15$;
d) $6099 : 21$; e) $9122 : 39$; f) $1045 : 783$.
22. Ana, Maja, Petar i Luka išli su na sladoled. Svaki je uzeo dvije kuglice sladoleda. Kuglica sladoleda stoji 4 kune. Koliko su kuna prijatelji ukupno morali dati za sladoled?
23. Koliko minuta ima u mjesecu veljači
a) kad je godina prijestupna;
b) kad godina nije prijestupna?
24. Majina obitelj svakog dana kupuje 2 kruha. Cijena jednog kruha je 5 kn. Koliko novaca Majina obitelj troši na kruh
a) tjedno;
b) u mjesecu siječnju?
25. Razred od 32 učenika treba podijeliti u 4 jednake grupe učenika. Koliko učenika će biti u svakoj grupi?
26. Najveća pustinja na svijetu, Sahara u sjevernoj Africi, ima površinu od 9 000 000 km². Koliko puta je ta pustinja veća od površine Hrvatske, koja je 60 000 km²?
27. Izračunaj:
a) $20 - 18 : 2$; b) $14 + 14 \cdot 3 + 1 \cdot 5$;
c) $8 \cdot 15 - 4 \cdot 11 + 6$; d) $405 - 5 \cdot 10 + 16$.
28. Izračunaj:
a) $17 + 2 \cdot (45 - 15 : 3) + 1$;
b) $10 + (2 \cdot 25 - 50) : (56 + 71)$;
c) $19 : (14 + 80 - 5 \cdot 15) + 20 - 10 : 10$;
d) $35 + [64 \cdot (72 + 48 : 4) - 1]$;
e) $204 - [64 : (4 + 2 \cdot 2) - 6] + 255 : 5$;
f) $6 + \{5 \cdot [10 - (1 + 2 \cdot 3) + 7] - 0\} : 5$.



Primjerak oglednog testa:

- Usporedi: $45 \square 1$; $12 \square 13$;
 $880 \square 880$; $0 \square 5001$.
- Izračunaj:
a) $5600 + 7200$; b) $3276 + 5780$;
c) $216 - 72$; d) $4051 - 977$.
- Izračunaj:
a) $7 \cdot 6125$; b) $215 \cdot 16$;
c) $42\,282 : 9$; d) $22\,932 : 52$.
- Stranice trokuta su uzastopni prirodni brojevi. Kolika je duljina svake stranice, ako je srednja stranica duga 34 cm?
- U zadani pravokutnik stavi odgovarajuće prirodne brojeve:

- Koliki je ostatak pri dijeljenju $3785 : 36$?

- Tri računa su točna. Zaokruži ih:
a) $12 + 8 : 4 - 3 = 2$; b) $12 : 8 : 4 - 3 = 11$;
c) $16 - 2 \cdot (15 - 9) = 4$; d) $70 - 2 \cdot (7 + 18) = 1700$;
e) $2 + 2 \cdot (2 + 2 : 2) - 2 = 10$;
f) $8 \cdot 25 \cdot 60 : 4 + 1 = 48\,001$.
- Na jednoj farmi uzgajaju se 234 ovce i 715 koza.
a) Zaokruži ove brojeve na desetice;
b) Zaokruži ove brojeve na stotice;
c) Koliko je ukupno koza i ovaca na farmi?
- Luka, Matija i Marin sakupljaju sličice. Luka ima 153 sličice, Marin ima 49 sličica više od Luke, a Matija ima 15 sličica manje od Marina i Luke zajedno. Koliko sličica ima Matija?
- Maja je cijelu prošlu godinu štedjela po 45 kn mjesečno jer želi kupiti bicikl koji stoji 730 kn. Za rođendan je od djeda dobila 200 kn, pa je i nj ih stavila u uštedevinu. Je li na kraju godine imala dovoljno novca da kupi bicikl?
- Za koliko je zbroj prethodnika i sljedbenika broja 34 170 veći od umnoška brojeva 209 i 67?

Igre s prirodnim brojevima

1. Igra kockama: Broj 7

- igra za 2 i više igrača
 - svaki igrač baca tri igraće kocke odjednom.
- Od brojeva koje je dobio pokušava dobiti broj 7 pomoću 4 osnovne računske operacije
- igrači svoje kombinacije upisuju u tablicu:

Matija	Luka	Maja
$4 + 6 : 2 = 4 + 3 = 7$	$5 + 5 - 1 = 9$	$1 + 1 + 3 = 5$

- Bodovi se zbrajaju na kraju: ako je rezultat 7, dobije se 0 bodova; za 6 i 8 dobije se 1 bod, za 5 i 9 dobiju se 2 boda itd. Pobjednik je igrač s najmanje bodova

2. Igra kartama za Uno: Broj 24

Igra se na isti način kao „Igra kockama: broj 7“, samo se izvlače Uno karte (mogu i obične) i pomoću 4 računske operacije treba dobiti broj 24. Igrač izvlači karata koliko želi i sam kaže: „stop“ kada smatra da ima dovoljno karata s kojima se može dobiti 24 (ili njemu što bliži broj). Zapisuje se i boduje na isti način kao i gornja igra.

Riješi i zabavi se!

- Postavi zagrade tako da dobiješ traženi rezultat:

- $16 : 4 + 4 - 2 = 0$;
- $5 + 13 : 1 - 5 = 13$;
- $5 + 15 \cdot 4 = 80$;
- $14 : 2 \cdot 1 + 5 = 42$;
- $16 - 12 : 4 + 3 : 3 = 2$;
- $100 : 10 \cdot 10 + 100 = 101$.

- Zbroji najveći četveroznamenkasti broj koji je sastavljen od znamenaka 4, 3, 0 i 9 s najmanjim peteroznamenkastim brojem koji je sastavljen od znamenaka 4, 7, 3, 2, 2.



- U tablici se nalaze podaci o broju stanovnika nekih naših gradova po popisu stanovnika iz 2001. godine:

Grad	Broj stanovnika
Zagreb	779 145
Split	188 694
Rijeka	144 043
Osijek	114 616
Zadar	72 718
Slavonski Brod	64 612
Pula	58 594

- Ima li Split više stanovnika od Osijeka i Zadra zajedno?
- Ima li Rijeka više stanovnika od Osijeka i Zadra zajedno?

- Ima li Zagreb više stanovnika od ostalih danih gradova zajedno?

- Ispuni ovu brojčanu križaljku:

VODORAVNO →:

- $3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$;
- $4 \cdot 307 \cdot 25$;
- $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;
- $125 \cdot 8 \cdot 4$.

OKOMITO ↓:

- $16 \cdot 16 \cdot 32 \cdot 2$;
- $25 \cdot 5 \cdot 4$;
- $139 \cdot 18 \cdot 3$;
- $2 \cdot 45 \cdot 5 \cdot 9$;
- $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$.



1	2			3
			4	
5		6		
		7		
8				

- Četiri četvorke

Znaš li da se pomoću 4 četvorke i osnovnih računskih operacija mogu zapisati sve znamenke:

$$\begin{array}{ll}
 0 = 44 - 44 \text{ ili} & 5 = \\
 0 = 4 - 4 + 4 - 4 & 6 = \\
 1 = 44 : 44 & 7 = \\
 2 = 4 : 4 + 4 : 4 & 8 = \\
 3 = & 9 = \\
 4 = &
 \end{array}$$

- Umjesto kvadratića stavi znak +, -, · ili : tako da jednakost bude točna. U svakom retku trebaju biti upotrijebljene sve četiri računske operacije.

$$\begin{array}{l}
 12 \square 4 \square 2 \square 1 \square 3 = 2 \\
 12 \square 4 \square 2 \square 1 \square 3 = 49 \\
 12 \square 4 \square 2 \square 1 \square 3 = 47 \\
 12 \square 4 \square 2 \square 1 \square 3 = 13 \\
 12 \square 4 \square 2 \square 1 \square 3 = 11
 \end{array}$$

Djeljivost prirodnih brojeva

Važni pojmovi

višeputnik
djelitelj
djeljivost zbroja
djeljivost
umnoška
prost broj
složen broj
relativno prosti
brojevi
najveći zajednički
djelitelj
najmanji
zajednički
višeputnik
parni brojevi

U prošlom poglavlju smo naučili da ostaci pri dijeljenju s prirodnim brojevima mogu biti razni. Tako ostatak pri dijeljenju s 2 može biti 0 ili 1. Ostatak pri dijeljenju s 3 može biti 0, 1, ili 2. Ostatak pri dijeljenju sa 4 može biti 0, 1, 2, ili 3. I tako dalje. Ostatak pri dijeljenju s nekim brojem n može biti 0, 1, 2, 3, ..., $n - 1$.

Matematičarima je od posebnog značenja bilo promatrati dijeljenja u kojima je ostatak 0. Tada kažemo da se radi o dijeljenju bez ostatka. Upravo o ovom slučaju bit će riječi u poglavlju Djeljivost prirodnih brojeva.

Primjeri dijeljenja bez ostatka:

$$8 : 2 = 4$$

$$30 : 6 = 5$$

$$72 : 8 = 9$$

HMMM... KAŽEŠ:
"BEZ RAČUNANJA".
OVO MI SE SVIĐA.



U ovom poglavlju ćeš, primjerice, naučiti:

- Kako bez dijeljenja saznati je li broj 4 382 380 djeljiv s 9;
- Kako bez množenja saznati je li umnožak $12 \cdot 35 \cdot 81 \cdot 13$ djeljiv sa 4;
- Kako bez zbrajanja saznati je li zbroj $23 \cdot 49 + 14 \cdot 101 + 33 \cdot 28$ djeljiv sa 7;
- Kako bez računanja saznati je li broj 56 788 331 djeljiv sa 3;
- Kako bez računanja saznati je li broj 308 771 375 djeljiv sa 2.

I još mnogo toga što će ti olakšati računanje.



Kratki zadaci za ponavljanje

1. Koji od ovih brojeva su parni brojevi:
6, 23, 45, 890, 89, 236, 100, 43, 111, 88?
2. Koji od ovih brojeva se mogu podijeliti s 5 bez ostatka:
12, 55, 81, 80, 100, 346, 4450, 2000, 13?
3. Kako ćeš bez dijeljenja znati može li se neki broj podijeliti s 10 bez ostatka?
4. Kako ćeš bez dijeljenja znati može li se neki broj podijeliti sa 100 bez ostatka?
5. Koji od ovih brojeva su djeljivi sa 3:
100, 36, 11, 15, 27, 270, 36 000, 56, 91?
6. Koji od ovih brojeva se mogu podijeliti s 9 bez ostatka:
45, 1, 80, 9, 81, 810, 64, 18, 1, 9000?
7. Podijeli i provjeri množenjem:
a) $3699 : 9$; b) $6149 : 5$;
c) $2401 : 49$; d) $7801 : 51$.

2.1. Višekratnici

Vrećice bombona

Luka želi počastiti prijatelje iz svog kluba za rođendan. S mamom kupuje bombone. U jednoj vrećici ima 8 bombona.

a) Nacrtaj takvu vrećicu.

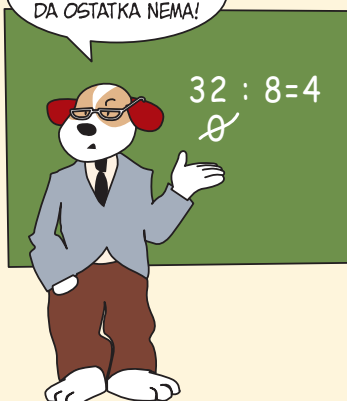
b) Luka trpa vrećice bombona u kolica. Koliko je ukupno bombona uzeo? Dopuni tablicu.

c) Mama kaže Luki: "Ne možeš uzeti toliko vrećica! Vrati ih na policu, dovoljno ti je 40 bombona da počastiš cijeli klub!"

Koliko vrećica treba kupiti Luka?

Broj vrećica	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ukupno bombona	8	16	24												

AKO JE
OSTATAK 0, KAŽEMO
DA OSTATKA NEMA!



Pogledajmo niz brojeva iz desnog stupca tablice: 8, 16, 24, 32, 48, ... Podijelimo li bilo koji od tih brojeva s 8, dobit ćemo **količnik bez ostatka** (ostatak je 0).

Kažemo da su brojevi 8, 16, 24, 32, 40, itd. djeljivi brojem 8. Oni se nazivaju **višekratnicima** broja 8, a broj 8 se naziva njihovim **djeliteljem**.

dijeljenje bez
ostatka

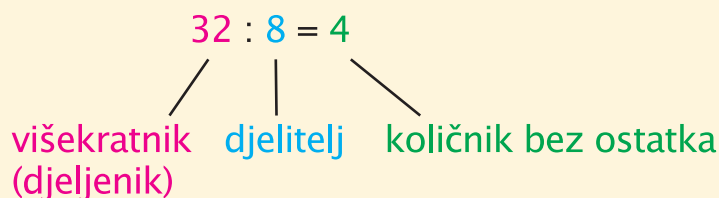
biti djeljiv
višekratnik
djelitelj

12 je djeljiv s 2
18 je djeljiv s 3
50 je djeljiv s 10
90 je djeljiv s 45

12 je višekratnik od 2
18 je višekratnik od 3
50 je višekratnik od 10
90 je višekratnik od 45



Ako je djeljenik prirodan broj, kod dijeljenja u kojem nema ostatka djeljenik nazivamo višekratnikom.



Primjer 1. Koliko ima višekratnika

Koliko višekratnika ima broj 6?

Rješenje:

Navedimo neke višekratnike broja 6. Počevši od najmanjeg, to su 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... Tri točkice iza broja 36 označavaju da višekratnika broja 6 ima još. Pitamo se koliko.

Pogledamo li još jednom niz 6, 12, 18, 24, 30, 36, ... primijetiti ćemo da se svaki sljedeći višekratnik dobiva uvećavanjem za 6. Pokušamo

li pronaći najveći broj djeljiv s 8, ako ga uvećamo za 8 dobit ćemo još veći višekratnik. Kako je skup prirodnih brojeva beskonačan skup, zaključujemo i da višekratnika broja 8 ima beskonačno mnogo.

Višekratnika broja 8 ima beskonačno mnogo. To su 8, 16, 24, 32, ...

Višekratnici broja 2 su: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...

Višekratnici broja 13 su: 13, 26, 39, 52, ...

Višekratnici broja 1 su: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Primjer 2.

Odredi sve brojeve manje od 100 koji su višekratnici od 18.

Rješenje:

Treba odrediti sve višekratnike od 18 koji su manji od 100. To su 18, 36, 54, 72, 90. Sljedeći višekratnik od 18 po redu bio bi 108, a to je broj veći od 100.

Zadaci



Svaki umnožak broja 8 i prirodnog broja bit će višekratnik broja 8.

Na primjer: $8 \cdot 56 = 448$, pa je broj 448 višekratnik broja 8.

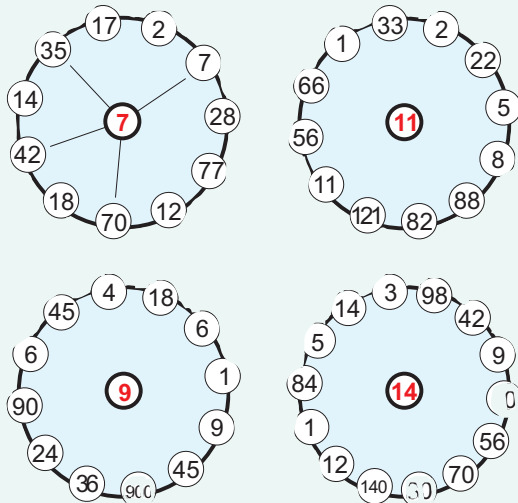
No želimo li provjeriti je li broj 672 višekratnik broja 8, najlakše ćemo to učiniti dijeljenjem $672 : 8 = 84$, bez ostatka, pa 672 jest višekratnik od 8.

1. Dopuni:

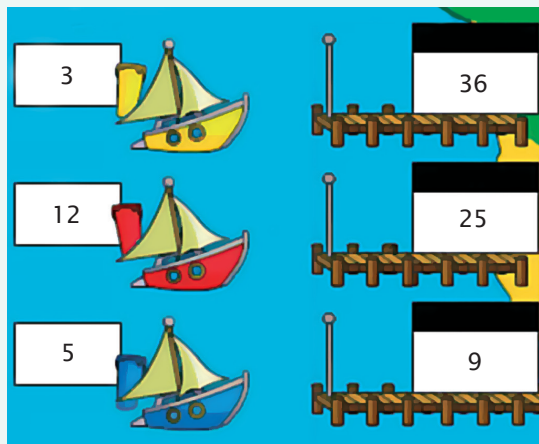
- a) 2, 4, 6, 8, 10, ... su višekratnici brojeva ___ i ___;
b) 6, 12, 24, 36, 48, ... su višekratnici brojeva ___, ___ i ___.

2. Među ovim brojevima zaokruži višekratnike broja 4: 12, 1, 3, 16, 8, 24, 100, 38, 40.
3. Među ovim brojevima zaokruži višekratnike broja 12: 12, 13, 16, 24, 1, 36, 48, 100.
4. Među ovim brojevima prekriži one koji nisu višekratnici broja 10: 1, 2, 5, 10, 100, 101, 290.
5. DA-NE pitalice. Zaokruži točan odgovor:
- | | | |
|-----------------------------------|----|----|
| Broj 4 je višekratnik broja 20. | DA | NE |
| Broj 12 je višekratnik broja 2. | DA | NE |
| Broj 2 je višekratnik broja 12. | DA | NE |
| Broj 16 je višekratnik broja 5. | DA | NE |
| Broj 12 je višekratnik broja 12. | DA | NE |
| Broj 13 je višekratnik broja 7. | DA | NE |
| Broj 23 je višekratnik broja 4. | DA | NE |
| Broj 120 je višekratnik broja 10. | DA | NE |
| Broj 33 je višekratnik broja 11. | DA | NE |
| Broj 11 je višekratnik broja 22. | DA | NE |

6. Poveži broj u sredini s njegovim višekratnicima:



7. Spoji svaki brod s lukama u kojima su njegovi višekratnici:



8. Odredi nekoliko višekratnika broja:
a) 19; b) 40; c) 65; d) 133; e) 871; f) 2009.
9. Zadani su brojevi 54, 19, 35, 27, 48 i 60. Koji od ovih brojeva su višekratnici broja:
a) 3; b) 1; c) 5; d) 10; e) 9; f) 4?
10. Koji broj je najmanji višekratnik od 25?
11. Koji broj je najmanji višekratnik od 144? A koji broj je najveći višekratnik od 144?
12. Koji broj je najmanji višekratnik od 314? A koji broj je najveći višekratnik od 314?
13. Luka ima u svojoj mini-željeznici lokomotivu i sedam vagona. Svaki vagon dug je 7 cm, a lokomotiva je također duga 7 cm. Koliko može biti dug vlak koji će Luka sastaviti od tih dijelova? Svaki vlak mora imati lokomotivu i bar jedan vagon.

14. U jednoj bombonijeri je 28 čokoladnih bombona.

a) Koliko će bombona biti u dvije, tri, četiri, pet itd. bombonijera? Nacrtaj i ispuni tablicu do 10 bombonijera:

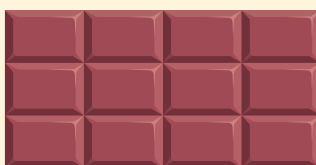
Bombonijera	Komada
1	28
2	56
...	...

b) Iz tablice pročitaj ove podatke:
Koliko bombonijera moramo kupiti, ako želimo 80 čokoladnih bombona?
Koliko bombonijera moramo kupiti, ako želimo 150 čokoladnih bombona?

15. Potrebno je 24 000 jaja zapakirati u kutije. Trgovački putnik je ponudio kutije u koje stane po: 12, 15, 16, 18, 24 i 36 jaja. Koje vrste kutija su dobre za ovu količinu jaja?
16. Odredi sve višekratnike broja 17 koji se nalaze između:
a) 10 i 50; b) 25 i 100; c) 214 i 230.
17. Jaja se slažu u kutije od po 10 komada. Koliko se jaja nalazi u kamionu, ako se zna da ih je više od 311, a manje od 344?
18. Luka ima veliku zbirku CD-ova, brojem između 350 i 400. Odlučio je CD-ove pospremiti u kutije. Koliko Luka ima CD-ova ako ih je spremio u kutije po 12 komada i sve su kutije pune?
19. Nalazi li se neki višekratnik od 67 između brojeva 714 i 730?
20. Nalazi li se neki višekratnik od 33 između brojeva 800 i 830?
21. Knjižničar je slagao knjige na policu. Na svaku policu stane 28 knjiga. Koliko je punih polica složio, ako je knjiga bilo više od 415, a manje od 423?
22. Odredi sve brojeve n za koje vrijedi:
a) $n < 70$ i višekratnik od 15.
b) $n < 150$ i višekratnik od 42.
c) $30 < n < 40$ i djeljivi s 2.
d) $125 < n < 300$ i djeljivi s 54.
e) $122 < n < 150$ i djeljivi s 101.
23. Napiši prvih šest višekratnika broja:
a) 5; b) 9; c) 11; d) 20; e) 75; f) 100; g) 1000;
h) 25; i) 42; j) 127; k) 266; l) 802.



2.2. Djelitelji



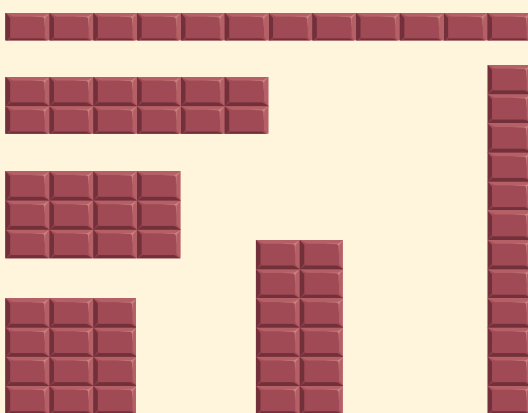
Čokolada

Čokolada pravokutnog oblika ima 12 "kockica". Koliko redaka može imati ta čokolada?

djelitelji prirodnog broja

Čokolada ima pravokutan oblik. Ako ima 12 "kockica" pitamo se na koji način možemo te "kockice" smjestiti u redove. Traže se svi brojevi s kojima je djeljiv broj 12. Dakle, traže se svi djelitelji broja 12.

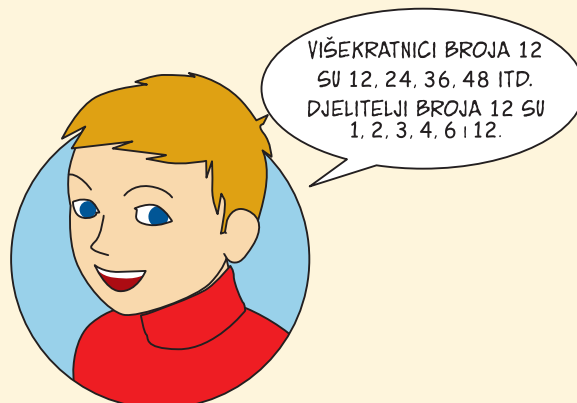
Tražimo sve brojeve kojima je 12 višekratnik. To su redom 1, 2, 3, 4, 6 i 12.



Dakle, čokolada može imati jedan redak (to bi onda bio jedan dugačak redak od 12 "kockica"), 2 retka (u svakom 6 "kockica"), 3 retka (u svakom 4 "kockice"), 4 retka (u svakom 3 "kockice"), 6 redaka (u svakom 2 "kockice") i 12 redaka (u svakom 1 "kockica"). Dopuni!

Primijetimo da broj 12 ima samo 6 djelitelja, dok višekratnika broja 12 ima beskonačno mnogo.

Svaki prirodan broj ima beskonačno mnogo višekratnika, a konačno mnogo djelitelja.



Primjer 1. Najmanji i najveći djelitelj

- Pronađi sve djelitelje brojeva 15, 18 i 19;
- Pronađi najmanji i najveći djelitelj brojeva 15, 18 i 19.

Rješenje:

- Djelitelji broja 15 su 1, 3, 5 i 15. Djelitelji broja 18 su 1, 2, 3, 6, 9 i 18. Djelitelji broja 19 su 1 i 19.
- Sada nije teško odrediti najmanji i najveći

djelitelj svakog od zadanih brojeva. Primijetimo da su svi oni djeljivi s 1. To je zato što je svaki prirodni broj djeljiv s 1. Najmanji djelitelj svakog prirodnog broja je 1.

Pogledamo li najveće djelitelje, primijetit ćemo da je najveći djelitelj broja 15 upravo 15, najveći djelitelj broja 18 upravo 18, a najveći djelitelj broja 19 upravo 19. To je stoga što je svaki prirodni broj djeljiv sa samim sobom. Najveći djelitelj svakog prirodnog broja je taj broj.

Primjer 2.

Ima li brojeva koji su ujedno i djelitelji i višekratnici broja 60?

Rješenje:

Svi djelitelji broja 60 su

1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 i 60.

Višekratnici broja 60 su 60, 120, 180, ...
Primjećujemo da je broj 60 i djelitelj i višekratnik broja 60.

Svaki prirodan broj je sam svoj višekratnik i djelitelj.

Primjer 3.

- a) Može li 0 biti djelitelj nekog prirodnog broja?
b) Može li 0 biti djeljenik nekog prirodnog broja?

Rješenje:

- a) Pogledajmo li skupove djelitelja brojeva 12, 15, 18, 20 i 60 iz prethodnih primjera, primijetiti ćemo da nula niti u jednom slučaju nije bila djelitelj. Pitamo se vrijedi li to za svaki prirodan broj. Prisjetimo se uloge djelitelja pri postupku dijeljenja:

$12 : ? = \text{količnik bez ostatka}$

/ |

višekratnik djelitelj
(djeljenik)

Zamislamo li da umjesto djelitelja 8 stoji 0, odmah ćemo se sjetiti važnog matematičkog pravila da se s nulom ne dijeli. To znači da 0 ne može biti djelitelj prirodnog broja.

$$\cancel{32 : 0 = ???}$$

- b) Primijetimo da niti u jednom skupu višekratnika iz prethodnih primjera i zadataka nismo naišli na nulu jer su višekratnici prirodni brojevi. Zato možemo pomisliti da 0 ne može biti djeljiva s prirodnim brojem. Međutim, nije tako. Ako je a neki prirodan broj, onda je $0 : a = 0$ i to je dijeljenje bez ostatka. Zato kažemo:

Nula je djeljiva sa svakim prirodnim brojem a .

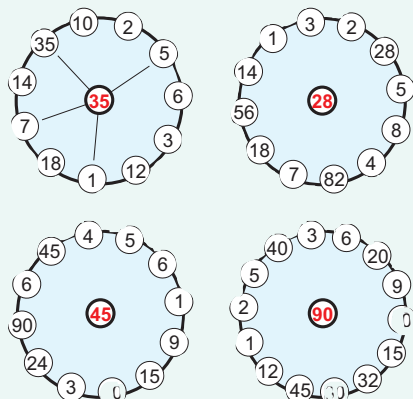
Nula ne može biti djelitelj, jer se s nulom ne dijeli!

NITI JEDAN
BROJ NIJE DJELJIV S
NULOM. ALI, NULA JE
DJELJIVA SA SVAKIM
BROJEM!

**Z a d a c i**

- Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 14:
12, 1, 2, 16, 7, 14, 100, 34, 140.
- Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 100:
12, 2, 5, 16, 10, 1, 20, 48, 100, 50, 101, 25.
- Među ovim brojevima prekriži one koji nisu djelitelji broja 15:
1, 2, 5, 10, 15, 30, 290, 3.
- Napiši sve djelitelje broja:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 5;
f) 6; g) 7; h) 8; i) 9; j) 10.
- Napiši sve djelitelje broja:
a) 12; b) 14; c) 15; d) 16; e) 17;
f) 18; g) 19; h) 20; i) 24; j) 29.

6. Poveži broj u sredini s njegovim djeljiteljima:



7. Koji broj je djeljitelj svakog prirodnog broja?

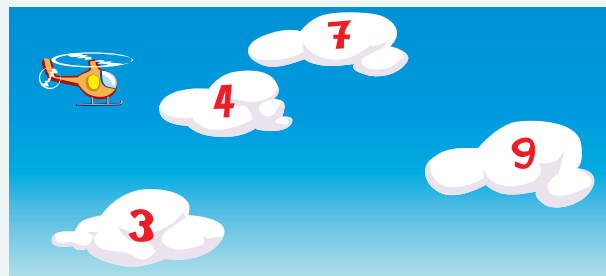
8. DA-NE pitalice. Zaokruži točan odgovor:

Broj 12 je djeljitelj broja 2.	DA	NE
Broj 2 je djeljitelj broja 12.	DA	NE
Broj 5 je djeljitelj broja 5.	DA	NE
Broj 24 je djeljitelj broja 12.	DA	NE
Broj 4 je djeljitelj broja 14.	DA	NE
Broj 1 je djeljitelj broja 4.	DA	NE
Broj 10 je djeljitelj broja 190.	DA	NE
Broj 33 je djeljitelj broja 11.	DA	NE

9. DA-NE pitalice. Zaokruži točan odgovor:

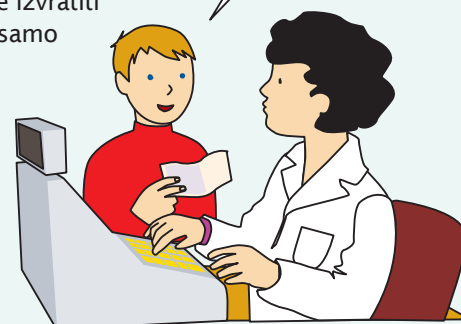
Broj 4 je djeljitelj broja 4.	DA	NE
Broj 4 je višekratnik broja 4.	DA	NE
Broj 18 je višekratnik broja 3.	DA	NE
Broj 7 je djeljitelj broja 49.	DA	NE
Broj 25 je djeljitelj broja 1.	DA	NE
Broj 50 je višekratnik broja 25.	DA	NE
Broj 25 je djeljitelj broja 50.	DA	NE
Broj 45 je višekratnik broja 4.	DA	NE

10. Spoji helikopter sa svim oblacima u kojima su djeljitelji broja 12.



11. Odredi sve djelitelje broja: a) 60; b) 90; c) 76.
12. Odredi sve djelitelje broja:
a) 15; b) 9; c) 11; d) 20;
e) 75; f) 100; g) 45.
13. Odredi sve djelitelje broja:
a) 25; b) 42; c) 81; d) 200; e) 80.
14. Čokolada pravokutnog oblika ima 18 "kockica". Koliko redaka može imati ta čokolada? Nacrtaj sve mogućnosti.
15. Čokolada pravokutnog oblika ima 30 "kockica". Koliko redaka može imati ta čokolada? Nacrtaj sve mogućnosti.
16. Luka želi u trgovini razmijeniti novčanicu od 10 kn. Ispiši sve mogućnosti na koje mu blagajnica može izvratiti kovanice (koristeći samo kune, bez lipa).
17. Na koje sve načine kovanicama možeš platiti paket žvakaćih guma koji stoji 16 kn? (Bez korištenja lipa!)

MOŽETE LI MI
RAZMIJENITI
NOVČANICU
OD 10 KN?



Savršen broj



Broj koji je jednak zbroju svojih djeljitelja naziva se savršen broj. Pritom među djelitelje broja a ne uzimamo sam broj a .

Primjer: Broj 6 je savršen broj.

Djelitelji broja 6 su: 1, 2, 3. Zbroj tih djeljitelja je 6.

Još neki primjeri savršenih brojeva: 28, 496.

Prijateljski brojevi

Dva broja kod kojih je zbroj djeljitelja jednog broja jednak drugom broju i obratno nazivaju se prijateljskim brojevima. Pritom među djelitelje broja a ne uzimamo sam broj a .

Primjer: Brojevi 220 i 284 su prijateljski.

Djelitelji broja 220 su 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

Zbroj tih djeljitelja je 284 (provjeri!)

Djelitelji od 284 su 1, 2, 4, 71, 142. Uvjeri se da je zbroj ovih djeljitelja 220.

Još neki primjeri prijateljskih brojeva: 1184 i 1210, 2620 i 2924, 17 296 i 18 416.

Vježbalica

1. Dopuni:

- a) 3, 6, 9, 12, 15, ... su višekratnici brojeva __ i __;
b) 8, 16, 24, 32, 40, ... su višekratnici brojeva __, __, __ i __.

2. Među ovim brojevima zaokruži višekratnike broja 6: 12, 1, 3, 16, 8, 24, 100, 36, 40.

3. Među ovim brojevima zaokruži višekratnike broja 13: 12, 13, 16, 24, 1, 39, 48, 130.

4. Među ovim brojevima prekriži one koji nisu višekratnici broja 11: 1, 22, 5, 110, 77, 101, 222.

5. Odredi nekoliko višekratnika broja:

- a) 7; b) 14; c) 25; d) 11; e) 81; f) 201.

6. Zadani su brojevi 504, 17, 350, 297, 63 i 90. Koji od ovih brojeva su višekratnici broja:

- a) 3; b) 1; c) 5; d) 10; e) 9; f) 7?

7. Zadani su brojevi 560, 64, 136, 120, 25 i 101. Koji od ovih brojeva su višekratnici broja:

- a) 5; b) 1; c) 20; d) 10; e) 4?

8. Zadani su brojevi 216, 388, 45, 560, 68 i 72. Koji od ovih brojeva su višekratnici broja:

- a) 3; b) 1; c) 7; d) 10; e) 2?

9. Koji broj je najmanji višekratnik od 231?

10. Koji broj je najmanji višekratnik od 14? A koji broj je najveći višekratnik od 14?

11. Koji broj je najmanji višekratnik od 3105? A koji broj je najveći višekratnik od 3105?

12. Dopuni ovaj niz višekratnika:

- a) 5, 10, 15, 20, , , , ;
b) , 14, 21, , 35, 42, ;
c) , , , 80, 100, 120
d) , 26, , 52, , 78

13. Odredi skup višekratnika broja:

- a) 7; b) 11; c) 17; d) 25; e) 45; f) 150.

14. Odredi skup višekratnika broja:

- a) 6; b) 22; c) 12; d) 66; e) 115.

15. Odredi sve višekratnike broja 18 koji se nalaze između 50 i 80.

16. Odredi sve višekratnike broja 14 koji se nalaze između 70 i 100.

17. Odredi sve višekratnike broja 21 koji se nalaze između 60 i 90.

18. Odredi sve brojeve $n < 80$ koji su višekratnici od 32.

19. Odredi sve brojeve $n < 95$ koji su višekratnici broja 17.

20. Odredi sve brojeve n takve da je $60 < n < 80$ koji su djeljivi s 3.

21. Odredi sve brojeve n takve da je $134 < n < 199$ koji su djeljivi s 20.

22. Odredi sve brojeve n takve da je $124 < n < 259$ koji su djeljivi s 45.

23. Nalazi li se neki višekratnik broja 22 između brojeva 435 i 500?

24. Nalazi li se neki višekratnik broja 8 između brojeva 400 i 450?

25. Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 24: 12, 1, 2, 16, 7, 4, 240, 6, 48.

26. Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 15: 12, 2, 5, 30, 10, 1, 20, 48.

27. Među ovim brojevima prekriži one koji nisu djelitelji broja 36: 1, 2, 6, 4, 5, 30, 9, 3, 8.

28. Odredi sve djelitelje broja: a) 65; b) 80; c) 56.

29. Odredi skup djelitelja broja:

- a) 16; b) 12; c) 13; d) 21; e) 77; f) 120; g) 46.

30. Odredi skup djelitelja broja:

- a) 27; b) 48; c) 8; d) 29; e) 85.

31. Koji djelitelji nedostaju:

- a) $D_{32} = \{1, 2, \square, \square, \square, 32\}$
b) $D_{28} = \{\square, 2, \square, \square, 14, \square\}$
c) $D_{13} = \{1, \square\}$
d) $D_{72} = \{\square, 2, \square, \square, 6, \square, \square, \square, \square, \square, \square\}$
e) $D_{121} = \{1, \square, 121\}$

32. Čokolada pravokutnog oblika ima 36 "kockica". Koliko redaka može imati ta čokolada? Nacrtaj sve mogućnosti.

33. Čokolada pravokutnog oblika ima 24 "kockice". Koliko redaka može imati ta čokolada? Nacrtaj sve mogućnosti.

34. Pravilno pročitaj pa riješi ove zadatke:

- a) Pronađi V_{42} i D_{42} .
b) Pronađi V_{120} i D_{120} .
c) Pronađi V_{35} i D_{35} .

35. Pravilno pročitaj pa riješi ove zadatke:

- a) Pronađi V_{20} i D_{20} .
b) Pronađi V_{12} i D_{12} .
c) Pronađi V_{28} i D_{28} .

36. Pravilno pročitaj pa riješi ove zadatke:

- a) Pronađi V_{25} i D_{25} .
b) Pronađi V_{44} i D_{44} .
c) Pronađi V_{37} i D_{37} .

37. Pravilno pročitaj pa riješi ove zadatke:

- a) Pronađi V_{18} i D_{18} .
b) Pronađi V_{14} i D_{14} .
c) Pronađi V_{310} i D_{110} .

38. Pravilno pročitaj pa riješi ove zadatke:

- a) Pronađi V_{50} i D_{50} .
b) Pronađi V_{144} i D_{144} .
c) Pronađi V_{27} i D_{27} .

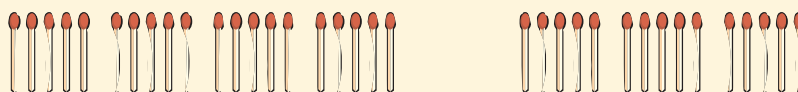
2.3. Svojstva djelivosti



Sve po 5 kn

Pogledaj sliku lijevo i odgovori zašto se Beni zamislio. Što nije u redu?

Zbrojimo li višekratnike broja 5 zbroj će biti višekratnik broja 5. Objašnjenje pogledajmo na ovoj slici sa šibicama:



Na lijevoj strani je 4 puta po 5 šibica, tj.
 $4 \cdot 5 = 20$ šibica. Na desnoj strani je 3 puta po 5 šibica, tj.
 $3 \cdot 5 = 15$ šibica.

Zbrojimo li ove kupove šibica, imat ćemo 7 kupova po 5 šibica, tj. $7 \cdot 5 = 35$ šibica. Broj 35 je višekratnik broja 5.

Matematički to zapisujemo ovako:

$$4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = (4 + 3) \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35.$$

Prisjetimo se izlučivanja zajedničkog faktora. Zajednički faktor u oba pribrojnika je broj 5. Izlučimo ga.

Ovo pravilo ne vrijedi samo za brojeve djeljive s 5, već i za višekratnike bilo kojeg prirodnog broja:

Ako su svi pribrojnici djeljivi nekim brojem, tada je i njihov zbroj djeljiv tim brojem.

djeljivost zbroja

Primjer 1. Djeljivost zbroja

Zbrojimo nekoliko višekratnika broja 3 i uvjerimo se da je i zbroj djeljiv brojem 3.

Rješenje:

Odaberimo nekoliko višekratnika broja 3. Na primjer, neka su to 3, 9, 24 i 300. Zbrojimo li ove brojeve dobivamo $3 + 9 + 24 + 300 = 336$. Zaključujemo da je i zbroj 336 višekratnik od 3 jer je $112 \cdot 3 = 336$.

Primjer 2. Zbroj parnih brojeva

- Kakav je zbroj dvaju parnih brojeva?
- Koliko parnih brojeva moramo zbrojiti da bi njihov zbroj bio neparan?

Rješenje:

- Parni brojevi su višekratnici broja 2. Zbrojimo li dva parna broja, zbroj će opet biti paran broj.
- Zbrajamo li više parnih brojeva, zbroj će opet biti paran broj. I koliko god parnih brojeva zbrajali, njihov zbroj će uvijek biti paran broj.

Primjer 3. Djeljivost razlike

Dopuni ove rečenice:

- a) Ovo je jato od 16 riba. Od toga se 8 uhvatilo u mrežu. Na slobodi je ostalo __ riba.
 b) Maja je visoka 140 cm, a njen tata 190 cm. Za koliko centimetara se razlikuju njihove visine?
 Za __ cm.

Rješenje:

U ovom smo primjeru oduzimali parne brojeve:

$$16 - 8 = 8$$

$$190 - 140 = 50.$$

Umanjenik i umanjitelj su bili parni brojevi, pa je i razlika paran broj. No to pravilo ne vrijedi samo za brojeve djeljive s 2. Brojevi 16 i 8 su oba djeljiva s 4, pa vidimo da je i razlika djeljiva

s 4. Dalje, isti brojevi 16 i 8 su oba djeljivi s 8, pa je i razlika djeljiva s 8.

Umanjenik 190 i umanjitelj 140 su djeljivi s 10, pa je i razlika djeljiva s 10. Također, brojevi 190 i 140 su oba djeljivi s 5, pa je i njihova razlika djeljiva s 5. Nakon ovih zaključaka moramo dodati da ovo pravilo ne vrijedi samo za spomenute brojeve, već za sve prirodne brojeve koji se mogu oduzimati skupu N:

djeljivost razlike

Ako su umanjenik i umanjitelj djeljivi nekim brojem, tada je i njihova razlika djeljiva tim brojem.


Primjer 4.
Snalažljivo pokazivanje djeljivosti


Ovaj Primjer 4 je baš lukav!

Bez računanja i u što kraćem vremenu odgovori na pitanja:

Je li 64 djeljiv s 4?	DA	NE
Je li 174 djeljiv sa 6?	DA	NE
Je li 1530 djeljiv s 15?	DA	NE
Je li 307 djeljiv s 3?	DA	NE

Rješenje:

Odgovor na ova pitanja potražiti ćemo u pravilima za djeljivost zbroja i razlike. Pogledajmo prvo pitanje:

Je li 64 djeljiv s 4?

Naučili smo svojstvo djeljivosti zbroja. Pitamo se možemo li 64 rastaviti na pribrojnik djeljive s 4. Krenimo od pribrojnika koji završavaju nulom, s njima nam je uvijek najlakše računati. Znamo da je 40 djeljiv s 4, pa pokušajmo:

$$64 = 40 + 24.$$

Z a d a c i

- Koristeći svojstvo djeljivosti razlike i zbroja, napamet izračunaj koliko je: (a zadatak je riješen)
 a) $168 : 7 = (140 + 28) : 7 = 140 : 7 + 28 : 7 = 20 + 4 = 24$. Primijetimo da smo se ovdje koristili svojstvom distributivnosti
 b) $87 : 3$; c) $129 : 3$; d) $597 : 6$
 e) $296 : 3$; f) $225 : 5$; g) $84 : 7$.

- S kojim brojevima su djeljivi ovi zbrojevi:
 a) $15 + 25$; b) $26 + 13$; c) $42 + 49$;
 d) $60 + 36$; e) $55 + 66$.
- S kojim brojevima su djeljive ove razlike:
 a) $88 - 44$; b) $125 - 55$; c) $88 - 64$;
 d) $200 - 100$; e) $81 - 27$.

Kako su 40 i 24 višekratnici broja 4, zaključujemo da je i 64 višekratnik broja 4. Naravno, broj 64 smo i na druge načine mogli rastaviti te doći do istog zaključka.

Npr. $64 = 32 + 32$, $64 = 20 + 40 + 4$ itd.

Na isti način pronalazimo i ostale odgovore iz zadatka:

$174 = 180 - 6$, pa je 174 djeljivo sa 6;

$1530 = 1500 + 30$, pa je 1530 djeljivo s 15.

No, $307 = 300 + 6 + 1$. Broj 307 nikako ne možemo rastaviti tako da svaki pribrojnik bude djeljiv s 3, pa 307 nije djeljiv s 3.

Na primjer, 6432 je djeljiv s 8 jer je $6432 = 6400 + 32$. Oba pribrojnika su djeljiva s 8, pa je djeljiv i njihov zbroj 6432.

Pripazimo ovdje još na nešto. Znamo da ako su svi pribrojnici djeljivi brojem a , i zbroj je djeljiv s brojem a . No pogledajmo obrnutu situaciju. Znamo da je broj 60 djeljiv s 10. Rastavimo ga na $60 = 59 + 1$. Niti jedan od pribrojnika nije djeljiv s 10, pa bismo mogli krivo zaključiti da ni 60 nije djeljiv s 10. Ali naše pravilo glasi da ako nađemo pribrojnike koji su svi djeljivi s 10, onda će i zbroj biti djeljiv s 10. A to vrijedi jer je $10 + 50 = 60$.

Zadaci

4. Bez računanja rezultata nađi neke brojeve s kojima je djeljiv zbroj:
a) $12 + 24$; b) $6 + 18 + 18$; c) $17 + 51$;
d) $30 + 36 + 15$; e) $212 + 6 + 330$;
f) $1005 + 205 + 45 + 700$.

5. Bez računanja rezultata nađi neke brojeve s kojima je djeljiva razlika:
a) $1000 - 75$; b) $512 - 22 - 38$;
c) $600 - 320$; d) $88 - 16 - 16 - 16$.

6. Bez računanja odredi s kojim brojevima je djeljiv zbroj:
a) $45 + 25 + 5 + 10$; b) $12 + 14 + 16 + 18$;
c) $16 + 24 + 160 + 888$; d) $28 + 14 + 35 + 14 + 140$.

7. Bez računanja nađi s kojim brojevima je djeljiv rezultat:
a) $210 - 14 - 28 + 63$;
b) $500 + 5 + 5 + 35 - 270$;
c) $32 + 64 - 16 + 24$.

8. U trgovini "Sve po 10 kn" račun je iznosio 88 kn. Kako možeš odmah znati da nešto nije u redu?

VIDIŠ? AKO ZNAŠ MATEMATIKU, NEMA ŠANSE DA TE PREVARE U DUĆANU!



9. Matija je u knjižari kupovao olovke. Kupio je 13 istih olovaka, cijena jedne je 18 kn. Trebao je platiti 231 kn. Kako odmah možeš znati da je iznos pogrešan?

10. Koji broj treba pribrojiti broju 77 da bismo dobili broj djeljiv s 2?
11. Koji najmanji broj treba pribrojiti broju 145 da bismo dobili broj djeljiv s 3?
12. Koji broj treba oduzeti od broja 55 da bismo dobili prirodan broj djeljiv s 9? Koliko takvih brojeva ima? Sva svoja rješenja provjeri oduzimanjem.

13. Dopuni rečenice rastavljajući brojeve na pribrojnike:
Broj 57 je djeljiv s 3 jer je $57 = 30 + 27$.
Broj 84 je djeljiv sa 7 jer je
Broj 174 je djeljiv sa 6 jer je
Broj 48 je djeljiv s 3 jer je
Broj 75 je djeljiv s 3 jer je
Broj 102 je djeljiv s 3 jer je
Broj 84 je djeljiv sa 6 jer je
Broj 728 je djeljiv sa 7 jer je

14. Pročitaj kako je Beni razmišljao:
"Rekli ste da je 64 djeljivo s 4. Rastaviti ću 64 kao: $64 = 63 + 1$. Niti jedan pribrojnik nije djeljiv s 4 pa zaključujem da 64 nije djeljiv s 4!"
Zašto Beni nije u pravu? Kako bi mu to ti objasnio?
15. Dnevne novine stoje 6 kn. Prodavačica na kiosku je imala ovakav promet novinama prošlog tjedna:

Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub	Ned
66	83	72	68	102	96	56
kn	kn	kn	kn	kn	kn	kn

Je li sve u redu?

16. Bomboni se u tvornici pakiraju u paketiće od po 15 komada. No svakog se dana proizvede različit broj bombona.

Pon	Uto	Sri	Čet	Pet
600	650	630	660	610
kom	kom	kom	kom	kom

- a) Kojim danom se svi bomboni mogu raspodijeliti u paketiće bez ostatka?
b) Ako ima ostatka, radnici te bombone mogu podijeliti među sobom. Kojim danom ostane bombona? Koliko bombona ostaje radnicima?

Primjer 5. Djeljivost i višekratnik

Zapiši prvih 10 višekratnika broja 12. S kojim su sve brojevima djeljivi svi višekratnici broja 12?

Ako je prirodan broj a djeljiv brojem b , tada je i svaki višekratnik od a djeljiv s b .

Rješenje:

Višekratnici broja 12 su: 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120 itd.

Djelitelji broja 12 su 1, 2, 3, 6 i 12. Primijetimo da su svi višekratnici od 12 parni brojevi, pa su djeljivi s 2. Oni su također višekratnici od 3 i 6. Zaključujemo da su svi višekratnici od 12 djeljivi s 1, 2, 3, 6 i 12.

Primjer 6. Djeljivost umnoška

Je li ovaj umnožak djeljiv brojem 5:

- a) $3 \cdot 5 \cdot 7$;
- b) $4 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 6$;
- c) $15 \cdot 25 \cdot 100$?

Rješenje:

a) Umnožak je djeljiv s 5 jer je jedan od faktora 5. Zbog svojstava množenja (komutativnosti i asocijativnosti) možemo računati ovako: $3 \cdot 5 \cdot 7 = 21 \cdot 5$, a to je višekratnik broja 5, pa je djeljiv s 5. Također, umnožak $3 \cdot 5 \cdot 7$ će osim s 5, biti djeljiv i s 3 i sa 7.

b) Jedan način rješavanja ovog problema je da sve faktore pomnožimo pa provjerimo je li umnožak djeljiv s 5. Naravno, mi ćemo pokazati brži način, bez množenja. Primijetimo da se među faktorima $4 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 6$ nalazi jedan višekratnik broja 5. To je faktor 20. Njega možemo zapisati u obliku $20 = 4 \cdot 5$.

$$4 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 6 = 4 \cdot 17 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$4 \cdot 5$$

To znači da je cijeli umnožak višekratnik broja 5. Zaključujemo:

Ako je jedan od faktora djeljiv brojem 5, tada je i umnožak djeljiv s 5.

To ne vrijedi samo za broj 5, pa zaključujemo da ako je bar jedan od faktora djeljiv s a , i umnožak je djeljiv s a . Tako će umnožak $4 \cdot 17 \cdot 20 \cdot 6$ biti djeljiv s primjerice 2 i s 3 jer je faktor 6 djeljiv s 2 i 3.

c) Primijetimo da su u ovom primjeru sva tri faktora $15 \cdot 25 \cdot 100$ djeljiva s 5. Pitamo se je li i sada umnožak djeljiv s 5. Iz primjera b) znamo da je dovoljno da jedan faktor bude djeljiv s 5. Ako ih je više, kao u ovom primjeru, to ništa ne smeta, umnožak će opet biti djeljiv s 5. Zato kažemo da ako je bar jedan faktor djeljiv s 5, onda je i umnožak djeljiv s 5. Ovo pravilo umnoška ne vrijedi samo za djeljivost s 5, već za djeljivost svakog prirodnog broja.

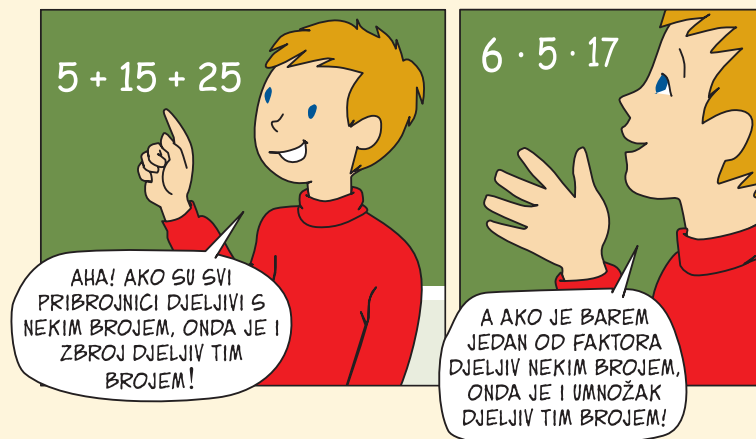
Ako je **bar jedan** od faktora djeljiv s a , onda je i umnožak djeljiv s a .

Ako su **svi** pribrojnci djeljivi s a , onda je i zbroj djeljiv s a .

Primjer 7.

Primjena djeljivosti umnoška

S kojim je brojevima djeljiv umnožak $2 \cdot 15$?



Rješenje:

Prisjetimo se pravila da je umnožak djeljiv brojem a ako je bar jedan od faktora djeljiv s a . Faktor 15 je, osim s 1, djeljiv s 3, 5 i 15, pa će i umnožak $2 \cdot 15$ biti djeljiv s 2, 3, 5 i 15.

Zaključujemo da je umnožak $2 \cdot 15$ djeljiv s 1, 2, 3, 5 i 15. No to nisu svi djelitelji umnoška $2 \cdot 15$. Ako $2 \cdot 15$ rastavimo na $2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, onda možemo pomnožiti i, primjerice, $2 \cdot 3$ pa ćemo dobiti da je $2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5$. Zaključujemo da je naš umnožak djeljiv i sa 6. Na isti način možemo pomnožiti faktore $2 \cdot 5$ pa zaključujemo da je umnožak djeljiv s 10. Tek kada pomnožimo međusobno sve faktore, dobivamo sve djelitelje umnoška $2 \cdot 15$. To su 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30.

Zadaci

17. S kojim brojevima su djeljivi svi višekratnici broja 18?
18. Bez računanja odredi koji umnošci su djeljivi s 3:
a) $13 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 53$; b) $13 \cdot 23 \cdot 43$; c) $33 \cdot 7$;
d) $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$; e) $10 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 26$;
f) $41 \cdot 12$; g) $32 \cdot 32 \cdot 32$.
19. Bez računanja odredi koji umnošci će biti djeljivi s 10:
a) $4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3$; b) $2 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 4$; c) $5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4$;
d) $8 \cdot 12 \cdot 50 \cdot 19 \cdot 31$; e) $2 \cdot 13 \cdot 51$.
20. Jesu li ovi umnošci djeljivi sa 7:
a) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$; b) $13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5$; c) $61 \cdot 61$;
d) $12 \cdot 13 \cdot 14$; e) $71 \cdot 71 \cdot 73 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 76$;
f) $7 \cdot 28 \cdot 10$?
21. Jesu li ovi umnošci djeljivi s 12:
a) $11 \cdot 12 \cdot 13$; b) $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;
c) $23 \cdot 24 \cdot 25$; d) $14 \cdot 15 \cdot 16$?
22. S kojim brojevima su djeljivi umnošci:
a) $2 \cdot 3 \cdot 7$; b) $12 \cdot 5$; c) $14 \cdot 3$;
d) $11 \cdot 4$; e) $4 \cdot 15$?
23. Veliko pakiranje jaja s farme treba se prepakirati u manje kutije. Kakve mogu biti manje kutije ako se u velikoj kutiji nalazi 50 jaja?
24. Spoji umnožak $12 \cdot 5 \cdot 7$ s brojevima s kojima je djeljiv:

$$12 \cdot 5 \cdot 7$$

11	4	8	6	14
----	---	---	---	----

Vježbalica

1. Bez računanja odredi s kojim brojevima je djeljiv zbroj:
 - a) $48 + 24 + 6 + 12$;
 - b) $28 + 14 + 35 + 42$;
 - c) $30 + 24 + 60 + 18$;
 - d) $23 + 115 + 46$.
2. Bez računanja nađi s kojim brojevima je djeljiv rezultat:
 - a) $90 - 30 - 45 + 105$;
 - b) $21 + 49 + 28 + 35 - 70$;
 - d) $40 + 100 - 60 + 80$.
3. Koji najmanji broj treba pribrojiti broju 56 da bismo dobili broj djeljiv s 8?
4. Koji najmanji broj treba pribrojiti broju 175 da bismo dobili broj djeljiv sa 13?
5. Koji broj treba oduzeti od broja 505 da bismo dobili broj djeljiv s 19? Koliko takvih brojeva ima? Sva svoja rješenja provjeri oduzimanjem.
6. Dopuni rečenice rastavljajući brojeve na pribrojnike:

Broj 57 je djeljiv sa 3 jer je $57 = 30 + 27$.

Broj 121 je djeljiv sa 11 jer je _____.

Broj 1740 je djeljiv sa 60 jer je _____.

Broj 438 je djeljiv sa 3 jer je _____.

Broj 85 je djeljiv sa 5 jer je _____.

Broj 1002 je djeljiv sa 3 jer je _____.

Broj 256 je djeljiv sa 16 jer je _____.

Broj 1428 je djeljiv sa 7 jer je _____.
7. Bez računanja odredi je li umnožak $13 \cdot 34 \cdot 43 \cdot 53$ djeljiv sa 3:
8. Bez računanja odredi je li umnožak $7 \cdot 13 \cdot 55 \cdot 24$ djeljiv sa 11:
9. Bez računanja odredi je li umnožak $15 \cdot 14 \cdot 26 \cdot 4$ djeljiv sa 13:
10. Bez računanja odredi je li umnožak $18 \cdot 14 \cdot 35 \cdot 5$ djeljiv sa 7:
11. Bez računanja odredi je li umnožak $9 \cdot 3 \cdot 40 \cdot 50$ djeljiv sa 8:
12. Bez računanja odredi je li umnožak $13 \cdot 35 \cdot 45 \cdot 50$ djeljiv sa 6:
13. Bez računanja odredi je li umnožak $1 \cdot 34 \cdot 45 \cdot 54$ djeljiv sa 4:
14. Bez računanja odredi je li umnožak $10 \cdot 32 \cdot 3 \cdot 5$ djeljiv sa 15:
15. Bez računanja odredi je li umnožak $12 \cdot 30 \cdot 44 \cdot 54$ djeljiv sa 24:
16. Bez računanja odredi je li umnožak $12 \cdot 33 \cdot 45 \cdot 5$ djeljiv sa 27:
17. Bez računanja odredi je li umnožak $18 \cdot 202 \cdot 36 \cdot 77$ djeljiv sa 11:
18. Bez računanja odredi je li umnožak $10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5$ djeljiv sa 12:
19. Bez računanja odredi je li umnožak $12 \cdot 34 \cdot 42 \cdot 14$ djeljiv sa 14:
20. Bez računanja odredi je li umnožak $18 \cdot 37 \cdot 45 \cdot 5$ djeljiv sa 30:
21. Bez računanja odredi koji umnošci će biti djeljivi s 12:
 - a) $6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 13$; b) $33 \cdot 11 \cdot 25 \cdot 4$;
 - c) $25 \cdot 49 \cdot 9 \cdot 13$; d) $7 \cdot 12 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 31$.
22. Jesu li ovi umnošci djeljivi sa 32:
 - a) $1 \cdot 12 \cdot 18 \cdot 6$; b) $14 \cdot 4 \cdot 17 \cdot 5$;
 - c) $6 \cdot 16$; d) $42 \cdot 19 \cdot 8$.
23. Je li $135 - 35 + 2320$ djeljivo sa 5?
24. Je li djeljivo s 4?
25. Je li $111114356 - 23456788 + 3344444$ djeljivo s 2?

2.4. Djeljivost s 10, 5 i 2



U oblačiće smjesti odgovarajuće brojeve iz gornjeg oblaka.

Što je zajedničko svim višekratnicima broja 10?

Kako prepoznaješ višekratnike broja 2?

Kako prepoznaješ višekratnike broja 5?

Ako želimo provjeriti je li broj 43760 djeljiv s brojevima 10, 2 ili 5, možemo ga podijeliti sa svakim od njih i uvjeriti se kakav mu je ostatak. Ako pri dijeljenju nema ostatka, znači da je zadani broj djeljiv s tim brojevima.

Provjerimo to:

$$43\,760 : 10 = 4376 \quad 43\,760 : 5 = 8752 \quad 43\,760 : 2 = 21\,880$$

Dijeljenjem smo provjerili da je 43760 djeljiv s brojevima 10, 5 i 2.

Međutim, djeljivost s ovim brojevima može se odrediti i na mnogo brži način od dijeljenja. Pogledajmo kako.

Primjer 1. Djeljivost s 10

- Zapiši prvih 11 višekratnika broja 10. Što je zajedničko svakom zapisanom broju?
- Kako ćemo među brojevima prepoznati višekratnike broja 10?



Sjećaš se, kad množiš s 10, dopisuješ nulu na kraj!

Rješenje:

Traženi višekratnici su:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110. Primjećujemo da svaki od ovih višekratnika završava s 0. Svaki sljedeći član ovog niza dobije se tako da se prethodni uveća za 10,

pa će i njegova posljednja znamenka biti 0. Zaključujemo: **svi višekratnici broja 10 završavaju s 0.**

To možemo reći i ovako: **Ako neki broj ne završava s nulom, onda nije djeljiv s 10.**

Sada pogledajmo neke brojeve koji završavaju s nulom: 450, 5987 500, 60, 200, 4080, 120, 6000 itd. Svaki od njih je djeljiv s 10. **Odaberemo li bilo koji prirodni broj kojem je posljednja znamenka 0, on će biti djeljiv s 10.** Zašto? Jer, primjerice, broj 450 možemo rastaviti na $450 = 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10$, gdje je svaki pribrojnik djeljiv s 10, pa je i zbroj djeljiv s 10. Na isti način:

$$1380 = \underbrace{1 \cdot 1000}_{\text{djeljivo s 10}} + \underbrace{4 \cdot 100}_{\text{djeljivo s 10}} + \underbrace{8 \cdot 10}_{\text{djeljivo s 10}}$$

djeljivost s 10

Zamislamo li bilo koji prirodni broj koji završava s 0, možemo ga rastaviti na ovaj način. Budući da je znamenka jedinica 0, ako ga rastavimo na ovaj način zaključit ćemo da je broj djeljiv s 10.

Na isti način možemo postupiti i s bilo kojim drugim brojem koji završava s 0.

Stoga zaključujemo:

Prirodan broj je djeljiv s 10, ako mu je posljednja znamenka 0.

Primjer 2. Djeljivost sa 100

Zapiši nekoliko višekratnika broja 100 i izvedi pravilo o djeljivosti sa 100.

Rješenje:

Višekratnici broja 100 su: 100, 200, 300, 400... Primjećujemo da svaki od ovih višekratnika završava s 00. Svaki sljedeći član ovog niza dobije se tako da se prethodni uveća za 100, pa zaključujemo: svi višekratnici broja 100 završavaju s 00.

To možemo reći i na ovaj način: Ako neki broj ne završava s 00, nije djeljiv sa 100.

Sada pogledajmo brojeve 4500, 5 987 500, 56 000, 1100, 13 800, 34 550 000.

Oni svi završavaju s 00 i svaki od njih je djeljiv sa 100 jer se može rastaviti na pribrojnice od kojih je svaki djeljiv sa 100. Primjerice, $4500 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100$. Odaberemo li bilo koji prirodan broj koji završava s dvije nule, on će biti djeljiv sa 100. Stoga zaključujemo:

Prirodan broj je djeljiv sa 100 ako završava s 00.

djeljivost sa 100

ČIM VIDIŠ
NULU NA KRAJU
NEKOG BROJA
ZNAŠ DA JE ON
DJEJLJIV S 10!

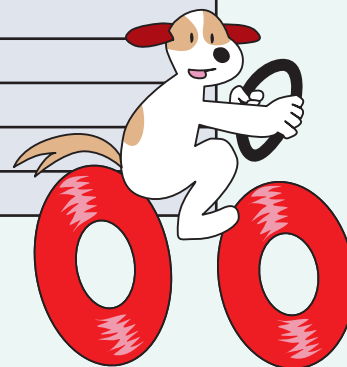
**Zadaci**

- Koji od ovih brojeva su djeljivi s 10:
250, 34, 10, 1, 500, 2000, 808, 880, 453, 450, 100 000, 20 000.
- Koji od ovih brojeva su djeljivi sa 100:
490, 100, 2500, 4000, 320, 44, 200, 6000, 5 000 000, 45, 1.
- Koji su od ovih brojeva djeljivi s 10, a koji sa 100?
40, 5000, 700, 20, 33, 101, 400, 100, 10, 2020, 2002, 2200, 310, 9000, 5 000 000, 40 000, 5090, 60, 800, 1000.
- Navedi 6 četveroznamenastih brojeva djeljivih s 10.
- Zapiši 5 peteroznamenastih brojeva djeljivih sa 100.

- Zapiši sve brojeve djeljive sa 100 koji se nalaze između 5689 i 6754. Nađi ih na brojevnom pravcu.
- Za svaki broj pronađi prvi manji djeljiv s 10:

broj	prvi manji djeljiv s 10
456	450
467	460
321	
10 001	
999	
327	
342	
123	

ČIM VIDIŠ
DVIJE NULE NA KRAJU
NEKOG BROJA ZNAŠ DA
JE ON DJEJLJIV
SA 100!



8. Ispuni tablicu:

prvi manji djeljiv sa 100	broj	prvi veći djeljiv sa 100
	324	
	22	
	156	
	209	
	3648	
	122	
	779	
	14 456	

9. a) Zapiši 8 višekratnika broja 1000;
b) Dopuni rečenicu: Prirodan broj je djeljiv s 1000, ako završava s _____.

**djeljivost
s 1000**

10. Kada je prirodan broj djeljiv s 10 000?
Zapiši nekoliko višekratnika od 10 000.

**djeljivost
s 10 000**

11. Zapiši nekoliko višekratnika od milijun
i izvedi pravilo za djeljivost brojem
milijun.

12. Jedna od ovih rečenica je točna, a jedna nije.
Zaokruži točnu rečenicu i objasni:

- a) Ako je broj djeljiv s 10, onda je djeljiv i sa 100;
b) Ako je broj djeljiv sa 100, onda je djeljiv i s 10.

Primjer 3. Djeljivost s 5

Zapiši prvih 20 višekratnika broja 5. Što primjećuješ?

Zapiši pravilo za djeljivost brojem 5.

Rješenje:

Traženi brojevi su 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100. Primjećujemo da svaki od ovih višekratnika završava s 0 ili s 5. Svaki sljedeći član ovog niza dobije se tako da se prethodni uveća za 5 pa će se znamenke 0 i 5 stalno izmjenjivati na mjestu jedinica. Stoga zaključujemo: svi višekratnici broja 5 završavaju s 0 ili 5. To možemo reći i ovako: Ako neki broj ne završava s 0 ili 5, onda nije djeljiv s 5.

Sada zapišimo neke brojeve koji završavaju s 5 ili 0. To su, primjerice, 45, 5 987 500, 565, 110, 1380, 3475 itd. Svaki od njih je djeljiv s 5. I odaberemo li bilo koji prirodan broj kojemu je posljednja znamenka 0 ili 5, on će biti djeljiv s 5 jer se može rastaviti na pribrojnice tako da svaki bude djeljiv s 5. Primjerice, 3475 rastavimo na:

$$3475 = 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5$$

djeljivo s 5

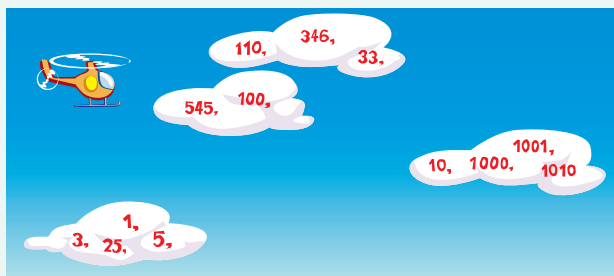
**5, 10, 15, 20,
25, 30, 35,
40, 45, 50, ...**

Na isti način možemo rastaviti svaki prirodni broj. Stoga zaključujemo:

Prirodan broj je djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5.

Zadaci

13. Među ovim brojevima zaokruži višekratnike broja 5:



14. Među ovim brojevima prekriži brojeve koji nisu djeljivi s 5:
32, 20, 55, 1, 5, 10, 2, 20, 200, 6000, 45, 54, 540, 1115, 9000.
15. Zapiši najveći i najmanji dvoznamenkast broj djeljiv s 5.
16. Zapiši najveći i najmanji sedmeroznamenkast broj djeljiv s 5.
17. Navedi 6 četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 5.

18. Zadani su brojevi 45, 450, 4500, 320, 5, 10, 2000, 900, 2 000 000, 410, 501, 255, 75, 100, 80 000, 600 000. Koji od ovih brojeva su djeljivi s:

a) 5; b) 10; c) 100; d) 1000?

Razvrstaj te brojeve u tablicu!

djeljivi s 5	djeljivi s 10	djeljivi sa 100	djeljivi s 1000

Zašto se neki brojevi pojavljuju u više stupaca?

19. Od znamenaka 3, 0, 5 složi sve troznamenaste brojeve koji su djeljivi s 5.
20. Od znamenaka 5, 6, 0, 4 složi sve četveroznamenaste brojeve koji su djeljivi s:
- a) 5; b) 10.
21. Zapiši 5 peteroznamenastih brojeva djeljivih s 5.

22. Zapiši sve brojeve djeljive s 5 koji se nalaze između 89 i 114. Nađi ih na brojevnom pravcu.

23. Za svaki od ovih brojeva pronadi prvi veći od njih djeljiv s 5:

broj	prvi veći djeljiv s 5
301	305
484	485
321	
10 001	
999	
327	
342	
123	
654	



24. Jedna od ovih rečenica je točna, a jedna nije. Zaokruži točnu rečenicu i objasni:
- a) Ako je broj djeljiv s 5, onda je djeljiv i s 10;
b) Ako je broj djeljiv s 10, onda je djeljiv i s 5.
25. Zaokruži točne rečenice i objasni:
- a) Ako je broj djeljiv s 5, onda je djeljiv i sa 100;
b) Ako je broj djeljiv s 1000, onda je djeljiv i s 10;
c) Ako je broj djeljiv sa 100, onda je djeljiv i s 5;
d) Ako je broj djeljiv s 1 000 000, onda je djeljiv i s 5.

Primjer 4. Djeljivost s 2

Kako se nazivaju brojevi djeljivi s 2? Pronađi i zapiši pravilo za djeljivost brojem 2.



Rješenje: Brojevi djeljivi s 2 nazivaju se parnim brojevima. I njih možemo prepoznati gledajući samo posljednju znamenku. Zapišimo nekoliko višekratnika broja 2: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, ... Primjećujemo da svaki od ovih višekratnika završava s 0, 2, 4, 6 ili 8. Svaki sljedeći član ovog niza dobije se tako da se prethodni uveća za 2, pa će se znamenke 0, 2, 4, 6 i 8 stalno izmjenjivati na posljednjem mjestu. Stoga zaključujemo: svi višekratnici broja 2 završavaju s 0, 2, 4, 6 ili 8.

Sada zapišimo neke brojeve koji završavaju s 0, 2, 4, 6 ili 8. To su, primjerice, 452, 5 987 500, 5658, 1104, 13 806, 3476 itd. Oni završavaju s 0, 2, 4, 6 ili s 8 i svaki od njih je djeljiv s 2. I odaberemo li bilo koji prirodan broj kojem je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8, on će biti djeljiv s 2 jer se može rastaviti na pribrojnice tako da svaki bude djeljiv s 2. Primjerice, rastavimo broj 3476:

$$3476 = 3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 6$$

NEPARNE BROJEVE ISTO PREPOZNAJEMO PO ZADNJOJ ZNAMENICI: 1, 3, 5, 7 ILI 9.

djeljivo s 2

djeljivost s 2

Na isti način možemo rastaviti svaki prirodni broj. Stoga zaključujemo:

Prirodan broj je djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8.



Zadaci

26. Među ovim brojevima zaokruži parne brojeve:
346, 110, 33, 545, 108, 3, 25, 1, 5, 136, 1 000, 1001, 1014.
27. Među ovim brojevima prekriži brojeve koji nisu djeljivi s 2:
14, 15, 16, 17, 18, 10, 1, 14, 777, 690, 116, 2800, 25 682, 16 773, 1765, 448, 202, 26, 46, 100.
28. Zadani su brojevi 45, 450, 451, 452, 328, 5, 10, 2000, 906, 70 000, 410, 505, 254, 75, 100, 80 008, 600 000.
Koji od ovih brojeva su djeljivi s:
a) 5; b) 10; c) 100; d) 2?
29. Navedi 7 četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 2.
30. Zapiši 5 peteroznamenkastih brojeva djeljivih s 2.
31. Zapiši najmanji i najveći troznamenkast paran broj.
32. a) Zapiši najmanji dvoznamenkasti broj djeljiv s 2 i najmanji dvoznamenkasti broj djeljiv s 5. Koji je veći?
b) Zapiši najveći dvoznamenkasti broj djeljiv s 2 i najveći dvoznamenkasti broj djeljiv s 5. Koji je veći?
33. Od znamenaka 5, 0, 8 složi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi s:
a) 2; b) 5; c) 10.
34. Zadani su brojevi:
23__, 100__, 2__, 51__.
Umetni u prazninu posljednju znamenku tako da broj bude djeljiv s:
a) 2; b) 5; c) 10.
Zapiši i pročitaj sve dobivene brojeve.
35. Zadani su brojevi:
13__, 1__, 69__, 40__.
Umetni u prazninu posljednju znamenku tako da broj:
a) bude djeljiv s 2, ali ne i s 10;
b) bude djeljiv s 5, ali ne i s 10.
36. Zapiši sve brojeve djeljive s 2 koji se nalaze između 167 i 194. Nađi ih na brojevnom pravcu.
37. Zaokruži točne rečenice i objasni:
a) Ako je broj djeljiv s 2, onda je djeljiv i s 5;
b) Ako je broj djeljiv s 10, onda je djeljiv i s 2;
c) Ako je broj djeljiv s 2, onda je djeljiv i sa 100;
d) Ako je broj djeljiv s 1 000 000, onda je djeljiv i s 2.

2.5. Djeljivost s 3 i 9

Višekratnici od 3 i 9

U tablicu zapiši prvih 20 višekratnika brojeva 3 i 9.

Višekratnici od 3:

3	6	9	12																
---	---	---	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Višekratnici od 9:

9	18	27	36																
---	----	----	----	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Pogledaj posljednju znamenku svakog broja iz tablice i odgovori na pitanja:

a) Koji brojevi se pojavljuju na mjestu posljednje znamenke u višekratnicima od 3: _____

b) Koji brojevi se pojavljuju na mjestu posljednje znamenke u višekratnicima od 9: _____

Ako želimo provjeriti je li broj 25 308 djeljiv s 3 ili s 9, možemo ga podijeliti sa svakim od ovih brojeva i uvjeriti se kakav mu je ostatak. Ako pri dijeljenju s 3 nema ostatka, znači da je zadani broj djeljiv s 3. Ako ni pri dijeljenju s 9 nema ostatka, znači da je zadani broj djeljiv s 9.

Međutim, djeljivost s 3 i 9 može se odrediti i na mnogo brži način od dijeljenja. Pogledajmo kako.

Iz uvodnog zadatka smo primijetili da posljednja znamenka brojeva djeljivih s 3 može biti bilo koja od 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ili 9. Dakle, pravilo djeljivosti s brojem 3 se ne odnosi na uočavanje posljednje znamenke, već na nešto drugo. Pogledajmo što.

$$25\,308 : 3 = 8436$$

$$35\,308 : 9 = 2812$$

Primjer 1. Djeljivost s 3

- a) Zapiši jedan troznamenkasti, jedan četveroznamenkasti i jedan sedmeroznamenkasti višekratnik broja 3;

- b) Ispuni tablicu:

Višekratnik od 3	Zbroj znamenaka
12	3
15	
18	
21	
24	
27	
30	
33	
351	
7821	
3 690 060	

- c) Kako glasi pravilo djeljivosti brojem 3?

djeljivost s 3

Rješenje:

- a) Svatko može naći svoj primjer višekratnika, ali ne zaboravimo dijeljenjem provjeriti radi li se zaista o višekratniku broja 3. Na primjer, troznamenkasti višekratnik broja 3 je 351 jer je $351 = 117 \cdot 3$, četveroznamenkasti višekratnik je 7821 jer je $7821 = 2607 \cdot 3$, a sedmeroznamenkasti višekratnik od 3 je 3 690 060 jer je $3\,690\,060 = 1\,230\,020 \cdot 3$;
- b) Znamenke broja 12 su 1 i 2, a njihov zbroj je $1 + 2 = 3$, pa u drugi redak ispod broja 12

zapišimo 3. Na isti način zbrojimo znamenke svakog od danih višekratnika i dobijemo tablicu:

Višekratnik od 3	Zbroj znamenaka
12	3
15	6
18	9
21	3
24	6
27	9
30	3
33	6
351	9
7821	18
3 690 060	24

Nakon popunjavanja tablice dobivamo da su svi brojevi u drugom retku djeljivi s 3. To vrijedi za sve brojeve djeljive s 3. Stoga zaključujemo: ako je prirodni broj djeljiv s 3, onda je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 3.

To možemo reći i ovako: ako zbroj znamenaka nije djeljiv s 3, onda ni taj broj nije djeljiv s 3.

- c) Sada odaberimo neke brojeve kojima je zbroj znamenaka djeljiv s 3, npr. 357, 4737, 25 308, 81, 70 002, 56 706, 45 i 33 906. Želimo znati je li svaki taj broj i sam djeljiv s 3. Rastavimo broj 25308 po mjesnim vrijednostima:

$$25\,308 = 2 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8$$

Primijetimo da dekadске jedinice 10, 100, 1000 itd. možemo zapisati u obliku

$$10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1 \text{ itd.}$$

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1 \\ 100 &= 99 + 1 \\ 1000 &= 999 + 1 \text{ itd.} \end{aligned}$$

Primijenimo sada svojstvo distributivnosti:

$$\begin{aligned} 25\,308 &= 2 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 8 = \\ &= 2 \cdot (9999 + 1) + 5 \cdot (999 + 1) + 3 \cdot (99 + 1) + 0 \cdot (9 + 1) + 8 = \\ &= 2 \cdot 9999 + 2 + 5 \cdot 999 + 5 + 3 \cdot 99 + 3 + 0 + 8 = \\ &= \boxed{2 \cdot 9999} + \boxed{5 \cdot 999} + \boxed{3 \cdot 99} + 2 + 5 + 3 + 0 + 8 \end{aligned}$$

Uokvireni pribrojnici su djeljivi s 3 jer je jedan od njihovih faktora 9 ili 99 ili 999 itd., a to su višekratnici od 3. O zbroju brojeva 2, 5, 3, 0 i 8 ovisit će hoće li cijeli zbroj biti djeljiv s 3 i 9. Primijetimo da su 2, 5, 3, 0 i 8 upravo znamenke broja 25 308.

$$25308 = \underbrace{2 \cdot 9999 + 5 \cdot 999 + 3 \cdot 99}_{\text{djeljivo s 3}} + \underbrace{2 + 5 + 3 + 0 + 8}_{\text{djeljivo s 3}}$$

Kako je svaki od pribrojnika djeljiv s 3, onda i rezultat 25308 mora biti djeljiv s 3. To je svojstvo djeljivosti zbroja. To vrijedi i za svaki drugi broj kojem je zbroj znamenaka djeljiv s 3. Stoga zaključujemo:

Prirodni broj je djeljiv s 3, ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.

Primjer 2. Djeljivost s 9

Zadani su brojevi 21 654, 345, 693 i 21 105.

- Dijeljenjem provjeri jesu li ovi brojevi djeljivi s 9;
- Zbroji znamenke svakog od brojeva;
- Pokušaj izreći pravilo za djeljivost brojem 9.

Rješenje:

- Nakon dijeljenja zadanih brojeva s 9, zaključujemo da su 21 654, 693 i 21 105 djeljivi s 9, dok broj 345 to nije.

- Zbrojimo znamenke svakog od zadanih brojeva:

Zadani broj	21 654	345	693	21 105
Zbroj znamenaka	18	12	18	9
Je li broj djeljiv s 9	da	ne	da	da

Zbroj znamenaka brojeva 21 654, 693 i 21 105 je višekratnik od 9. Uzmemo li bilo koji drugi višekratnik od 9, vrijedit će da mu je i zbroj znamenaka djeljiv s 9. Stoga zaključujemo: ako je prirodni broj djeljiv s 9, onda je i zbroj njegovih znamenaka djeljiv s 9.

To možemo reći i ovako: ako zbroj znamenaka nije djeljiv s 9, onda ni taj broj nije djeljiv s 9.

- Kao i kod djeljivosti s 3, odaberimo neke brojeve kojima je zbroj znamenaka djeljiv s 9, npr. 387, 9099, 81, 70 002, 56 700, 45 i 33 903. Želimo znati je li svaki taj broj i sam djeljiv s 9. Dijeljenjem se uvjerimo da jest. Evo zašto:

$$25308 = \underbrace{2 \cdot 9999 + 5 \cdot 999 + 3 \cdot 99}_{\text{djeljivo s 9}} + \underbrace{2 + 5 + 3 + 0 + 8}_{\text{djeljivo s 9}}$$

Prisjetimo se rastavljanja broja 25 308 po mjesnim vrijednostima.

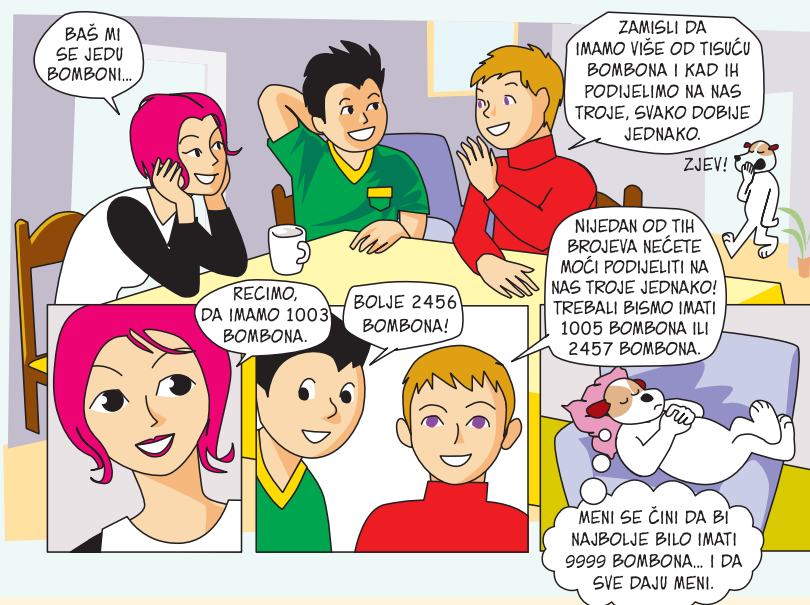
Kako je svaki od pribrojnika djeljiv s 9, onda i rezultat 25 308 mora biti djeljiv s 9. To je svojstvo djeljivosti zbroja. To vrijedi i za svaki drugi broj kojem je zbroj znamenaka djeljiv s 9. Stoga zaključujemo:

Prirodan broj je djeljiv s 9, ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Ako znamo da je zbroj

$$2 \cdot 9999 + 5 \cdot 999 + 3 \cdot 99 + \underbrace{2 + 5 + 3 + 0 + 8}_{\text{djeljivo s 9}}$$

djeljiv s 9, onda je sigurno djeljiv s 3. I gotovo!



8. Provjeri je li Luka u pravu! Kako je on mogao tako brzo znati odgovore? Je li Beni u pravu?

Primjer 3.

Zadani su brojevi 12, 18, 21, 66, 90, 33, 81, 51, 15, 270.

- Koji od tih brojeva su djeljivi s 3, a nisu djeljivi s 9?
- Koji od tih brojeva su djeljivi s 9, a nisu djeljivi s 3?

Rješenje:

- Primijetimo da su svi zadani brojevi djeljivi s 3. Među njima treba naći one brojeve koji nisu djeljivi s 9. To su 12, 21, 66, 33, 51 i 15;
- Brojevi koji su djeljivi s 9 su 18, 90, 81 i 270. No svi oni su djeljivi s 3 jer im je zbroj znamenaka višekratnik od 3. To znači da nema broja koji je djeljiv s 9, a da nije djeljiv s 3.

Zadaci

- U drugi stupac tablice zapiši zbroj znamenaka svakog zadanog broja, a u treći s DA ili NE odgovori je li zadani broj djeljiv s 3.

Broj	Zbroj znamenaka	Je li broj djeljiv s 3?
395	17	ne
375	15	da
459		
5789		
437		
1023		
351		
49 807		
444		
57 108		
123 456		

- Zaokruži brojeve koji su djeljivi s 3:
390, 101, 102, 2508, 4446, 3206, 404, 207, 6000, 5 000 000, 3, 45, 1.
- Zapiši 2 troznamenkasta broja djeljiva s 3.
- Zapiši 3 peteroznamenkasta broja djeljiva s 3.
- Zapiši neki sedmeroznamenkasti broj djeljiv s 3, koji ima sve znamenke različite. Pročitaj ga!
- Umetni znamenku tako da broj bude djeljiv s 3:
43_, 5_1, 9_, 5_6, 2365_, 2_, 4_86521.
- Lukini roditelji su kupili tri jednaka stolca. Ukupna cijena je bila 1 🤑 78 kn.
– Mala sestra je pošarala račun! – rekao je Luka.
– Što misliš, koja znamenka nedostaje? – pitao je tata Luku.
– A zatim izračunaj koliko stoji jedan stolac – dodala je mama.

Zadaci

9. U drugi redak tablice zapiši zbroj znamenaka svakog zadanog broja, a u treći s DA ili NE odgovori je li zadani broj djeljiv s 9.

Broj	Zbroj znamenaka	Je li djeljiv s 9?
232	7	NE
8011		
7776		
1023		
8290		
335 602		
558		
90 326		

10. Zaokruži brojeve djeljive s 9:
34, 324, 90 009, 1431, 786, 5058, 9297, 6715, 2000, 4041, 5 050 507, 32 809, 9, 18, 1.
11. Koje znamenke možeš umetnuti na prazno mjesto u broju, tako da broj bude djeljiv s 9:
21__,
9__1,
9__,
4__6,
2365__,
3__,
4__3333?
12. Zapiši broj djeljiv s 9 kojem su sve znamenke različite tako da taj broj bude:
a) dvoznamenkast; b) troznamenkast;
c) četveroznamenkast; d) peteroznamenkast.
13. Škola je kupila 9 računala, ukupno ih plativši 46__07 kn.
a) Koja znamenka nedostaje?
b) Koliko stoji jedno računalo?
14. Zapiši jedan broj:
a) koji je djeljiv s 3 i 5;
b) koji je djeljiv s 3 i 10;
c) koji je djeljiv s 9 i 2;
d) koji je djeljiv s 9, 5 i 2.
15. Zapiši jedan broj:
a) koji je djeljiv s 3, ali nije djeljiv s 9;
b) koji je djeljiv s 9, ali nije djeljiv s 3.
Što zaključuješ?
16. Zapiši sve brojeve između 60 i 100:
a) djeljive s 3;
b) djeljive s 9.
Kojih ima više i zašto?
17. Koje znamenke možeš upisati na mjesto jedinica u broju 3045__, tako da broj bude djeljiv s:
a) 1;
b) 2;
c) 3;
d) 5;
e) 9;
f) 10?
18. Koji je najmanji broj djeljiv s 3 kojem su sve znamenke 1?
19. Koji je najmanji broj djeljiv s 9 kojem su sve znamenke 1?
20. Koji je najmanji broj djeljiv s 9 kojem su sve znamenke 3?
21. Koji je najmanji četveroznamenkasti broj djeljiv s 3? A najveći?
22. Koji je najmanji četveroznamenkasti broj djeljiv i s 3 i s 5?
23. Je li umnožak tri uzastopna neparna broja djeljiv s 3? Objasni odgovor.
24. Napiši pet šesteroznamenkastih brojeva koji su djeljivi s:
a) 2;
b) 3;
c) 5;
d) 9;
e) 10.
25. Brojevi 12, 18, 24, 30, 36 djeljivi su sa 6. Kako možeš prepoznati je li broj djeljiv sa 6? Objasni.

Vježbalica

1. Nađi sve prirodne brojeve $40 < n < 404$ za koje vrijedi da je n djeljiv s 10.
2. Među ovim brojevima prekriži brojeve koji nisu djeljivi s 5:
37, 50, 75, 45, 58, 1, 27, 120, 270, 60001, 4, 5, 54, 1105, 90.
3. Zadani su brojevi 35, 350, 355, 3500, 425, 5, 80, 2070, 800, 3000000, 470, 5501, 655, 85, 33300, 760, 23000. Koji od ovih brojeva su djeljivi s:
a) 5; b) 10; c) 100; d) 1000?
4. Nađi sve prirodne brojeve $n < 50$ za koje vrijedi da je $n + 2$ djeljiv s 10.
5. Nađi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi da je $n - 3$ djeljiv s 10.
6. Nađi sve prirodne brojeve $10 < n < 1001$ za koje vrijedi da je $n + 5$ djeljiv sa 100.
7. Nađi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi da je $39 - n$ djeljiv s 10.
8. Od znamenaka 3, 0, 5 složi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi s 5.
9. Od znamenaka 5, 7, 0, 1 složi sve četveroznamenkaste brojeve koji su djeljivi s:
a) 5; b) 10.
10. Zapiši sve brojeve djeljive s 5 koji se nalaze između 19 i 48.
11. Zapiši sve brojeve n takve da je $50 < n < 101$ koji su djeljivi s 5.
12. Nađi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi da je $53 - n$ djeljiv s 5.
13. Nađi sve prirodne brojeve n između 64 i 90 za koje vrijedi da je $n + 4$ djeljiv s 5.
14. Zadani su brojevi 75, 750, 754, 41, 28, 225, 160, 130, 96, 60000. Koji od ovih brojeva su djeljivi s:
a) 5; b) 10; c) 100; d) 2?
15. Od znamenaka 5, 0, 6 složi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi s:
a) 2; b) 5; c) 10.
16. Zapiši sve brojeve djeljive s 2 koji se nalaze između 16 i 25.
17. Zadani su brojevi: 14□, 7□, 32□, 50□. Umetni u kvadratić posljednju znamenku tako da broj:
a) bude djeljiv s 2, ali ne i s 10;
b) bude djeljiv s 5, ali ne i s 10.
18. Nađi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi da je $27 - n$ paran broj.
19. Nađi sve prirodne brojeve n za koje vrijedi da je $n + 17$ paran broj.
20. Zaokruži brojeve koji su djeljivi s 3:
111, 2134, 435, 2507, 6546, 8726, 44, 4407, 2300, 5007000, 9, 66, 2.
21. Koje znamenke možeš umetnuti tako da broj bude djeljiv s 3: 73□, 6□3, 8□, 4□6, 7773□, 65□, 2□83231.
22. Koje znamenke možeš umetnuti tako da broj bude djeljiv s 3: 83□, 9□7, 3□, 7□3, 3673□, 47□, 88□831.
23. Zaokruži brojeve djeljive s 9:
38, 37689, 9070209, 5464, 334, 3465, 76789, 239, 2009, 499, 5567, 356, 27, 63, 17.
24. Koje znamenke možeš umetnuti tako da broj bude djeljiv s 9: 675□, 9□55, 34□, 564□6, 23□, 89□1, 7□873.
25. Koje znamenke možeš umetnuti tako da broj bude djeljiv s 9: 575□, 9□23, 7777□, 574□6, 389□, 45□1, 2□773.
26. Zapiši sve brojeve n takve da je $50 < n < 101$ koji su djeljivi s 9.
27. Je li broj 345286594 djeljiv s 3 i zašto?
28. Je li zbroj $4545672 + 334455399 + 323232$ djeljiv s 3 i zašto?
29. Je li rješenje $7326 - 18 + 3456784512$ djeljivo s 9 i zašto?
30. Je li broj 4545678697860 djeljiv s 5 i zašto?
31. Zapiši tri broja:
a) koji su djeljivi s 2 i 9;
b) koji su djeljivi s 9 i 10;
c) koji su djeljivi s 5 i 2;
d) koji su djeljivi s 3, 5 i 2.
32. Je li broj 33354 djeljiv s 18 i zašto?
33. Je li broj 4562115 djeljiv s 15 i zašto?
34. Je li broj 23454345 djeljiv sa 6 i zašto?
35. Je li broj 454567670 djeljiv s 30 i zašto?
36. Je li broj 54685 djeljiv s 15 i zašto?
37. Je li broj 3435645 djeljiv s 18 i zašto?
38. Je li broj 4572 djeljiv sa 6 i zašto?
39. Je li broj 4545000 djeljiv s 90 i zašto?
40. Je li broj 234234243 djeljiv sa 6 i zašto?
41. Je li broj 88800 djeljiv s 15 i zašto?

2.6. Prosti i složeni brojevi

Koliko djelitelja?

a) Koliko djelitelja ima broj 12? Koji su to djelitelji?

b) Ispuni tablicu:

Broj	10	11	13	25	30	31	36
Djelitelji zadanog broja:	1, 2, 5, 10						
Koliko djelitelja ima?	4						

Brojevi koji imaju samo dva djelitelja, broj 1 i sebe sama nazivaju se **prosti brojevi**.

To su, primjerice, brojevi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, itd.

Proste brojeve nazivamo i prim-brojevima ili jednostavnim brojevima.

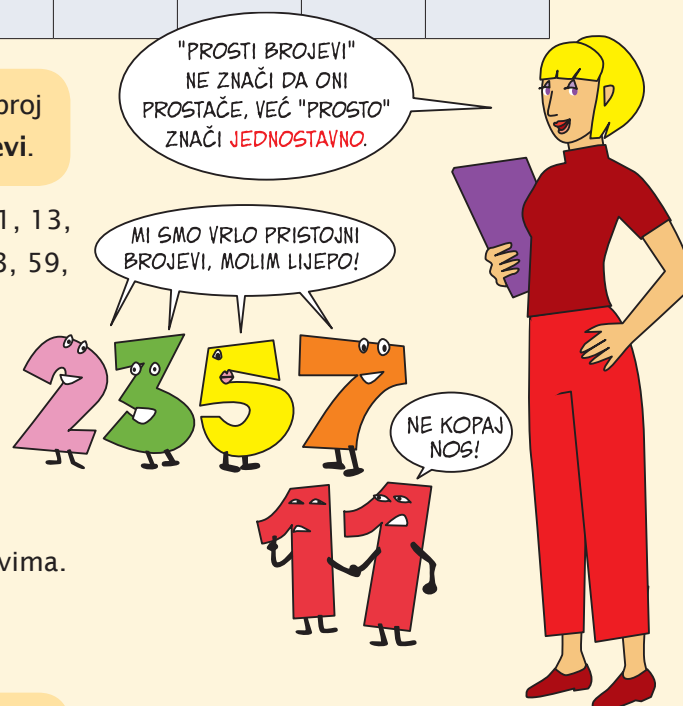
Brojevi koji imaju više od dva djelitelja nazivaju se **složeni brojevi**.

To su, primjerice, brojevi 4, 6, 8, 9, 10, 25 itd.

Primijetimo da broj 1 nije ubrojen ni u proste ni u složene brojeve. Broj 1 nije ni prost ni složen broj.



Broj 1 nije ni prost ni složen broj.



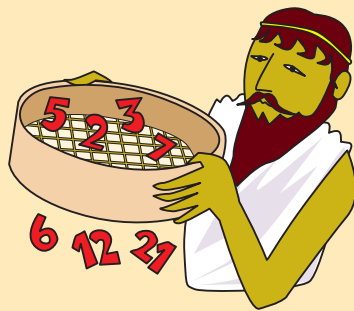
prosti
brojevi



složeni
brojevi



Primjer 1. Eratostenovo sito



Grčki mudrac Eratosten, koji je živio oko 200. god. prije Krista, došao je na ideju kako proste brojeve "odijeliti" od složenih. Po njemu se taj postupak i danas naziva **Eratostenovo**

sito.

Evo Eratostenove ideje:

- Zapišimo prirodne brojeve od 1 do željenog broja. Npr. do 100. Složimo ih u redove kao na slici.
- Precrtajmo broj 1 jer to nije ni prost ni složen broj.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100	101	102

• Prvi sljedeći slobodan broj je 2. Zaokružimo ga. Precrtajmo sve višekratnike broja 2 jer su oni složeni brojevi.

• Prvi sljedeći slobodan broj je 3. Zaokružimo ga. Precrtajmo sve višekratnike broja 3 jer su oni složeni brojevi.

• Zaokružimo prvi sljedeći slobodan broj, a njegove višekratnike precrtajmo. Ponavljajmo postupak sve dok ima slobodnih brojeva.

Na kraju će svi zaokruženi brojevi biti prosti, a prekriženi složeni. Tako iz crteža vidimo da su brojevi 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59 itd. prosti, a dobiveni su Eratostenovim sitom.

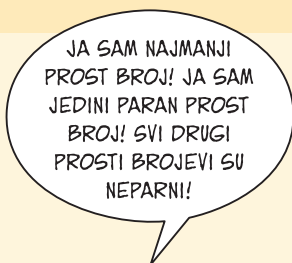
Ovaj postupak se zove "sito" jer ga možemo usporediti s pravim sitom ili cjedilom, gdje kroz rupice izlaze složeni brojevi, a u situ ostaju samo prosti brojevi.

Primjer 2. Najmanji i najveći prosti broj



Pogledajmo tablicu prostih brojeva do 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.



Najveći prost broj

Matematičari se i danas natječu tko će naći veći prost broj. Najveći prost do danas pronađen broj je $2^{756839}-1$. On je zapisan na ovako "čudan" način jer kada bismo ga zapisali u dekadskom obliku, on bi imao 227 832 znamenke. Kada bismo ga željeli zapisati, on bi bio dugačak preko jednog kilometra!

Natječaj za još veće proste brojeve je otvoren, a nagrade su vrlo velike. Možda ćeš upravo ti biti matematičar koji će otkriti sljedeći prosti broj!

Evo jednog velikog prostog broja:

170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727

Pročitaj ga!

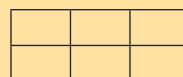
Primjer 3. Složeni brojevi

Koristeći se pravilima djeljivosti pokaži da su sljedeći brojevi složeni: 155, 2097, 111 111, 800, 725, 892.

Rješenje:

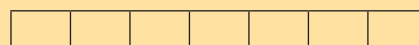
Znamo da prosti brojevi imaju samo dva djelitelja: 1 i sebe sama. Složeni brojevi osim 1 i sebe sama imaju bar još jednog djelitelja. Dovoljno je za svaki od ponuđenih brojeva pronaći još jedan djelitelj pa da zaključimo da se radi o složenim brojevima. Tako po posljednjoj znamenici zaključujemo da su 155 i 725 djeljivi s 5, a da su 800 i 892 djeljivi s 2. Zbrojimo li znamenke od 111 111 i 2097 zaključit ćemo da su ti brojevi djeljivi s 3. Dakle, svi ponuđeni brojevi su složeni brojevi.

Broj 6 je složen broj jer se može "složiti" kao $3 \cdot 2$. Složene brojeve možemo nacrtati u obliku pravokutnika koji se sastoje od više redaka kao na slici:



$$6 = 2 \cdot 3$$

Proste brojeve možemo prikazati samo u jednom retku:



$$7 = 7 \cdot 1$$

Kako možeš u obliku pravokutnika "nacrtati" brojeve 10, 11 i 12?

UČITELJICE, KAKO DA ZNAM JE LI NEKI VELIKI BROJ PROST?

KRENEŠ REDOM I PROVJERAVAŠ: JE LI DJELJIV S 2, JE LI DJELJIV SA 3 ITD.



Zadaci

1. Ispuni tablicu i odgovori koji od zadanih brojeva su prosti:

Broj:	43	54	65	76	87	57	13	2	22
Djelitelji:									
Je li prost?									

2. Koji od sljedećih brojeva su prosti:
455, 29, 1, 22, 2, 100, 1001, 255, 97, 43, 44, 77, 83, 265?
3. Među zadanim brojevima zaokruži proste brojeve:
6, 3, 12, 24, 23, 25, 29, 1, 31, 11, 2, 13, 10.
4. Nađi sve djelitelje ovih brojeva i zaokruži proste brojeve:
67, 18, 99, 40, 102, 201, 67, 49, 22, 1, 15, 3, 11, 111, 1111.
5. Koristeći se pravilima djeljivosti pokaži da su sljedeći brojevi složeni:
22, 45, 130, 297, 27, 406, 555, 72, 28.
6. a) Napiši sve proste brojeve koji se nalaze između 10 i 30;
b) Napiši sve proste brojeve koji se nalaze između 84 i 134.
7. Zapiši sve djelitelje broja 36. Zaokruži njegove proste djelitelje.
8. Zapiši sve djelitelje broja 90. Zaokruži njegove proste djelitelje.

9. Je li broj 91 prost ili složen broj?
10. Zašto je broj 2 jedini parni prost broj?
11. Koji je najmanji neparni prost broj? A najveći?
12. Nađi najmanji i najveći dvoznamenkast prost broj.
13. Nađi najmanji i najveći troznamenkast prost broj.
14. Nađi dva prosta broja čija je razlika 2. Možeš li naći još koji takav par?
15. Nađi dva prosta broja čija je razlika 1. Možeš li naći još koji takav par?
16. Nađi dva broja djeljiva sa 6 kojima su prethodnik i sljedbenik prosti brojevi.
17. **Brojevi blizanci**
Dva prosta broja čija je razlika 2 nazivaju se brojevi blizanci. Na primjer, to su brojevi 3 i 5. Ili, 5 i 7.
Pronađi sve brojeve blizance manje od 110.
18. Je li broj tvojih godina prost ili složen broj?
19. Je li je dan, mjesec ili godina tvog rođenja prost broj?
20. Mogu li bilo koja dva uzastopna broja biti prosta?
21. Je li umnožak dvaju prostih brojeva prost ili složen broj? Navedi primjer.

2.7. Rastavljanje broja na proste faktore

Rastavi 150 na faktore

Broj 150 prikaži kao umnožak dvaju, triju, četiriju ili pet faktora. Pronađi sva moguća rješenja.

$$150 = 15 \cdot 10$$

umnožak ili produkt faktori

$$\begin{aligned} 150 &= _ \cdot _ \\ 150 &= _ \cdot _ \cdot _ \\ 150 &= _ \cdot _ \cdot _ \cdot _ \\ 150 &= _ \cdot _ \cdot _ \cdot _ \cdot _ \end{aligned}$$

Vidimo da se broj 150 može zapisati u obliku umnoška na mnogo načina. Kažemo da smo broj 150 **rastavili na faktore**. Rastaviti broj na faktore znači zapisati ga u obliku umnoška dvaju ili više brojeva.

Primjer 1. Rastavljanje broja na faktore

Broj 40 rastavi na faktore. Pronađi sva rješenja.

Rješenje:

Pogledajmo ove rastave broja 40 kao umnoška dvaju, triju, četiriju, pet, šest itd. faktora:

$$40 = 1 \cdot 40$$

$$40 = 1 \cdot 1 \cdot 40$$

$$40 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 40$$

$$40 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 40$$

itd.

Zaključujemo da se broj 40 može na beskonačno mnogo načina zapisati u obliku umnoška pomoću faktora 1. Izostavimo li među faktorima broj 1, dobit ćemo konačno mnogo rješenja. Budući da će biti više načina na koji se broj 40 može rastaviti na faktore, krenimo nekim redoslijedom kako ne bismo preskočili koji rastav. Krenimo od broja 2 prema većim faktorima:

$$40 = 2 \cdot 20,$$

$$40 = 4 \cdot 10,$$

$$40 = 5 \cdot 8.$$

U rastavu $40 = 2 \cdot 20$ faktor 20 je složen broj i možemo ga rastaviti na faktore:

$$\begin{aligned} 40 &= 2 \cdot 20 \\ &\quad \swarrow \searrow \\ &\quad 2 \cdot 10 \\ &\quad 4 \cdot 5 \end{aligned}$$

rastavljanje na faktore

Zato 40 možemo zapisati kao umnožak triju faktora:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 10, \quad 40 = 2 \cdot 4 \cdot 5.$$

Rastavimo li složene faktore, dobivamo:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5.$$

Primijetimo da su u ovom rastavu svi faktori prosti i da ga zato ne možemo dalje rastavljati. Kažemo da smo broj 40 **rastavili na proste faktore**.

rastavljanje na proste faktore

$$\left. \begin{aligned} 40 &= 2 \cdot 20 \\ 40 &= 4 \cdot 10 \\ 40 &= 5 \cdot 8 \\ 40 &= 2 \cdot 2 \cdot 10 \\ 40 &= 2 \cdot 4 \cdot 5 \end{aligned} \right\} \text{ broj 40 smo rastavili na faktore}$$

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \left. \right\} \text{ broj 40 smo rastavili na proste faktore}$$

Primjer 2.

Rastavljanje na proste faktore

Broj 100 rastavi na proste faktore.

Rješenje:

Broj 100 treba rastaviti na faktore tako da svi faktori budu prosti brojevi.

Krenimo nekim redoslijedom da ne bismo preskočili koji rastav. Obično krećemo od najmanjeg prostog broja 2.

$$\begin{aligned} 100 &= 2 \cdot 50 \\ &\quad \swarrow \searrow \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \end{aligned}$$

Nastavljamo postupak rastavljanja složenih faktora dok svi faktori ne budu prosti. Rastav broja 100 na proste faktore glasi:

$$100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5.$$

Primijetimo da se svaki složeni broj samo na jedan način može prikazati kao umnožak prostih faktora. Kada bismo broj 100 nekim

drugim putem rastavljali na faktore, opet bismo na kraju dobili iste proste faktore.

$$\text{Npr. } 100 = 25 \cdot 4 = 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \text{ ili}$$

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \cdot 10 \\ &= 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \end{aligned}$$

Rastavljanje na proste faktore pomoću okomite crte:

100	2	Broj 100 dijelimo s prostim brojem 2 i u novi red zapisujemo količnik 50. Zatim
50	2	50 dijelimo s 2 i u novi red zapisujemo količnik 25. Zatim
25	5	25 dijelimo s nekim prostim faktorom s kojim ga je moguće podijeliti, a to je 5. Postupak nastavljamo dok ne dobijemo količnik 1.
5	5	Brojevi u desnom stupcu su prosti faktori od 100.
1		

Primjer 3. Određivanje svih djelitelja prirodnog broja

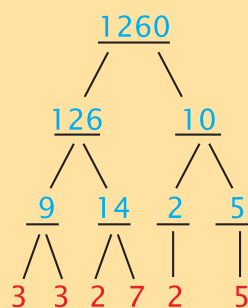
Rastavi broj 28 na proste faktore pa odredi sve njegove djelitelje.

Rješenje:

Rastavimo broj 28 na proste faktore: $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$. Iz ovog rastava primjećujemo da su djelitelji od 28 brojevi 2 i 7. No, kombiniranjem faktora dobivamo i druge djelitelje broja 28. To su i $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 7 = 14$ i $2 \cdot 2 \cdot 7 = 28$. Zaključujemo da su djelitelji od 28 brojevi 1, 2, 4, 7, 14 i 28.

Rastavljanje pomoću stabla

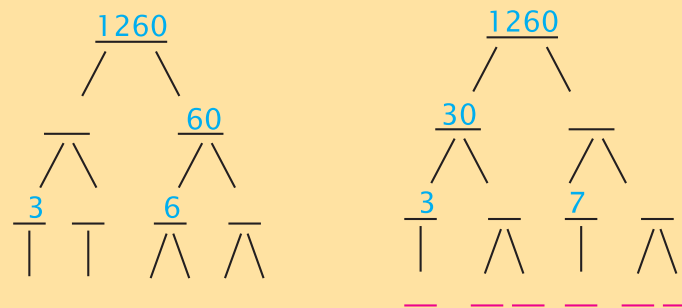
Na proste faktore možemo rastavljati i u obliku stabla:



Pomoću stabla rastavi na proste faktore brojeve 3 150 i 11 550.

Pogledaj ovo:

Bez obzira na to kojim redoslijedom rastavljaš, na kraju ćeš dobiti iste proste faktore! Dopuni i uvjeri se:



Zadaci



1. Rastavi na proste faktore brojeve 34, 22, 56, 13 i 28.
2. Rastavi na proste faktore brojeve 20, 45, 72, 99, 130 i 210.
3. Rastavi na proste faktore brojeve 40, 65, 64, 81, 25 i 87.
4. Rastavi na proste faktore brojeve 10, 100, 1000, 10 000.
5. Rastavi na proste faktore brojeve 200, 300, 500 i 700.
6. Rastavi na proste faktore brojeve 8, 32, 64, 128, 1024, 27, 625, 216, 81.
7. Zapiši u obliku umnoška prostih brojeva: 330, 420, 8100, 1024, 444, 5050, 360, 900, 78 125.
8. Zapiši u obliku umnoška prostih brojeva: 8000, 60 025, 99 099, 40 500, 102 400.
9. U prazninu upiši broj koji nedostaje:
a) $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$; b) $90 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$;
c) $462 = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$; d) $306 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}}$.
10. Rastavi na proste faktore brojeve 7, 11, 13, 19, 23. Što primjećuješ?
11. Rastavi na proste faktore brojeve 9, 25, 49, 121. Što primjećuješ?
12. Pokaži da su ovi umnošci isti tako što ćeš ih rastaviti na proste faktore: $45 \cdot 2$, $9 \cdot 10$, $3 \cdot 10 \cdot 3$.
13. Rastavi na proste faktore brojeve 242, 2002, 247, 2873.
14. Iz rastava $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$ možemo prepoznati djelitelje broja 20. To su 2 i 5. Množenjem dobivamo djelitelje $2 \cdot 2 = 4$ i $2 \cdot 5 = 10$. Djelitelji broja 20 su 1, 2, 4, 5, 10 i 20. Rastavi na proste faktore pa odredi djelitelje ovih brojeva: 32, 36, 38, 40, 42.
15. Broj 60 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 60.
16. Broj 81 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 81.
17. Broj 72 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 72.
18. Broj 420 rastavimo na proste faktore, $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
Iz ovog rastava snalažljivo odredi koliko je:
a) $420 : 7$; b) $420 : 4$; c) $420 : 28$;
d) $420 : 14$; e) $420 : 15$; f) $420 : 35$.
19. Broj 504 rastavi na proste faktore i snalažljivo odredi koliko je:
a) $504 : 8$; b) $504 : 36$; c) $504 : 21$; d) $504 : 84$.
20. Broj 2592 rastavi na proste faktore. Zatim iz tog rastava zaključi je li 2592 djeljiv s:
a) 18; b) 36; c) 16.
21. Zamislila sam prirodan broj. Kada ga rastavim na proste faktore, svi njegovi faktori će biti trojke. Tih trojki ima 7. Koji broj sam zamislila?
22. Zamislio sam prirodan broj. Kada ga rastavim na proste faktore, on ima 7 prostih faktora: dvije dvojke, jednu jedanaesticu, a ostalo su petice. Koji je to broj?
23. Odredi sve brojeve manje od 400 koji se mogu rastaviti na:
a) točno 2 jednaka prosta faktora;
b) točno 3 jednaka prosta faktora;
c) točno 4 jednaka prosta faktora;
d) samo 5 jednakih prostih faktora.
24. Nađi najveći troznamenkasti broj koji ima točno 3 jednaka prosta djelitelja.
25. Nađi dva broja koji su djeljivi s 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Koji je najmanji takav broj?

Vježbalica

1. Ispuni tablicu i odgovori koji od zadanih brojeva su prosti:

Broj:	40	18	21	54	17	16	28	39	41
Djelitelji:									
Je li prost?									

2. Koji od sljedećih brojeva su prosti:

56, 35, 78, 27, 67, 134, 1011, 256, 99, 41, 45, 75, 81, 26.

3. Među zadanim brojevima zaokruži proste brojeve:

34, 37, 21, 91, 344, 215, 31, 113, 111, 19, 23, 73, 100.

4. Nađi sve djelitelje ovih brojeva i zaokruži proste brojeve:

66, 17, 90, 47, 104, 207, 61, 49, 121, 119, 175, 53.

5. Koristeći se pravilima djeljivosti pokaži da su sljedeći brojevi složeni: 44, 46, 560, 396, 549, 722277.

6. Napiši sve proste brojeve koji se nalaze između 50 i 90.

7. Napiši sve proste brojeve koji se nalaze između 32 i 54.

8. Zapiši sve djelitelje broja 42. Zaokruži njegove proste djelitelje.

9. Zapiši sve djelitelje broja 510. Zaokruži njegove proste djelitelje.

10. Nađi dva broja djeljiva sa 11 kojima su prethodnih i sljedbenik prosti brojevi.

11. Rastavi na proste faktore brojeve 25, 35, 12, 39, 150 i 270.

12. Rastavi na proste faktore brojeve 47, 85, 16, 111, 27 i 88.

13. Rastavi na proste faktore brojeve 15, 105, 115, 102.

14. Broj 48 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 48.

15. Broj 72 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 72.

16. Broj 18 rastavi na proste faktore. Zatim odredi sve djelitelje broja 18.

17. Broj 360 rastavimo na proste faktore. Iz ovog rastava snalažljivo odredi koliko je:
a) $360 : 2$; b) $360 : 5$; c) $360 : 10$;
d) $360 : 8$;
e) $360 : 15$; f) $360 : 20$.

18. Broj 8820 rastavi na proste faktore i snalažljivo odredi koliko je:
a) $8820 : 4$; b) $8820 : 49$;
c) $8820 : 21$; d) $8820 : 84$.

19. Broj 4725 rastavi na proste faktore i snalažljivo odredi koliko je:
a) $4725 : 9$; b) $4725 : 7$;
c) $4725 : 27$; d) $4725 : 35$.

20. Broj 5250 rastavi na proste faktore i snalažljivo odredi koliko je:
a) $5250 : 7$; b) $5250 : 49$;
c) $5250 : 15$; d) $5250 : 125$.

21. Broj 360 rastavi na proste faktore i snalažljivo odredi koliko je:
a) $360 : 4$; b) $360 : 15$; c) $360 : 24$; d) $360 : 45$.

22. Broj 1980 rastavi na proste faktore. Zatim iz tog rastava zaključi je li djeljiv s:
a) 11; b) 15; c) 55.

23. Broj 1764 rastavi na proste faktore. Zatim iz tog rastava zaključi je li djeljiv s:
a) 12; b) 14; c) 63.

24. Broj 5250 rastavi na proste faktore. Zatim iz tog rastava zaključi je li djeljiv s:
a) 14; b) 21; c) 125.

25. Broj 6561 rastavi na proste faktore. Zatim iz tog rastava zaključi je li djeljiv s:
a) 9; b) 27; c) 21.

2.8. Najveći zajednički djelitelj

Jabuke i breskve

Mama je u košari donijela 24 jabuke i 18 bresaka. Na koliko se djece može podijeliti to voće tako da se jabuke i breskve pravedno podijele među djecom?

Pronađimo zajedničke djelitelje od 32 i 40.

Djelitelji broja 32 su 1, 2, 4, 8, 16 i 32. Djelitelji od 40 su 1, 2, 4, 10, 20 i 40. Sada je lako odrediti iste djelitelje obaju brojeva. To su brojevi 1, 2 i 4. Njih nazivamo **zajedničkim djeliteljima** brojeva 32 i 40.

Zajednički djelitelji brojeva 32 i 40 su 1, 2 i 4.

Ako su a i b zadani brojevi, onda brojeve koji su djelitelji oba broja nazivamo **zajedničkim djeliteljima** brojeva a i b .

zajednički
djelitelji

Na ovaj način možemo odrediti zajedničke djelitelje bilo koja dva, tri ili više prirodnih brojeva.

Primjer 1. Zajednički djelitelji

Pronađi zajedničke djelitelje brojeva:

- a) 24 i 18; b) 20, 30 i 45;
c) 15 i 30; d) 28 i 25.

Rješenje:

a) Pronađimo djelitelje brojeva 24 i 18. Djelitelji od 24 su 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 i 24. Djelitelji od 18 su 1, 2, 3, 6, 9 i 18. Zajednički djelitelji brojeva 24 i 18 su 1, 2, 3 i 6.

RECEPT

Kako naći zajedničke djelitelje u 3 koraka:

1. Nadeš sve djelitelje prvog broja;
2. Nadeš sve djelitelje drugog broja;
3. Zaokružiš zajedničke djelitelje.

b) Postupak za traženje zajedničkih djelitelja triju brojeva jednak je kao i za dva broja.

Djelitelji od 20 su 1, 2, 4, 5, 10 i 20. Djelitelji od 30 su 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30. Djelitelji od 45 su 1, 3, 5, 9, 15 i 45. Zajednički djelitelji brojeva 20, 30 i 45 su 1 i 5.

c) Traže se zajednički djelitelji brojeva 15 i 30, a primijetimo da je 30 višekratnik od 15. Djelitelji od 15 su 1, 3, 5 i 15. Djelitelji od 30 su 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 i 30. Svi djelitelji od 15 su ujedno i djelitelji od 30. Prisjetimo se, to svojstvo smo naučili kod djeljivosti umnoška.

d) Djelitelji od 28 su 1, 2, 4, 7, 14 i 28. Djelitelji od 25 su 1, 5 i 25. Njihov zajednički djelitelj je samo broj 1.

Brojevi koji osim broja 1 nemaju drugih zajedničkih djelitelja zovu se **relativno prosti brojevi**.

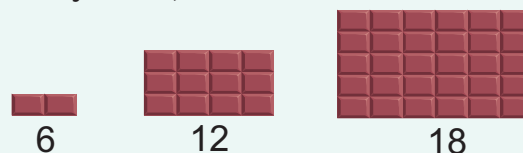
relativno
prosti brojevi



Zadaci

- Pronađi zajedničke djelitelje brojeva:
a) 25 i 80; b) 18 i 45; c) 42 i 56;
d) 20 i 30; e) 72 i 45.
- Pronađi zajedničke djelitelje brojeva:
12 i 24, 45 i 9, 33 i 11, 14 i 350.
- Pronađi zajedničke djelitelje brojeva:
11 i 13, 7 i 8, 9 i 10, 24 i 125.
- Pronađi zajedničke djelitelje brojeva:
12, 20 i 28; 50, 75 i 90; 15, 30, 45 i 60.
- Koji su od ovih brojeva relativno prosti:
a) 12 i 11; b) 12 i 15; c) 12 i 25; d) 12 i 14?
- Ivan je visok 160 cm, a Maja 150 cm. Koje duljine može biti jedinična dužina metra kojim se oni mjere da bismo ih točno izmjerili?

- Čokolada "Daj griz" prodaje se u tri veličine: maloj, srednjoj i velikoj. Sve tri veličine imaju jednake dimenzije "kockica". Kolika može biti duljina jedne "kockice", ako je duljina male čokolade 6 cm, srednje 12 cm, a velike 18 cm?



- Djeca u vrtiću slažu ceste od pločica koje su sve jednake veličine. Ivanov put dugačak je 20 cm, Marijin put dugačak je 22 cm, a Markov 30 cm. Kolika je duljina jedne pločice?
- Napiši nekoliko brojeva s kojima je broj 20 relativno prost broj.

Primjer 2. Najveći zajednički djelitelj

Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva 35 i 28.

Rješenje:

Prvo pronađimo sve zajedničke djelitelje od 35 i 28 pa ćemo među njima lako pronaći najveći:

Djelitelji broja 35 su 1, 5, 7 i 35. Djelitelji od 28 su 1, 2, 4, 7, 14 i 28.

Zajednički djelitelji su 1 i 7, pa je lako zaključiti da je najveći zajednički djelitelj od 35 i 28 broj 7.

Najveći zajednički djelitelj je najveći broj u skupu zajedničkih djelitelja zadanih brojeva.

najveći zajednički djelitelj
ili najveća zajednička mjera

Najveći zajednički djelitelj brojeva a i b označavamo s $D(a, b)$. Stoga je $D(35, 28) = 7$ i čitamo: "najveći zajednički djelitelj brojeva 35 i 28 je 7".

$D(a, b)$ – najveći zajednički djelitelj brojeva a i b

Pročitaj:

$$D(12, 32) = 4$$

$$D(10, 35) = 5$$



Primjer 3. Određivanje najvećeg zajedničkog djelitelja

Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva 3500 i 2800.

Rješenja:

Krenimo dobro poznatim postupkom: treba ispisati sve djelitelje od 3500, zatim sve djelitelje od 2800, pa izvući sve zajedničke djelitelje i na kraju iz skupa zajedničkih djelitelja odabrati najveći. Kod manjih je brojeva to bilo lako, no kod većih je ponekad teško ispisati sve djelitelje. U zadatku se traži samo najveći zajednički djelitelj, pa se pitamo može li se najveći zajednički djelitelj pronaći i bez ispisivanja svih djelitelja. Odgovor je da može, i to uz pomoć rastavljanja zadanih brojeva na proste faktore.

Pogledajmo kako!

Brojeve 3500 i 2800

rastavimo na proste faktore

i zaokružimo zajedničke

faktore:

$$3500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2800 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$$

Zajednički faktori su 2, 2, 5, 5, i 7.

Pomnožimo li zajedničke faktore dobit ćemo

$$3500 = 700 \cdot 5$$

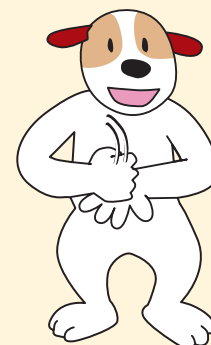
$$2800 = 700 \cdot 4$$

Zaključujemo da je 700 najveći zajednički djelitelj brojeva 3500 i 2800, pa je

$$D(3500, 2800) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 700.$$

(Pogledajte umnožak $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$. Kako ćete brzo napamet pomnožiti ove brojeve?)

TO TE JA PITAM!
DAJ NEKI LAKŠI NAČIN
DA NAĐEM TAJ NAJVEĆI
ZAJEDNIČKI
DJELITELJ!



A može i pomoću okomite crte:

$$\begin{array}{r|l} 3500, 2800 & 2 \\ 1750, 1400 & 2 \\ 875, 700 & 5 \\ 175, 140 & 5 \\ 35, 28 & 7 \\ 5, 4 & \end{array}$$

Tražimo zajedničke proste faktore brojeva 3500 i 2800. Krenemo od 2 i količnici su 1750 i 1400. Njih dijelimo sa zajedničkim prostim djeliteljem, a to je opet 2. Postupak nastavljamo dok ne dobijemo relativno proste količnike. U ovom slučaju to su 5 i 4.

$$\begin{array}{r|l} 3500, 2800 & 100 \\ 35, 28 & 7 \\ 5, 4 & \end{array}$$

Pomnožimo proste faktore s desne strane crte i dobit ćemo najveći zajednički djelitelj:
 $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 700.$

HOĆETE
JOŠ BRŽE? ZAJEDNIČKI
FAKTORI ZAPRAVO
UOPĆE NE TREBAJU BITI
PROSTI.



Primjer 4. Najveći zajednički djelitelj više brojeva

Pronađi $D(24, 60, 78)$.

Rješenje:

Rastavimo zadane brojeve na proste faktore:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$78 = 2 \cdot 3 \cdot 13$$

Sada treba odabrati zajedničke faktore koji se pojavljuju u rastavima svih triju brojeva. To su faktori 2 i 3, pa je $D(24, 60, 78) = 2 \cdot 3 = 6$.

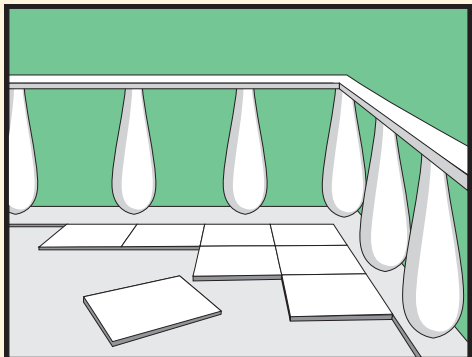
A može i pomoću okomite crte:

$$\begin{array}{r|l} 24, 60, 78 & 2 \\ 12, 30, 39 & 3 \\ 4, 10, 13 & \end{array}$$

Važno je naći zajedničke djelitelje svih triju brojeva.

Primjer 5. Popločavanje terase

Terasa je duga 480 cm i široka 400 cm. Želimo je popločiti pločicama kvadratnog oblika što većih dimenzija. Kolika će biti duljina svake pločice?



Rješenje:

Terasu treba popločiti tako da niti jednu pločicu ne razrežemo. To znači da duljina i širina terase trebaju biti višekratnici stranice pločice. Pitamo se koji su zajednički djelitelji od 400 i 480, a kako se traži pločica najvećih dimenzija, trebamo naći $D(400, 480)$.

$$\begin{array}{r|l} 400, 480 & 10 \\ 40, 48 & 8 \\ 5 & 6 \end{array}$$

$$D(400, 480) = 10 \cdot 8 = 80$$

Stranica kvadratne pločice duga je 80 cm.

Zadaci

10. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:
10 i 15, 27 i 18, 65 i 42, 100 i 150, 33 i 220.

Recept

Kako naći najveći zajednički djelitelj:

1. rastavim brojeve na zajedničke faktore
2. pomnožim zajedničke djelitelje

11. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:

- a) 18 i 27, 14 i 21, 64 i 44;
b) 50 i 75, 12 i 20, 60 i 75.

12. U prvom stupcu zadani su brojevi. U drugom stupcu nalazi se njihov najveći zajednički djelitelj. Spoji parove:

8 i 10	4
16 i 4	2
15 i 25	5

13. Pronađi najmanji i najveći djelitelj brojeva 45 i 60.
14. Napamet i bez računanja, probaj pronaći najveći zajednički djelitelj brojeva:
- a) 6 i 4; b) 8 i 10; c) 4 i 8;
d) 10 i 15; e) 8 i 12; f) 12 i 4;
g) 8 i 5; h) 2 i 10; i) 8 i 6.
15. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:
- a) 682 i 2552; 25 000 i 7500;
b) 4096 i 20 000; 1296 i 5832.

16. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva
a) 13 i 14; b) 15 i 16; c) 22 i 45.

Kakvi su to brojevi?

17. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:
a) 10 i 20; b) 3 i 33; c) 15 i 60;
d) 100 i 1500; e) 32 i 128.

Što primjećuješ?

18. Zeleno platno duljine 90 m i žuto platno duljine 135 m treba razrezati na jednake dijelove. Koliko dugi mogu biti ti dijelovi? Kako da razrežemo ta platna tako da što manje režemo platno?

19. Terasa je duga 540 cm i široka 420 cm. Želimo je popločiti pločama kvadratnog oblika, što većih dimenzija. Kolika će biti duljina svake ploče?

20. Terasa je duga 520 cm i široka 390 cm. Želimo je popločiti pločama kvadratnog oblika što većih dimenzija. Kolika će biti duljina svake ploče?

21. Koje brojeve možeš upisati na prazno mjesto:
 $D(16, _) = 4$, $D(5, _) = 1$,
 $D(4, _) = 4$, $D(_, 27) = 9$

22. Kakav je broj a ako je $D(12, a) = 12$?

23. Kakav je broj a ako je $D(12, a) = a$?

24. Koliko može iznositi ☺, a koliko ☼? Nađi bar tri rješenja za svaki zadatak:

a) $D(\text{☺}, \text{☼}) = 2$; b) $D(\text{☺}, \text{☼}) = 12$;
 c) $D(\text{☺}, \text{☼}) = 1$; d) $D(\text{☺}, \text{☼}) = 300$;
 e) $D(\text{☺}, \text{☼}) = 39$; f) $D(\text{☺}, \text{☼}) = \text{☺}$.

25. U trgovini bojama trgovac ima dvije različite kante za boju. U veću stane 36 litara, a u manju točno 12 litara manje. On iz tih kanti uzima boju i sipa je u boce za prodaju.

a) Koliko litara stane u bocu za prodaju, ako trgovac može isprazniti svaku kantu dokraja sipajući iz nje boju u boce?
 b) Koliko litara stane u najveću takvu bocu?

26. Baka Anđa je stručnjak za kolače. Svakoga dana peče kolač u protvanu duljine 56 cm i širine 56 cm. Kad se kolač ohladi, ona ga reže na jednake komade kvadratnog oblika.

a) Koje duljine i širine mogu biti kolači?
 b) Procijeni prema veličini svoje ruke, koje dimenzije kolača su najprikladnije da bismo kolač držali u ruci?

27. Soba je duga 490 cm i široka 280 cm. Želimo popločiti njen pod s najvećim pločicama kvadratnog oblika, tako da se niti jedna pločica ne treba rezati. Kolika će biti duljina stranica svake pločice?



28. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva
 a) 45, 60 i 150; b) 20, 30 i 90; c) 16, 20 i 36.

29. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva
 a) 45, 54 i 126; b) 90, 140 i 250;
 c) 160, 440 i 1000.



30. Pronađi:
 a) $D(250, 700, 500)$; b) $D(125, 400, 375)$;
 c) $D(44, 396, 528)$; d) $D(196, 280, 343)$.

31. Mama je ispekla tri rolade:

- rolada od čokolade duga je 36 cm;
 - rolada od kestena duga je 24 cm;
 - rolada od pekmeza duga je 32 cm.

Luka jako voli ove kolače, pa je rekao mami neka reže rolade na što deblje komade. Mama želi sve komade jednake debljine. Kolika će biti debljina svakog odrezanog komada? Nacrtaj otprilike debljinu jednog komada.

32. Tri komada žice duge 288 cm, 504 cm i 216 cm treba izrezati na jednake dijelove. Kolika je najveća duljina tih dijelova?

33. Čokolada "Ne dam griz" prodaje se u 4 veličine: maloj, srednjoj, velikoj i jumbo. Sve veličine imaju jednake dimenzije "kockica". Kolika može biti najveća duljina jedne "kockice", ako je duljina male čokolade 9 cm, srednje 15 cm, velike 18 cm, a jumbo 27 cm?

34. Luka ima 20 crvenih, 30 žutih i 45 plavih pikula. Koliko se najviše prijatelja može pikulati, a da svi igru započnu s jednakim brojem crvenih, jednakim brojem žutih i jednakim brojem plavih pikula? Koliko će kojih pikula svaki dobiti?

35. Jesu li zadani parovi brojeva relativno prosti?

a) 2, 8; b) 15, 16; c) 12, 18;
 d) 9, 20; e) 26, 36; f) 100, 81.

36. Koji je najveći zajednički djelitelj bilo koja dva uzastopna broja?

37. Koji je najveći zajednički djelitelj bilo koja dva prosta broja?

38. U kutiji je 64 čokoladica i 48 bombona. Razrednica od toga treba složiti poklon-paketiće. Koliko paketića može složiti? Koliko će u jednom paketiću biti čokoladica, a koliko bombona?

39. Luka ima vrpce duljine 96 cm i 84 cm. Kolika je najveća duljina jednakih komada na koje te vrpce možemo narezati?

40. Građevinari planiraju dva stepeništa, jedno duljine 120 m, a drugo duljine 94 m. Oba stepeništa moraju imati stepenice jednake visine. Koje visine stepenica su moguće? Koje od njih su smislene da bi ljudi mogli hodati po njima?

41. Dvije zgrade, visine 24 m i 32 m trebaju imati katove jednake visine. Koje visine katova su moguće? Koje od njih su smislene za boravak ljudi?

42. Okvir križaljke dugačak je 288 mm i 329 mm. Kolika može biti najveća duljina stranice kvadrata napravljenih na toj križaljci? Koja još rješenja su moguća? Koje od njih ti se čini najbolje za pisanje po jednog slova u taj kvadrat?

2.9. Najmanji zajednički višekratnik



Dva gusara

Dva gusara sakrila su blago na pustom otoku i dogovorila se da će svaki ići provjeriti blago: prvi će dolaziti svaki drugi dan, a drugi će dolaziti svaki treći dan.

- Koji gusar će dolaziti češće na otok?
- Nakon koliko dana će se gusari sresti na otoku?

U prošlom smo poglavlju tražili zajedničke djelitelje zadanih brojeva. Tako su, primjerice, zajednički djelitelji od 25 i 15 brojevi 1 i 5. Sada se pitamo koji su **zajednički višekratnici** brojeva 25 i 15.

Pronađimo najprije višekratnike brojeva 25 i 15.

Višekratnici od 25 su 25, 50, **75**, 100, 125, **150**, ...

Višekratnici od 15 su 15, 30, 45, 60, **75**, 90, 105, 120, 135, **150**, ...

Sada je lako odrediti skup brojeva koji su višekratnici obaju brojeva. Pronašli smo ih i u tekstu gornjem označili crvenom bojom.

Zajednički višekratnici brojeva 25 i 15 su: 75, 150, 225, ...

Ako su a i b zadani brojevi, onda se brojevi koji su višekratnici obaju brojeva nazivaju **zajedničkim višekratnicima** brojeva a i b .

Na ovaj način možemo odrediti zajedničke višekratnike bilo koja dva, tri ili više prirodnih brojeva.

zajednički
višekratnici

Primjer 1. Zajednički višekratnici

Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:

- 4 i 18;
- 20, 30 i 40;
- 15 i 30.

Rješenje:

- Višekratnici od 4 su, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, **36**, 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, 68, **72**, ...

Višekratnici od 18 su 18, **36**, 54, **72**, ...

Zajednički višekratnici brojeva 4 i 18 su **36**, **72**, **108**, ... itd.

- Postupak za traženje zajedničkih višekratnika triju brojeva jednak je kao i za dva broja.

Višekratnici od 20 su 20, 40, 60, 80, 100, **120**, 140, ...

Višekratnici od 30 su 30, 60, 90, **120**, 150, 180, ...

Višekratnici od 40 su 40, 80, **120**, 160, 200, **240**, ...

Zajednički višekratnici brojeva 20, 30 i 40 su **120**, **240**, **360**, ... itd.

- Traže se zajednički višekratnici brojeva 15 i 30, a primijetimo da je broj 30 višekratnik od 15.

Višekratnici od 15 su 15, **30**, 45, **60**, 75, **90**, ...

Višekratnici od 30 su **30**, **60**, **90**, **120**, ...

Svi višekratnici od 30 su ujedno i višekratnici od 15. To smo svojstvo učili kod djeljivosti umnoška.

Primjer 2.**Najmanji zajednički višekratnik**

Među zajedničkim višekratnicima brojeva 15 i 20, pronađi najmanji.

Rješenje:

Prvo pronađimo zajedničke višekratnike od 15 i 20 pa ćemo među njima lako pronaći najmanji: Višekratnici od 15 su 15, 30, 45, **60**, 75, 90, ... Višekratnici od 20 su 20, 40, **60**, 80, 100, **120**, ... Zajednički višekratnici su 60, 120, 180, ..., pa vidimo da je najmanji zajednički višekratnik od 15 i 20 broj 60.

Najmanji zajednički višekratnik je najmanji broj u skupu zajedničkih višekratnika zadanih brojeva.

Najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b označavamo s $V(a, b)$.

najmanji
zajednički
višekratnik

Stoga je $V(15, 20) = 60$ i čitamo: "najmanji zajednički višekratnik brojeva 15 i 20 je 60".

$V(a, b)$ – najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b

Pročitaj:

$$V(12, 32) = 96, D(12, 32) = 4$$

$$V(10, 35) = 70, D(10, 35) = 5$$

Primjer 3.**Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika**

Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva 70 i 2400.



Najmanji zajednički višekratnik brojeva a i b je najmanji broj koji je djeljiv s a i b .

Rješenje:

Krenimo dobro poznatim postupkom. Treba:

- ispisati višekratnike od 70,
- ispisati višekratnike od 2400,
- izvući zajedničke višekratnike,
- iz skupa zajedničkih višekratnika odabrati najmanji.

Kod manjih brojeva koji su "blizu" jedan drugome to je bilo lako, no u ovakvim slučajevima to nije baš jednostavno. U zadatku se traži samo najmanji zajednički višekratnik, pa se pitamo može li se najmanji zajednički višekratnik pronaći i bez ispisivanja ostalih višekratnika. Odgovor je da, i to uz pomoć rastavljanja svakog broja na proste faktore. Pogledajmo kako.

Brojeve 70 i 2400 rastavimo na proste faktore i zaokružimo zajedničke faktore:

$$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6$$

Zajednički faktori su **2** i **5**. Njihov umnožak daje najveći zajednički djelitelj brojeva 70 i 2400, pa je $D(70, 2400) = 10$. Da bismo dobili najmanji zajednički višekratnik, broj 10 pomnožimo s preostalim faktorima oba rastava:

$$V(70, 2400) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 = 16\,800.$$

Može i pomoću okomite crte:

$$\begin{array}{r|l} 70, & 2400 \\ 35, & 1200 \\ 7, & 240 \end{array} \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array}$$

Prvo poznatim postupkom tražimo zajedničke proste faktore brojeva **70** i **2400**. Nakon dijeljenja s **2** i **5** dobijemo količnike **7** i **240** koji su relativno prosti.

Zajednički višekratnik od **70** i **2400** bit će umnožak dobivenih količnika i zajedničkih djelitelja.

$$V(70, 2400) = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 240 = 16\,800.$$

Zadaci

- Zapiši sve zajedničke višekratnike brojeva 9 i 6 koji su manji od 50.
- Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:
a) 15 i 40; b) 18 i 45; c) 25 i 20;
d) 40 i 60; e) 100 i 150.
- U prvom stupcu zadani su brojevi. U drugom stupcu nalaze se njihovi zajednički višekratnici. Spoji parove:

8 i 10
16 i 4
20 i 30

60, 120, 180 ...
40, 80, 120 ...
16, 32, 48 ...
- Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:
a) 12 i 24; b) 45 i 9; c) 33 i 11; d) 14 i 35.
- Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:
a) 5 i 6; b) 7 i 8; c) 9 i 11; d) 4 i 9.
- Odaberi dva relativno prosta broja i pronadi im zajedničke višekratnike.
- Koji od brojeva 120, 100, 45, 30, 50, 72, 36, 1, 32, 64 su zajednički višekratnici brojeva:
a) 2 i 3; b) 5 i 6; c) 10 i 3?
- Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:
a) 2, 30 i 15; b) 5, 6 i 3; c) 40, 30, i 60.
- Pronađi zajedničke višekratnike brojeva:
a) 15, 20 i 40; b) 50, 25 i 90;
c) 15, 30, 45 i 60.
- Ivan, Maja i Luka imaju kocke od različitih proizvođača. Ivan ima sve kocke visoke 2 cm, Majine su sve kocke visoke 3 cm, a Lukine su sve kocke visoke 5 cm. Oni su se dogovorili da će graditi tornjeve, svatko od svojih kocaka, sve dok sva tri tornja ne budu jednako visoka.
a) Kolika će biti visina tornjeva?
b) Koliko će kocaka biti u Ivanovom, koliko u Majinom, a koliko u Lukinom tornju?
- Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 10 i 15; b) 27 i 18; c) 65 i 42; d) 100 i 150.

$$\begin{array}{r|l} 150, 120 & 10 \\ 15, 12 & 3 \\ 5, 4 & \end{array}$$

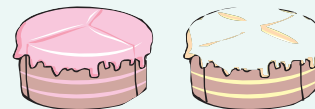
$$V(150, 120) = 10 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 600$$

- Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 18 i 27, 14 i 21, 66 i 44;
b) 50 i 75, 12 i 20, 60 i 75.

- U prvom stupcu zadani su brojevi. U drugom stupcu nalazi se njihov najmanji zajednički višekratnik. Spoji parove:

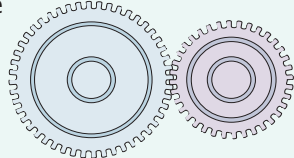
8 i 10	75
16 i 4	40
15 i 25	16

- Pronađi najmanji i najveći zajednički višekratnik brojeva 4 i 6.
- Napamet i bez računanja probaj pronaći najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 6 i 4; b) 8 i 10; c) 4 i 8;
d) 10 i 15; e) 8 i 12; f) 12 i 4;
g) 8 i 5; h) 2 i 10; i) 8 i 6.
- Napamet i bez računanja probaj pronaći najveći zajednički djeljitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 7 i 5; b) 6 i 3; c) 10 i 12; d) 12 i 18;
e) 25 i 35; f) 9 i 12; g) 14 i 21; h) 24 i 16;
i) 4 i 5.
- Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 120 i 900; b) 25 000 i 7500;
c) 308 i 539; d) 84 i 105.
- Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva
a) 3 i 4; b) 15 i 16; c) 2 i 5.
Kakvi su to brojevi?
- Torta od jagoda podijeljena je na 3 dijela, a torta od banana na 4 dijela. Imaš li ideju kako podijeliti dalje svaku tortu da dobijemo komade jednake veličine?



- Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 15 min, a drugi za 20 min.
a) Koji je od ova dva biciklista brži?
b) Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?
c) Ako biciklisti nastave vožnju nakon susreta, kada će se opet naći na startu?
- Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 8 min, a drugi za 20 min. Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?
- Kod starog urara jedan sat zvoni svakih 36 minuta, a drugi svakih 48 minuta. Oni su upravo zazvonili u isto vrijeme. Nakon koliko će vremena opet zazvoniti u isto vrijeme?

23. Dva brza klizača treniraju u dvorani. Jedan prijeđe krug dvorane za 20 s, a drugi za 25 s. Zajedno su krenuli sa starta.
- Koji od njih je brži?
 - Kada će se opet naći zajedno na startu?
 - Koliko će do tog trenutka svaki napraviti krugova?
24. Maja dolazi u knjižnicu svakih 14 dana, a Matija svaki 21 dan. Danas su se sreli i posvađali se. Nakon koliko dana će se opet sresti u knjižnici?
25. Zapiši dva relativno prosta broja i pronadi im najmanji zajednički višekratnik. Što primjećuješ?
26. Pronadi najmanji zajednički višekratnik brojeva: a) 10 i 20; b) 3 i 33; c) 15 i 60; d) 100 i 1500; e) 32 i 128.
- Što primjećuješ?
27. Dva zupčanika okreću se u stroju. Jedan ima 48, a drugi 36 zubaca. Koliko će krugova napraviti svaki od njih tako da se opet poklope isti zupci jednog i drugog?



28. Sa željezničkog kolodvora brzi vlak za Krapinu kreće svakih 25 minuta. Brzi vlak za Dugo Selo kreće svakih 40 minuta. Jedan i drugi vlak kreću svako jutro u 6 h.
- Nakon koliko minuta će opet zajedno krenuti iz kolodvora?
 - U koliko će to biti sati?
29. Izračunaj:
- $V(2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13)$;
 - $V(2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11, 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)$.
30. Koje brojeve možeš upisati u praznine:
- $V(15, \underline{\quad}) = 60$; b) $V(5, \underline{\quad}) = 40$;
 - $V(\underline{\quad}, 70) = 70$; d) $V(\underline{\quad}, 6) = 24$?
31. Kakav je broj a ako je $V(12, a) = 12$?
32. Kakav je broj a ako je $V(12, a) = a$?
33. Koliko može iznositi $\odot$, a koliko $\odot$? Nađi bar dva rješenja za svaki zadatak:
- $V(\odot, \odot) = 12$; b) $V(\odot, \odot) = 2$;
 - $V(\odot, \odot) = 100$; d) $V(\odot, \odot) = 35$;
 - $V(\odot, \odot) = 39$; f) $V(\odot, \odot) = \odot$.
34. Koji od ovih zadataka su točni? Zaokruži ih, a krive rezultate ispravi:
- $V(6, 2) = 12$; b) $V(14, 7) = 7$; c) $V(9, 6) = 54$;
 - $V(4, 4) = 16$; e) $D(12, 16) = 4$; f) $V(25, 30) = 5$;
 - $D(16, 32) = 32$.



Primjer 4. Zajednički višekratnik triju brojeva

Tri su broda istoga dana isplovila iz riječke luke. Jedan se vraća svakih 18 dana, drugi svakih 30 dana, a treći svakih 45 dana. Nakon koliko će se dana opet naći zajedno u luci?

Rješenje:

Treba pronaći $V(18, 30, 45)$. Rastavimo svaki od ovih brojeva na proste faktore:

18, 30, 45	3	1. Pronađemo djelitelje svih triju brojeva. U ovom slučaju to je samo 3.
6, 10, 15	2	
3, 5, 15	3	
1, 5, 5	5	
1, 1, 1		

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$$

Sada treba odabrati zajedničke faktore koji se pojavljuju u rastavima svih triju brojeva. To je faktor 3, pa je $D(18, 30, 45) = 3$. Primijetimo da se broj 2 pojavljuje u rastavu brojeva 18 i 30 na proste faktore, pa i najmanji višekratnik od 18, 30 i 45 mora u svom rastavu imati faktor 2. Na isti način zaključujemo i za faktore 3 i 5. Stoga je $V(18, 30, 45) = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 90$.

2. Kada više nema djelitelja svih triju brojeva, pronađemo zajedničke djelitelje od po dva broja. Tako su 6 i 10 djeljivi s 2 i dobivamo količnike 3 i 5. Broj 15 nije djeljiv s 2, pa ga samo prepisujemo u novom retku.

3. Postupak nastavljamo dok ne dobijemo sve jedinice.

$$\text{Tada je } V(18, 30, 45) = 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 90.$$

35. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva 5, 6 i 15.

36. U prvom stupcu zadani su brojevi. U drugom stupcu nalazi se njihov najmanji zajednički višekratnik. Spoji parove:

2, 3 i 5	30
2, 8 i 16	40
10, 4 i 8	16

37. Odredi najmanji prirodni broj djeljiv sa 16, 40 i 100.

38. Odredi najmanji prirodni broj djeljiv s 45, 60 i 150.

39. Tri brata posjećuju svoje roditelje. Marijan ih posjećuje svaki šesti dan. Zdenko ih posjećuje svaki osmi dan. Mirko ih posjećuje svaki deveti

dan. Danas su ih posjetili svi zajedno. Za koliko dana će se opet svi zajedno okupiti kod roditelja?

40. Tri su gusara sakrili blago na pustom otoku i dogovorili se da će svaki ići provjeriti blago: prvi će dolaziti svaki 10. dan, drugi će dolaziti svaki 15. dan, a treći svaki 20. dan. Nakon koliko vremena će se sva trojica sresti na otoku?

41. Četiri plivača treniraju maraton u bazenu. Prvom plivaču je za preplivati bazen i vratiti se potrebno 3 min, drugom 7 min, trećem 6 min, a četvrtom 9 min. Krenuli su istovremeno.

a) Nakon koliko vremena će se naći zajedno na startu?

b) Koliko će dotada preplivati svaki plivač, ako je staza bazena duga 50 m?

c) Koja dva plivača će se prvi naći zajedno na startu?

Vježbalica

1. Koji su od ovih brojeva relativno prosti:

- a) 22 i 11;
- b) 16 i 24;
- c) 9 i 25;
- d) 15 i 21.

2. Čokolada se prodaje u tri veličine: maloj, srednjoj i velikoj. Sve tri veličine imaju jednake dimenzije "kockica". Kolika je najveća duljina jedne "kockice" ako je duljina male čokolade 10 cm, srednje 15 cm, a velike 20 cm?

3. Djeca u vrtiću slažu ceste od pločica koje su sve jednake veličine. Ivanov put dugačak je 21 cm, Anin put dugačak je 35 cm, a Matkov 28 cm. Kolika je najveća moguća duljina jedne pločice?

4. Jesu li brojevi 16, 27 i 25 relativno prosti?

5. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:

- a) 12 i 15;
- b) 35 i 18;
- c) 65 i 52;
- d) 33 i 210.

6. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:

- a) 18 i 27;
- b) 140 i 210;
- c) 64 i 44;
- d) 200 i 150.

7. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:

- a) 340 i 136;
- b) 120 i 270;

c) 504 i 360;

d) 55 i 66.

8. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva

- a) 17 i 27;
- b) 25 i 16;
- c) 48 i 55.

Kakvi su to brojevi?

9. Pronađi:

- a) D(350, 700, 140);
- b) D(150, 175, 200);
- c) D(99, 132, 88);
- d) D(68, 255, 51).

10. Pronađi:

- a) D(108, 84, 60);
- b) D(60, 48, 42).

11. Pronađi:

- a) D(45, 105, 90, 120);
- b) D(39, 13, 26, 65);
- c) D(24, 104, 48, 56, 72);
- d) D(65, 60, 55, 35, 40, 20).

12. Zeleno platno duljine 40 m i žuto platno duljine 48 m treba razrezati na jednake dijelove. Koliko dugi mogu biti ti dijelovi? Kako da razrežemo ta platna tako da što manje režemo platno?

13. Mama je ispekla tri rolade: rolada od čokolade duga je 32 cm; rolada od kestena duga je 24 cm; rolada od pekmeza duga je 48 cm. Luka jako voli ove kolače pa je rekao mami neka reže rolade na što deblje komade. Mama želi sve komade

- jednake debljine. Kolika će biti debljina svakog odrezanog komada?
14. Terasa je duga 144 cm i široka 288 cm. Želimo je popločiti pločama kvadratnog oblika, što većih dimenzija. Kolika će biti duljina svake ploče?
 15. Terasa je duga 288 cm i široka 360 cm. Želimo je popločiti pločama kvadratnog oblika, što većih dimenzija. Kolika će biti duljina svake ploče?
 16. Tri komada žice duge 360 cm, 315 cm i 135 cm treba izrezati na jednake dijelove. Kolika je najveća duljina tih dijelova?
 17. Čokolada se prodaje u 4 veličine: maloj, srednjoj, velikoj i jumbo. Sve veličine imaju jednake dimenzije "kockica". Kolika može biti najveća duljina jedne "kockice" ako je duljina male čokolade 12 cm, srednje 18 cm, velike 30 cm, a jumbo 48 cm?
 18. Luka ima 50 crvenih, 30 žutih i 60 plavih pikula. Koliko se najviše prijatelja može pikulati, a da svi igru započnu s jednakim brojem crvenih, jednakim brojem žutih i jednakim brojem plavih pikula? Koliko će kojih pikula svaki dobiti?
 19. U trgovini bojama trgovac ima dvije različite kante za boju. U veću stane 48 litara, a u manju točno 12 litara manje. On iz tih kanti uzima boju i sipa je u boce za prodaju.
 - a) Koliko litara imaju najveće moguće boce za prodaju, ako trgovac može isprazniti svaku kantu do kraja sipajući iz nje boju u boce?
 20. Soba je duga 560 cm i široka 350 cm. Želimo popločiti njen pod s najvećim mogućim pločicama kvadratnog oblika, tako da se niti jedna pločica ne treba rezati. Kolika će biti duljina stranica svake pločice?
 21. Ivan, Ana i Luka imaju kocke od različitih proizvođača. Ivan ima sve kocke visoke 4 cm, Majine su sve kocke visoke 6 cm, a Lukine su sve kocke visoke 3 cm. Oni su se dogovorili da će graditi tornjeve, svatko od svojih kocaka, sve dok sva tri tornja budu jednako visoka.
 - a) Kolika će biti visina tornjeva?
 - b) Koliko će kocaka biti u Ivanovom, koliko u Aninom, a koliko u Lukinom tornju?
 22. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva: a) 14 i 21, b) 25 i 15, c) 60 i 32, d) 120 i 150.
 23. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva: a) 16 i 24; b) 10 i 20; c) 6 i 4; d) 20 i 15.
 24. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva: a) 12 i 90, b) 250 i 750, c) 13 i 39, d) 17 i 13.
 25. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva a) 13 i 14; b) 5 i 16; c) 22 i 15. Kakvi su to brojevi?
 26. Torta od jagoda je podijeljena na 6 dijelova, a torta od banana na 8 dijelova. Kako podijeliti dalje svaku tortu da dobijemo komade jednake veličine?
 27. Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 18 min, a drugi za 27 min.
 - a) Koji od ova dva biciklista je brži?
 - b) Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?
 - c) Ako biciklisti nastave vožnju nakon susreta, kada će se opet sljedeći put naći na startu?
 28. Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 10 min, a drugi za 15 min. Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?
 29. Kod starog urara jedan sat zvoni svakih 42 minuta, a drugi svakih 48 minuta. Oni su upravo zazvonili u isto vrijeme. Nakon koliko će vremena opet zazvoniti u isto vrijeme?
 30. Dva brza klizača treniraju u dvorani. Jedan prijeđe krug dvorane za 40 s, a drugi za 32 s. Zajedno su krenuli sa starta.
 - a) Koji od njih je brži?
 - b) Kada će se opet naći zajedno na startu?
 - c) Koliko će do tog trenutka svaki napraviti krugova?
 31. Maja dolazi u knjižnicu svakih 8 dana, a Matija svakih 10 dana. Danas su se sreli i posvađali su se. Nakon koliko dana će se opet sresti u knjižnici?
 32. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva: a) 100 i 200, b) 11 i 33, c) 15 i 65, d) 104 i 105.
 33. Sa željezničkog kolodvora brzi vlak za Krapinu kreće svakih 30 minuta. Brzi vlak za Dugo Selo kreće svakih 40 minuta. Vlakovi kreću svako jutro obojica u 6 h.
 - a) Nakon koliko minuta će opet zajedno krenuti iz kolodvora?

- b) U koliko će to biti sati?
34. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva 15, 60 i 45.
35. Odredi najmanji prirodan broj djeljiv s 28, 42 i 105.
36. Odredi najmanji prirodan broj djeljiv s 17, 34 i 170.
37. Tri brata posjećuju svoje roditelje. Marijan ih posjećuje svaki šesti dan. Zdenko ih posjećuje svaki četvrti dan. Mirko ih posjećuje svaki treći dan. Danas su ih posjetili svi zajedno. Za koliko dana će se opet svi zajedno skupiti kod roditelja?
38. Pronađi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 30, 40, 20; b) 50, 35, 25; c) 27, 24, 18;
d) 11, 33, 66; e) 7, 42, 35.
39. Pronađ najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva :
a) 35, 15, 10; b) 12, 36, 24; c) 50, 30, 20; d) 5, 7, 4; e) 3, 10, 8; f) 26, 39, 13.
40. Pronađi najveći zajednički djelitelj i najmanji zajednički višekratnik brojeva:
a) 34, 51 i 17; b) 22, 44 i 55; c) 6, 8, 10, i 4; d) 12, 32, 8, 4, 6 i 16.

2.10 Ponavljanje

Pitanja za ponavljanje

- Bez računanja odredi s kojim brojevima je djeljiv zbroj $45 + 9 + 90 + 189$.
- S kojim brojevima je djeljiv umnožak $14 \cdot 3 \cdot 5$?
- Navedi pravilo djeljivosti s 5.
- Navedi pravilo djeljivosti s 2.
- Navedi pravila djeljivosti s 10, 100, 1000 i 1 000 000.
- Navedi pravila djeljivosti s 3 i s 9.
- Koju znamenku trebaš staviti na mjesto zvjezdice u broju $34*$ tako da broj bude:
a) djeljiv s 10; b) djeljiv s 5; c) djeljiv s 2;
d) djeljiv s 3; e) djeljiv s 9?
- Kakvi su to prosti brojevi?
- Kakvi su to složeni brojevi?
- Navedi sve proste brojeve manje od 20.
- Je li broj 1 prost ili složen broj?
- Mogu li bilo koja dva uzastopna broja biti prosta?
- Kako matematičkim simbolima zapisujemo "najmanji zajednički višekratnik brojeva 13 i 17"?
- Kakvi su to relativno prosti brojevi?
- Nađi primjer dva relativno prosta broja, oba manja od 30, a veća od 20.
- Napamet odredi najmanji zajednički višekratnik i najveći zajednički djelitelj brojeva:
a) 2 i 4; b) 5 i 8; c) 10 i 15;
d) 30 i 20; e) 8 i 24; f) 1 i 12;
g) 7 i 11.

Zadaci za ponavljanje

- Među ovim brojevima nađi višekratnike broja 8:
12, 13, 16, 24, 1, 36, 48, 100.
- DA-NE pitalice. Zaokruži točan odgovor:

Broj 2 je višekratnik broja 20.	DA	NE
Broj 20 je višekratnik broja 2.	DA	NE
Broj 12 je višekratnik broja 12.	DA	NE
Broj 14 je djelitelj broja 5.	DA	NE
Broj 12 je višekratnik broja 6.	DA	NE
- Dopuni ovaj niz višekratnika:
a) 5, 10, 15, 20, __, __, __, __;
b) __, 6, 9, __, 15, 18, __;
- c) __, __, __, 44, 55, 66;
d) __, 36, __, 72, __, 108.
- Odredi sve brojeve između 50 i 60 koji su djeljivi s 2.
- Odredi sve brojeve između 122 i 150 koji su djeljivi s 4.
- Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 18:
12, 1, 2, 16, 7, 14, 5, 3, 6.
- Među ovim brojevima zaokruži djelitelje broja 90:
9, 2, 5, 16, 10, 1, 20, 90, 100, 50, 101, 25.

8. Čokolada pravokutnog oblika ima 20 "kockica". Koliko redaka može imati ta čokolada? Nacrtaj sve mogućnosti.
9. Bez računanja odredi s kojim brojevima je djeljiv zbroj:
 - a) $40 + 20 + 50 + 10$;
 - b) $12 + 14 + 16 + 18$;
 - c) $15 + 25 + 160 + 885$;
 - d) $28 + 14 + 35 + 14 + 140$.
10. Matija je u knjižari kupovao olovke, cijena jedne je 16 kn. Trebao je platiti 131 kn. Kako odmah možeš znati da je iznos pogrešan?
11. Dopuni rečenice rastavljajući brojeve na pribrojnike:

Broj 68 je djeljiv s 4 jer je $68 = 40 + 28$.

Broj 42 je djeljiv s 3 jer je _____.

Broj 114 je djeljiv sa 6 jer je _____.

Broj 93 je djeljiv s 3 jer je _____.
12. Bez računanja odredi koji umnošci su djeljivi s 10:
 - a) $13 \cdot 3 \cdot 43 \cdot 53$; b) $13 \cdot 20 \cdot 43$;
 - c) $10 \cdot 7$; d) $5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$;
 - e) $2 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 6 \cdot 26$; f) $45 \cdot 12$;
 - g) $32 \cdot 32 \cdot 32$.
13. Zadani su brojevi 105, 450, 233, 2330, 310, 5, 10, 1000, 400, 6 000 000, 410, 501, 255, 75, 100, 80 000, 600 000.
Koji od ovih brojeva su djeljivi s:
a) 5; b) 10; c) 100; d) 1000?
14. Od znamenaka 1, 2 i 0 složi sve troznamenkaste brojeve koji su djeljivi s:
a) 5; b) 10; c) 100. Znamenke se smiju ponavljati.
15. Navedi 7 troznamenkastih brojeva djeljivih s 2.
16. Zapiši jedan broj:
 - a) koji je djeljiv s 3 i 5;
 - b) koji je djeljiv s 3 i 10;
 - c) koji je djeljiv s 9 i 2;
 - d) koji je djeljiv s 9, 5 i 2.
17. Zapiši jedan broj:
 - a) koji je djeljiv s 3, ali nije djeljiv s 9;
 - b) koji je djeljiv s 9, ali nije djeljiv s 3.
18. Koje znamenke možeš umetnuti na mjesto jedinica u broju 402__, tako da broj bude djeljiv s:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 5; e) 9; f) 10.
19. Broj 45 rastavi na: a) faktore; b) proste faktore.
20. Ako pomnožim sve proste faktore broja 36 dobit ću broj _____.
21. Pronađi zajedničke djelitelje brojeva 56 i 100. Zatim pronadi D(56, 100).
22. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:
a) 45 i 72; b) 25, 125 i 625; c) 14 i 27.
23. Djeca u vrtiću slažu ceste od pločica koje su sve jednake veličine. Ivanov put dugačak je 56 cm, Marijin put dugačak je 64 cm, a Markov 72 cm. Kolika je duljina jedne pločice?
24. Pronađi:
a) D(25, 70); b) V(66, 44); c) D(44, 121);
d) V(16, 28, 12).
25. Dva biciklista treniraju po kružnoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi biciklist prijeđe stazu za 18 min, a drugi za 27 min. Nakon koliko vremena će se biciklisti opet naći na startu?



Ogledni test

1. DA-NE pitalice. Zaokruži točan odgovor:

Broj 15 je višekratnik broja 5.	DA	NE	
Broj 5 je višekratnik broja 15.	DA	NE	
Broj 4 je djelitelj broja 12.	DA	NE	
Broj 12 je djelitelj broja 1.	DA	NE	
2. Zapiši sve djelitelje broja:
 - a) 18; b) 70.
3. Zadani su brojevi 400, 24, 48, 27, 18 i 32. Koji od ovih brojeva su višekratnici broja:
 - a) 9; b) 2?
4. Brojevi 16, 32, 48, 64, ... su višekratnici broja:
 - a) 15; b) 16; c) 32.
5. Umetni znamenku na mjesto kvadratića tako da broj 104□ bude djeljiv s a) 3; b) 9; c) 5; d) 10.
6. Napiši sve proste brojeve koji se nalaze između 20 i 30.
7. Rastavi na proste faktore brojeve:
 - a) 28; b) 72; c) 150.
8. Pronađi najveći zajednički djelitelj brojeva:
 - a) 45 i 72; b) 100 i 125.
9. Pronađi najmanji zajednički višekratnik brojeva:
 - a) 15 i 40; b) 128 i 320.
10. Dva trkača treniraju po atletskoj stazi i u isto vrijeme kreću sa starta. Prvi trkač prijeđe stazu za 4 min, a drugi za 3 min.
 - a) Koji trkač je brži?
 - b) Nakon koliko vremena će se trkači opet naći na startu?
11. Soba je duga 480 cm i široka 320 cm. Treba je popločiti s najvećim pločicama kvadratnog oblika, tako da se niti jedna pločica ne treba rezati. Kolika će biti duljina stranica svake pločice?

Skupovi točaka u ravнини

Aritmetika i geometrija:

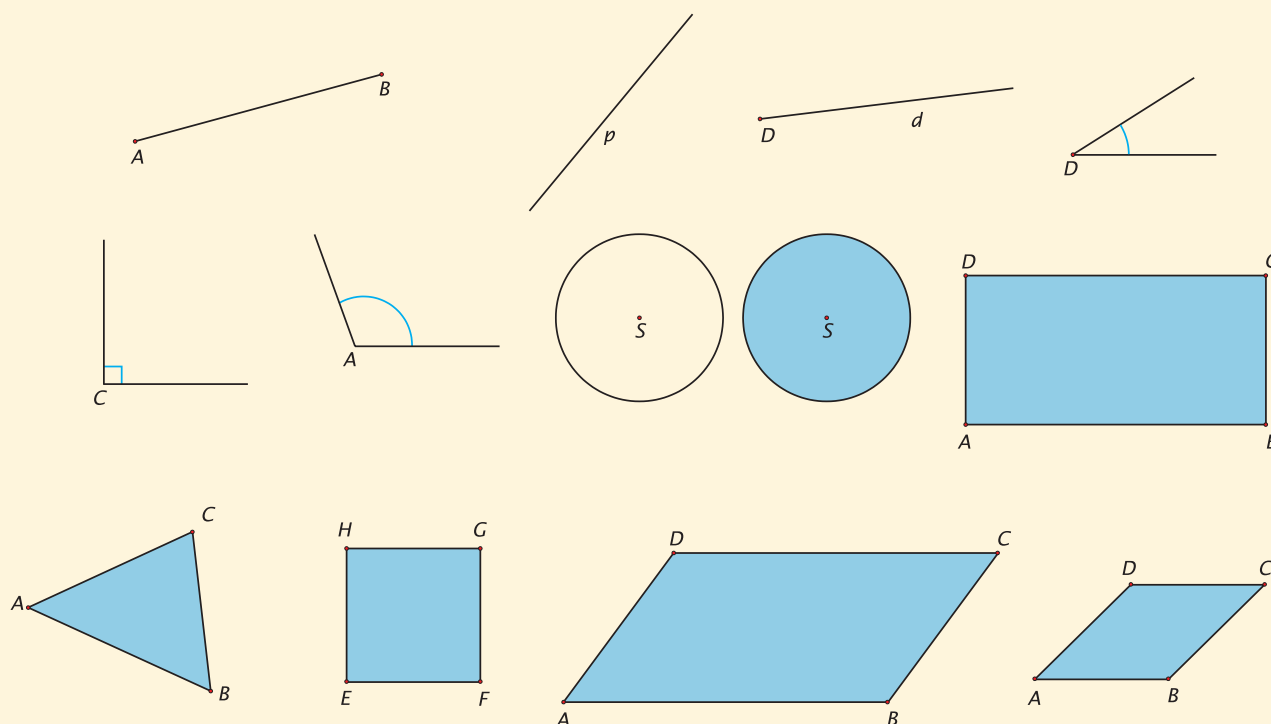
Matematika se dijeli na mnoge grane, no najstarija podjela matematike je na dva glavna dijela: na aritmetiku i geometriju.

Aritmetika je grana matematike koja se bavi brojevima i računanjem s brojevima. Riječ *aritmetika* dolazi od grčke riječi *arimos*, što znači broj. Zato se i matematička “bilježnica na kvadratiće” naziva aritmetičkom bilježnicom.

S druge strane, postoji i geometrija, grana matematike koja se bavi “matematičkim crtežima”. Geometrija je posebno razvijena prije više od 2000 godina u Staroj Grčkoj. Gotovo sve gradivo koje danas učimo u školi iz geometrije poznavali su još stari Grci, a prije njih i Egipćani i Babilonci. Oni su se počeli baviti geometrijom iz praktičnih razloga, jer je trebalo crtati i mjeriti granice između zemljišta. Odatle je geometrija i dobila ime; geometrija u prijevodu s grčkog znači: mjerenje Zemlje, zemljomjerstvo.



Prepoznaješ li ove skupove točaka?



Dosad smo upoznali neke skupove brojeva, npr. skup prirodnih brojeva, skup parnih brojeva, skup višekratnika broja 3, skup svih djelitelja broja 45 itd. I u geometriji ćemo susretati skupove, i to skupove točaka. Neki od skupova točaka nalaze se na prethodnoj slici. Koje od tih skupova ste spominjali u prva četiri razreda? Koji skupovi točaka sa slike su ti nepoznati? O njima ćeš više naučiti u ovom poglavlju.

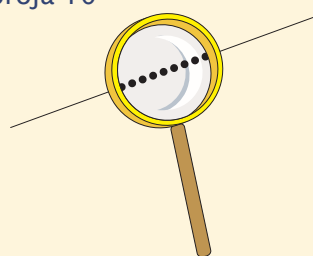
Skupovi

$\{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$ – skup parnih brojeva

$\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ – skup prirodnih brojeva

$\{10, 20, 30, 40, \dots\}$ – skup višekratnika broja 10

Pravac je skup točaka:



Važni pojmovi

točka, dužina, pravac

duljina dužine

okomiti i usporedni

pravci

skica, konstrukcija

kružnica i krug

kut, kutomjer

trokut

pravokutnik, kvadrat,

paralelogram, romb

polovište

simetrala dužine

osna simetrija

polupravac

mjerjenje kutova

U ovom poglavlju ćeš naučiti:

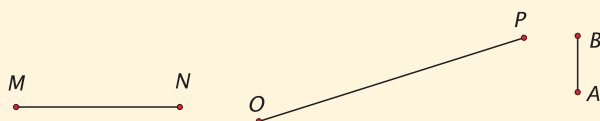
- Koji skupovi točaka postoje u ravni;
- U kojem odnosu mogu biti dva pravca u ravni;
- Što je kružni isječak, kružni odsječak, kružni luk, kružni vijenac;
- Mjeriti i crtati kutove pomoću kutomjera;
- Što je osna simetrija i gdje se nalazi u prirodi.

I još mnogo toga.



Kratki zadaci za ponavljanje:

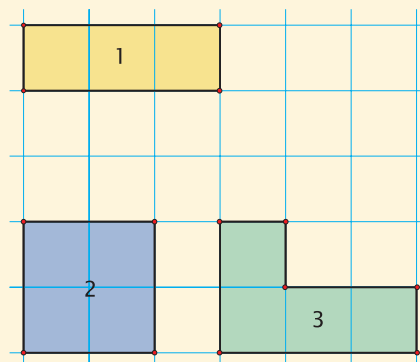
1. Izmjeri duljine ovih dužina:



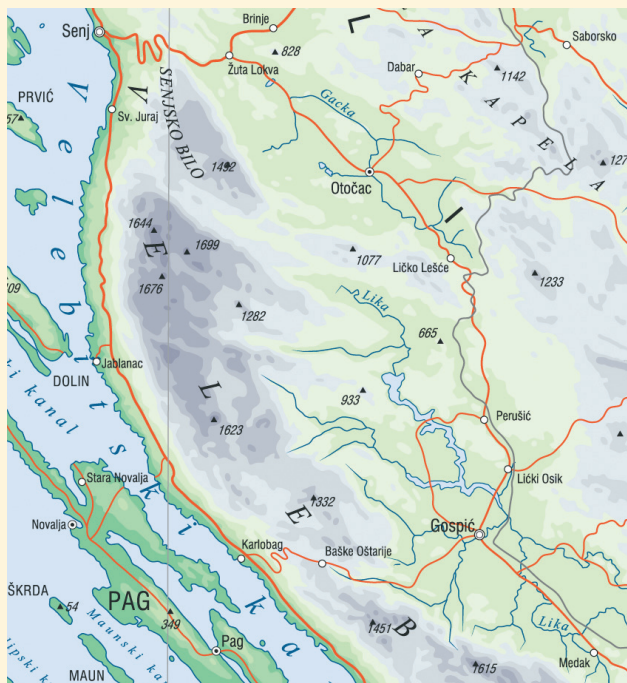
2. Koja je razlika između dužine i pravca?
3. Koja je razlika između pravca i polupravca?
4. Koje vrste kutova poznaješ?
5. Koja je razlika između pravokutnika i kvadrata?
6. Koje vrste trokuta poznaješ?
7. Kako glasi formula za izračunavanje opsega pravokutnika?
8. Kako glasi formula za izračunavanje opsega kvadrata?

9. Kako glasi formula za izračunavanje opsega trokuta?
10. Kako glasi formula za izračunavanje površine pravokutnika?
11. Kako glasi formula za izračunavanje površine kvadrata?

12. Izračunaj opseg i površinu:



3.1. Dužina, pravac, polupravac



Iz Senja u Gospić

Pogledaj kartu i odgovori na pitanja:

Kojim sve cestama možeš doći od Senja do Gospića?

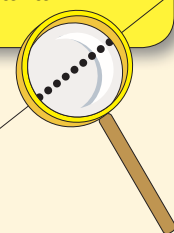
Koji je najkraći put cestom od Senja do Gospića?

Na karti povuci cestu kojom bi vodio najkraći mogući put od Senja do Gospića. Što misliš, zašto cesta nije napravljena po najkraćoj trasi?

Upoznajmo neke važne skupove točaka u geometriji.

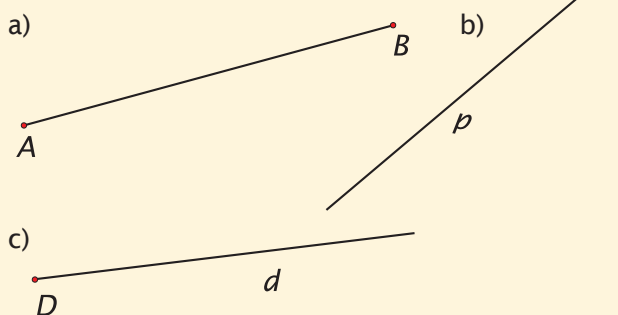
To su, primjerice, dužina, pravac, polupravac, krivulja, geometrijski likovi, poluravnina, ravnina itd.

Pravac se sastoji od točaka.



Primjer 1. Dužina, pravac, polupravac

Prepoznaješ li ove skupove točaka?



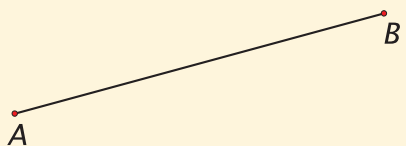
Rješenje:

a) Ovaj skup točaka se naziva **dužina**. Istaknute točke A i B nazivaju se **krajnje točke** dužine $\overline{AB}$ (ili rubne točke).

Dužina kojoj su krajnje točke A i B označava se s $\overline{AB}$ (čitaj: "dužina AB").

dužina
krajnje točke dužine
ili rubne točke dužine

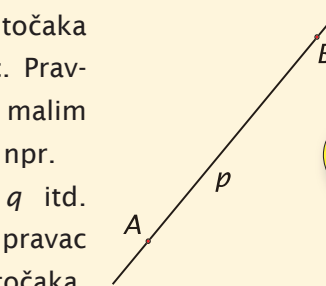
MI SE NALAZIMO NA KRAJEVIMA DUŽINE. ZATO SE ZOVEMO KRAJNJE TOČKE.



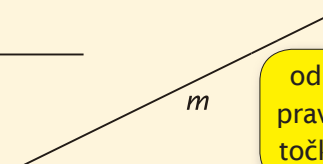
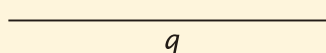
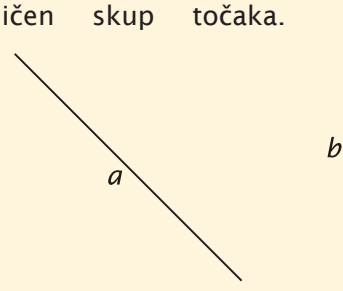
b) Ovaj skup točaka naziva se **pravac**. Pravce označavamo malim slovima abecede, npr. a, b, c, d, p, q itd. Primijetimo da pravac nema krajnjih točaka.

To znači da zamišljamo da se on neograničeno produljuje na obje svoje strane. Kažemo da je pravac neograničen skup točaka.

Nacrtamo li dvije točke, kroz njih ćemo moći provući samo jedan pravac. Kažemo da je pravac određen dvjema točkama.

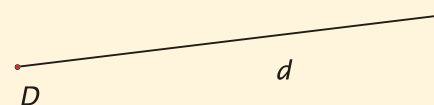


pravac



određenost pravca s dvije točke

c) Ovaj skup točaka se naziva **polupravac**. Istaknuta točka D je **početna točka** polupravca d . Polupravac je ograničen samo s jedne svoje strane, i to tamo gdje se nalazi njegova početna točka.



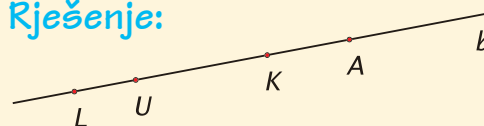
polupravac

Primjer 2. Dužina je dio pravca

Nacrtaj pravac b i na njemu istakni točke L, U, K, A . Ovim smo točkama na pravcu odredili neke dužine. Koliko je dužina određeno ovim točkama? Koje su to dužine?

$$\overline{LA} = \overline{AL}$$

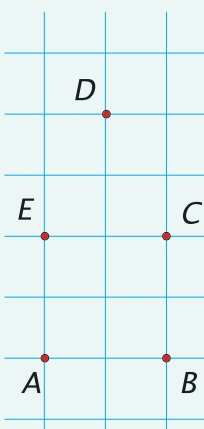
Rješenje:



Točkama L, U, K, A na pravcu b je određeno 6 dužina. To su dužine $\overline{LU}, \overline{LK}, \overline{LA}, \overline{UK}, \overline{UA}$ i $\overline{KA}$.

Zadaci:

1. Nacrtaj 5 točaka u bilježnicu, označi ih s A, B, C, D i X te nacrtaj dužine $\overline{XA}, \overline{XB}, \overline{CX}, \overline{XD}$ i $\overline{AB}$.



2. Nacrtaj 6 točaka u bilježnicu, označi ih te nacrtaj sve moguće dužine koje su određene s tih 6 točaka. Koliko ima tih dužina? Ispiši ih.

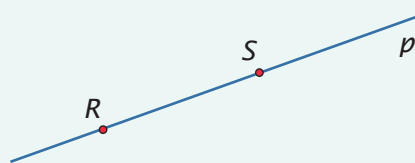
3. Nacrtaj sve moguće dužine s krajnjim točkama sa slike. Ispiši ih. Koliko ima tih dužina?

4. Pogledaj sliku i dopuni rečenice:

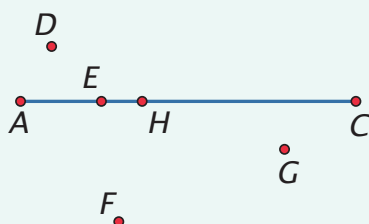
Točke _____ pripadaju pravcu p .

Točke R i S su _____ dužine $\overline{RS}$.

Točke R i S dijele pravac p na _____ i dva _____.

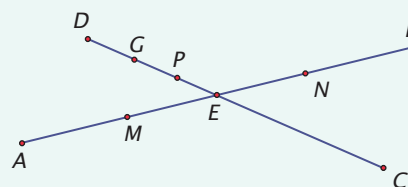


5. Koja od točaka pripada dužini $\overline{AC}$, a koje točke ne pripadaju?



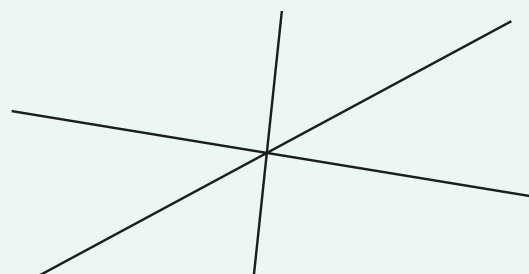
6. Pripadaju li dužini njezine krajnje točke?

7. Pogledaj dužine i točke na slici, a zatim ispuni tablicu. U tablici s "da" ili "ne" odgovori pripadaju li točke B, E i G zadanim dužinama:

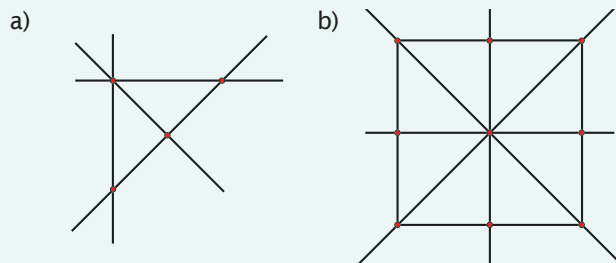


	Pripada li točka B	Pripada li točka E	Pripada li točka G
dužini $\overline{AB}$	da	da	ne
dužini $\overline{DE}$			
dužini $\overline{DC}$			
dužini $\overline{MN}$			
dužini $\overline{GP}$			
dužini $\overline{BN}$			

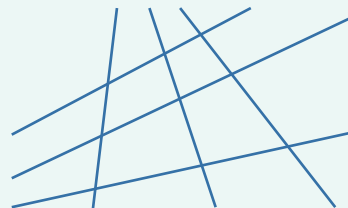
8. Koliko je pravaca, a koliko polupravaca na crtežu?



9. Koliko je pravaca, a koliko dužina na crtežu?



10. Koliko je dužina, a koliko sjecišta na slici:



Primjer 3. Udaljenost između dviju točaka

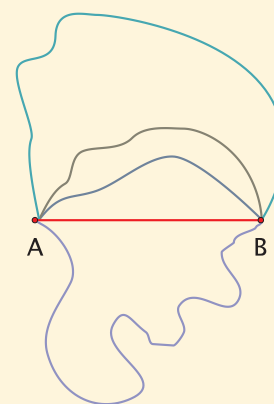


$|AB|$ - duljina dužine $\overline{AB}$

Dvije točke A i B mogu se spojiti na mnogo načina, "mnogim putovima":
Najkraću duljinu puta od točke A do točke B nazivamo **udaljenošću** točaka A i B.

U svakodnevnom životu često tu udaljenost nazivamo udaljenost zračnom linijom.

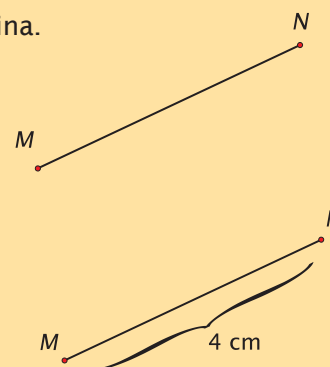
Udaljenost krajnjih točaka dužine nazivamo duljinom te dužine. Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavamo s $|AB|$. Tako je $|AB| = 3 \text{ cm}$ (čitamo: "duljina dužine $\overline{AB}$ je 3 cm").



PAZI! Nemoj pomiješati pojmove duljina i dužina.

Dužina je skup točaka, npr. evo jedne dužine:
dužina $\overline{MN}$

Duljina je broj (izražen u cm, mm, m itd.) koji prikazuje koliko je dugačka zadana dužina.
Tako je duljina ove dužine jednaka 4 cm.
 $|MN| = 4 \text{ cm}$

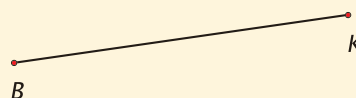


Primjer 4. Duljina dužine

Nacrtaj dužinu $\overline{BK}$ duljine 45 mm. Kolika je duljina dužine $\overline{KB}$? Zapiši to matematičkim simbolima.

Rješenje:

Nacrtajmo dužinu kojoj su krajnje točke B i K udaljene 45 mm:



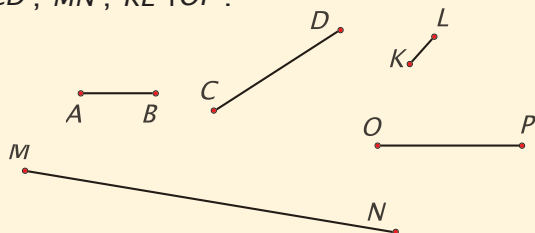
$|BK| = 45 \text{ mm}$

Naučili smo da je $\overline{BK} = \overline{KB}$, pa zaključujemo da su im i duljine jednake. To zapisujemo matematičkim simbolima:

$|BK| = |KB|$ i čitamo "duljina dužine $\overline{BK}$ jednaka je duljini dužine $\overline{KB}$ ".

Primjer 5. Procjena duljine dužine

Dužina $\overline{AB}$ sa slike duga je 1 cm. Bez korištenja ravnala procijeni koliko su duge dužine $\overline{CD}$, $\overline{MN}$, $\overline{KL}$ i $\overline{OP}$.



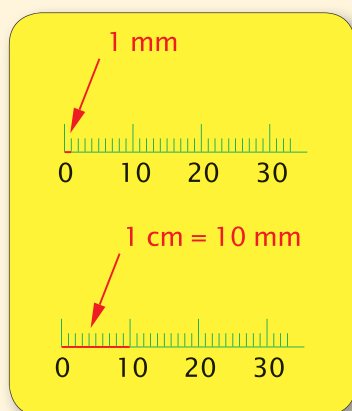
Svoje procjene zapiši u bilježnicu, a zatim ravnalom izmjeri točne duljine ovih dužina.

Rješenje:

Kod procjene duljine dužine također koristimo oznaku "približno jednako". Ako, primjerice, procijenimo da je duljina dužine $\overline{MN}$ otprilike 6 cm, to ćemo pisati ovako:

$$|\overline{MN}| \approx 6 \text{ cm.}$$

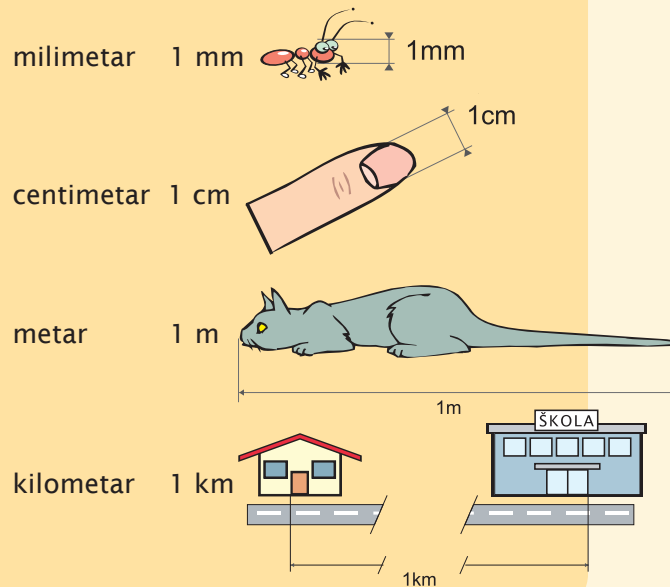
Točne duljine ovih dužina su: $|\overline{AB}| = 1 \text{ cm}$, $|\overline{CD}| = 2 \text{ cm}$, $|\overline{MN}| = 5 \text{ cm}$, $|\overline{OP}| = 2 \text{ cm}$.



Duljinu neke dužine izražavamo u mjernim jedinicama za duljinu. Osnovna mjerna jedinica za duljinu je 1 m (metar). Osim nje, često koristimo i manje jedinice od metra:

Primjećujemo da je duljina dužine $\overline{KL}$ manja od 1 cm, pa to nije prirodan broj izražen u centimetrima. U tom slučaju duljinu dužine $\overline{KL}$ izražavamo u mjernej jedinici manjoj od centimetra, a to je milimetar: $|\overline{KL}| = 5 \text{ mm}$.

Mjerne jedinice za duljinu:



milimetar: 1 mm
centimetar: 1 cm = 10 mm
decimetar: 1 dm = 10 cm = 100 mm
metar: 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm
Za mjerenje većih udaljenosti koristimo jedinicu tisuću puta veću od metra:
kilometar: 1 km = 1000 m

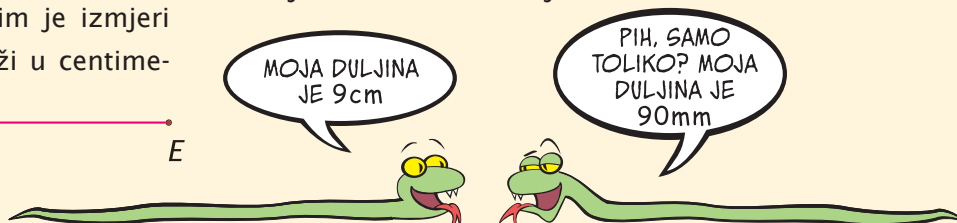
Primjer 6. Pretvaranje jedinica za duljinu

Procijeni duljinu ove dužine. Zatim je izmjeri ravnalom, te svoje rješenje prikaži u centimetrima i milimetrima.



Rješenje:

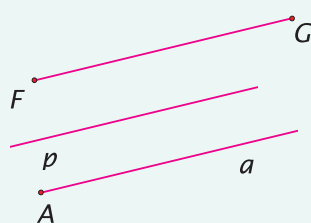
Duljina dužine sa slike je 8 cm = 80 mm



Zadaci:

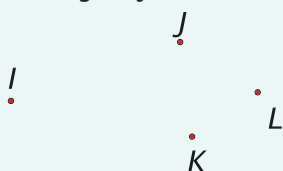
1. Nacrtaj točke A i B te prostoručno nacrtaj nekoliko "putova" od A do B . Koji je najkraći put između ovih dviju točaka? Kolika je udaljenost od A do B ?

2. Pogledaj sliku i odgovori na pitanja:



Kolika je duljina dužine $\overline{FG}$?
Kolika je duljina pravca p ?
Kolika je duljina polupravca a ?

3. Pogledaj sliku i:



a) procijeni udaljenost između svake dvije točke međusobno;
b) ravnalom izmjeri udaljenost između točaka i izrazi ih u milimetrima.

4. U bilježnicu nacrtaj pet točaka po volji i imenuj ih.
a) procijeni udaljenost između svih točaka međusobno;
b) ravnalom izmjeri udaljenost između točaka i izrazi ih u milimetrima.

5. Nacrtaj pravac p i na njemu točke A , B i C , ali tako da udaljenost između A i B bude 2 cm, a udaljenost između A i C bude 3 cm.
Zadatak ima 2 rješenja. Pronađi ih i odgovori koliko je $|BC|$.

6. Nacrtaj polupravac p s početnom točkom P i na njemu točke B i C , ali tako da udaljenost između P i B bude 12 mm, a udaljenost između P i C bude 35 mm.

Koliko rješenja ima zadatak? Koliko je $|BC|$?

7. Nacrtaj dužinu $\overline{CE}$ duljine 62 mm. Olovkom procijeni gdje se nalazi točka X koja dijeli dužinu $\overline{CE}$ na dva jednaka dijela. Koliko iznosi $|CX|$, a koliko $|EX|$?

8. Nacrtaj dužinu $|BC| = 36$ mm. Nacrtaj točku:
a) A na dužini $\overline{BC}$ koja je od B udaljena 11 mm;

b) D na dužini $\overline{BC}$ koja je od C udaljena 24 mm; Koliko iznosi $|AD|$?

9. Procijeni: a) duljinu tvog palca; b) duljinu svoje olovke; c) duljinu od tvoje klupe do školske ploče; d) duljinu kreveta u kome spavaš; e) duljinu svog stopala.

10. Dopuni rečenice:

Najkraću duljinu puta od točke A do točke B nazivamo _____ točaka A i B .
Udaljenost između krajnjih točaka dužine nazivamo _____ te dužine.

Neke mjerne jedinice za duljinu su: _____, _____, _____ i _____.

11. Pronađi pogrešku:

Dužina kuće je 8 m.

Duljina zida kuhinje od prozora do vrata je 7 km.

Udaljenost između dva učenika u klupi je 6 g.

12. Na ravnalu dobro uoči veličinu od 10 cm = 1 dm. Nabroji 10 predmeta koji imaju otprilike ovu duljinu.

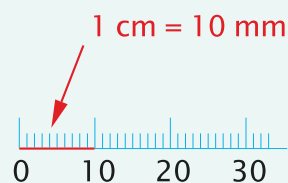
13. Udaljenost od 1 km dijete normalnim hodom prijeđe za otprilike 20 do 25 minuta.

a) Koliko ti vremena treba da stigneš od kuće do škole?

b) Je li udaljenost od tvog doma do škole veća ili manja od 1 km?

c) Procijeni kolika je udaljenost od tvoje kuće

do škole.



14. Skiciraj dužinu od: 1 cm, 2 cm, 4 cm, 6 cm, 7 cm. Zatim točnost svojih crteža provjeri mjerenjem ravnalom.

15. Skiciraj dužinu od: 15 mm, 5 mm, 55 mm, 25 mm, 75 mm. Zatim točnost svojih crteža provjeri mjerenjem ravnalom.

16. Centimetre pretvori u milimetre i rukom pokaži o kolikim se veličinama radi: 24 cm, 1 cm, 65 cm, 22 cm, 5 cm, 18 cm, 43 cm, 55 cm, 4 cm, 10 cm, 100 cm, 87 cm, 33 cm, 125 cm.

17. Milimetre pretvori u centimetre i rukom pokaži o kolikim se veličinama radi: 20 mm, 100 mm, 60 mm, 10 mm, 50 mm, 180 mm, 410 mm, 590 mm, 40 mm, 70 mm, 300 mm, 870 mm, 310 mm.

18. Izračunaj:

1 m = ____ cm; 1 dm = ____ cm; 1 km = ____ m;

1 km = ____ cm; 1 km = ____ mm; 1 m = ____ mm;

1 cm = ____ mm; 1 dm = ____ mm; 1 m = ____ dm.

19. Izračunaj:

10 m = ____ cm; 100 dm = ____ cm; 10 km = ____ m;

1000 m = ____ mm; 10 cm = ____ mm;

100 cm = ____ mm; 10 dm = ____ mm.

20. Izračunaj:

6 m = ____ cm; 8 dm = ____ cm; 5 km = ____ m;

17 m = ____ mm; 92 cm = ____ mm;

55 cm = ____ mm; 4 dm = ____ mm.

21. Izračunaj:

200 cm = ___ m; 500 mm = ___ cm;
670 mm = ___ cm; 8600 mm = ___ dm;
230 cm = ___ dm; 7600 cm = ___ m;
790 dm = ___ m.

22. Skiciraj dužine od: 13 mm, 8 mm, 49 mm, 24 mm, 67 mm. Zatim točnost svojih crteža provjeri mjerenjem ravnalom.

23. Koje od ovih rečenica su točne? Netočne rečenice ispravi.

Duljina dužine je 7 kg. Dužina duljine je 7 cm.

7 cm = 70 mm

Duljina pravca je 5 cm.

Palac je dug otprilike 5 m.

Palac je dug otprilike 5 mm.

Pravac je dug 6 mm.

Ako je $|AB| = 12$ cm, onda je $|BA| = 120$ mm.

2 mm = 20 cm

Duljina znači isto što i dužina.

Palac je dug otprilike 5 cm.

Duljina polupravca je 5 dm.

18 dm = 180 cm

24. Nacrtaј dužine $\overline{DC}$, $\overline{CE}$, $\overline{CF}$ i $\overline{FD}$.

a) procijeni duljine ovih dužina;

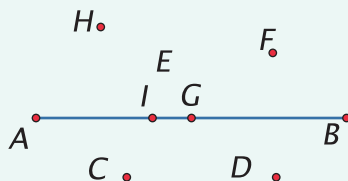
b) izmjeri njihove duljine i izrazi ih u milimetrima.

Vježbalica

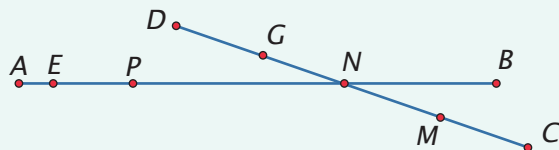
1. Nacrtaј 5 točaka u bilježnicu, označi ih s A, B, C, D i X te nacrtaј dužine $\overline{XA}$, $\overline{XB}$, $\overline{CX}$, $\overline{XD}$ i $\overline{AB}$, i izmjeri ih.

2. Nacrtaј 6 točaka u bilježnicu, označi ih te nacrtaј sve moguće dužine koje su određene s tih 6 točaka. Koliko ima tih dužina? Ispiši ih i izmjeri.

3. Koja od točaka pripada dužini $\overline{AB}$, a koje točke ne pripadaju?

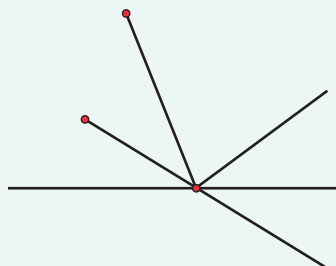


4. Pogledaj dužine i točke na slici, a zatim ispuni tablicu. U tablici s "da" ili "ne" odgovori pripadaju li točke B, E i G zadanim dužinama:

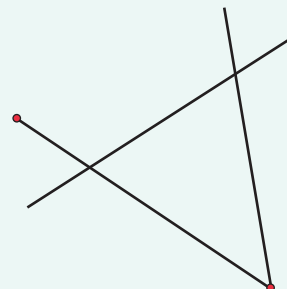


	Pripada li točka B	Pripada li točka E	Pripada li točka G
dužini AB	da	da	ne
dužini DE			
dužini DC			
dužini MN			
dužini GP			
dužini BN			

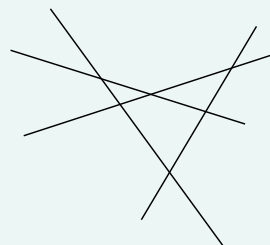
5. Koliko je pravaca, polupravaca i dužina ima na crtežu:



6. Koliko je pravaca, polupravaca i dužina ima na crtežu:



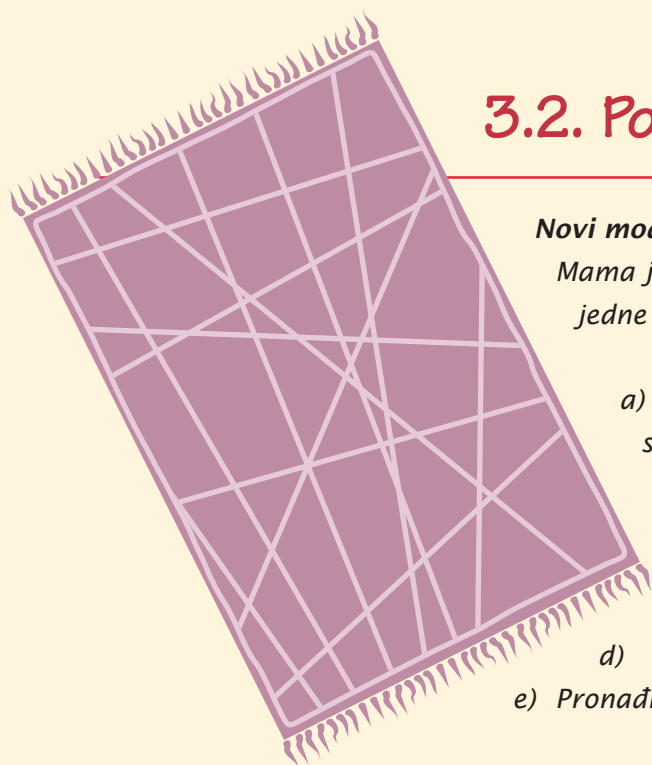
7. Koliko je dužina, a koliko sjecišta na slici:



8. Pogledaj sliku i:
 - a) procijeni udaljenost između svake dvije točke međusobno;
 - b) ravnalom izmjeri udaljenost između točaka i izrazi ih u milimetrima.
9. U bilježnicu nacrtaj pet točaka po volji i imenuj ih.
 - a) procijeni udaljenost između svih točaka međusobno;
 - b) ravnalom izmjeri udaljenost između točaka i izrazi ih u milimetrima.
10. Nacrtaj dužine , , i .
 - a) procijeni duljine ovih dužina;
 - b) izmjeri njihove duljine i izrazi ih u milimetrima.
11. Nacrtaj pravac p i na njemu točke A , B i C , ali tako da:
 - a) udaljenost između A i B bude 4 cm;
 - b) udaljenost između A i C bude 37 mm.

Zadatak ima 2 rješenja. Pronađi ih i odgovori koliko je $|BC|$.
12. Nacrtaj polupravac p s početnom točkom P i na njemu točke B i C , ali tako da:
 - a) udaljenost između P i B bude 15 mm;
 - b) udaljenost između P i C bude 27 mm.

Koliko rješenja ima zadatak? Koliko je $|BC|$?
13. Nacrtaj dužinu $|BC| = 45$ mm. Nacrtaj točku:
 - a) A na dužini koja je od B udaljena 13 mm;
 - b) D na dužini koja je od C udaljena 28 mm; Koliko iznosi $|AD|$?
14. Skiciraj dužinu od: a) 20 mm; b) 8 mm; c) 57 mm; d) 30 mm. Zatim točnost svojih crteža provjeri mjerenjem ravnalom.
15. Centimetre pretvori u milimetre: a) 28 cm; b) 6 cm; c) 23 cm; d) 5 cm.
16. Milimetre pretvori u centimetre: a) 70 mm; b) 430 mm; c) 4100 mm; d) 670 mm.
17. Izračunaj:
 - a) 23 m = ____ cm; b) 130 cm = ____ dm;
 - c) 143 km = ____ m; d) 110 dm = ____ m;
 - e) 15 km = ____ mm; f) 15 m = ____ mm;
 - g) 1800 cm = ____ m; h) 12 dm = ____ mm;
 - i) 19000 m = ____ km.
18. Izračunaj:
 - a) 20 m = ____ cm; b) 240 cm = ____ dm;
 - c) 30 km = ____ m; d) 1100 dm = ____ m;
 - e) 150 km = ____ mm; f) 1500 m = ____ dm;
 - g) 180 cm = ____ mm; h) 56 dm = ____ mm;
 - i) 19000 dm = ____ mm.
19. Izračunaj:
 - a) 23 km = ____ cm; b) 1200 m = ____ dm;
 - c) 5400 cm = ____ m; d) 3000 mm = ____ m;
 - e) 45 m = ____ cm; f) 51 km = ____ mm;
 - g) 340000 m = ____ km; h) 53 dm = ____ mm;
 - i) 700000 m = ____ km.



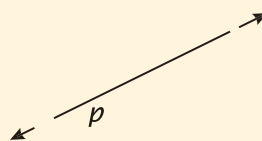
3.2. Položaj pravaca u ravni

Novi modreni tepih

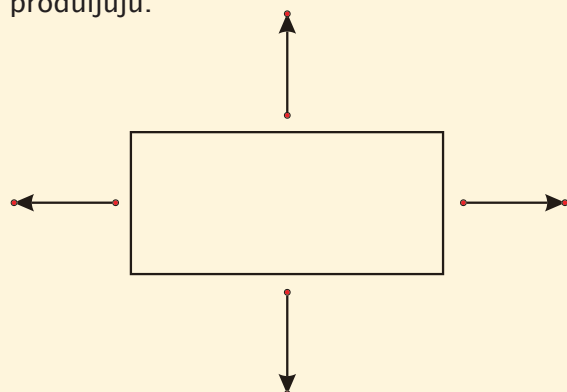
Mama je kupila novi tepih za dječju sobu. Zamisli da je tepih dio jedne ravnine, a da ravne linije na njemu predstavljaju pravce.

- a) Pronađi dva pravca koji se sijeku na tepihu i pokaži mjesto gdje se sijeku;
- b) Pronađi bar dva pravca koji se ne sijeku na tepihu, ali će se sjeći kada ih produžimo. Olovkom procijeni mjesto gdje će se sjeći;
- c) Pronađi dva pravca koji se uopće ne sijeku;
- d) Pronađi tri pravca koji se sijeku u jednoj točki;
- e) Pronađi tri pravca od kojih se svaka dva međusobno sijeku.

Za početak, prisjetimo se što znamo o pravcu.



Iako na papiru crtamo samo jedan dio pravca, zamišljamo kako se on neograničeno produljuje u oba smjera. Isto je s ravninom. Nacrtamo li neki lik na papiru, primjerice pravokutnik, zamislimo da se sve njegove četiri stranice neograničeno produljuju.



Takav “ravan” neograničen skup točaka naziva se **ravninom**. Ravninu obično crtamo ovako:

ravnina

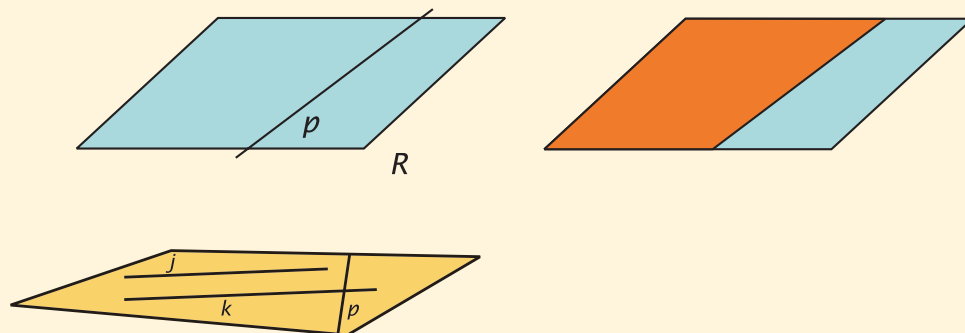


Pri tome ne zaboravimo da je ovdje nacrtan samo dio ravnine, ona je neograničen skup točaka.

Učitelj svoje geometrijske crteže prikazuje na školskoj ploči koju zamišljamo kao dio ravnine. Učenici pritom svoje crteže crtaju u bilježnicu koju također zamišljamo dijelom ravnine.

Nacrtamo li pravac u ravnini, on će ravninu dijeliti na dvije **poluravnine**.

poluravnina



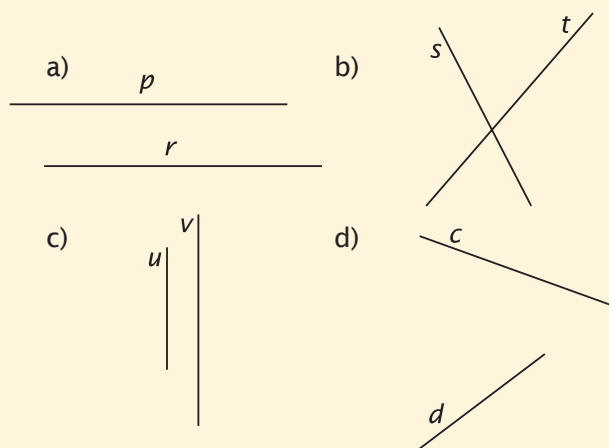
Na slici vidimo da pravci u ravnini mogu biti u različitim položajima. Neki od njih se sijeku, a neki se ne sijeku.

- Pravci p i k se sijeku.
- Pravci j i k se ne sijeku. Oni su **usporadni pravci**.
- Pravci j i p se također sijeku.

Naučimo više o položaju pravaca u ravnini kroz nekoliko primjera.

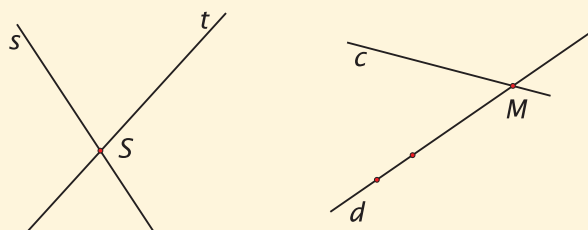
Primjer 1. Položaj pravaca u ravni

Koji od ovih pravaca se sijeku, a koji ne?



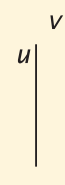
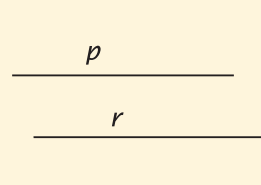
Rješenje:

Pravci na slikama b) i d) sijeku se u jednoj točki. Točka u kojoj se sijeku dva pravca naziva se **sjecištem**. Označimo sa S sjecište pravaca s i t sa slike b). Sjecište S je jedina točka koja pripada i pravcu s i pravcu t . Također, označimo s M sjecište pravaca c i d sa slike d).



Sjecište je točka u kojoj se sijeku dva pravca ili više njih.

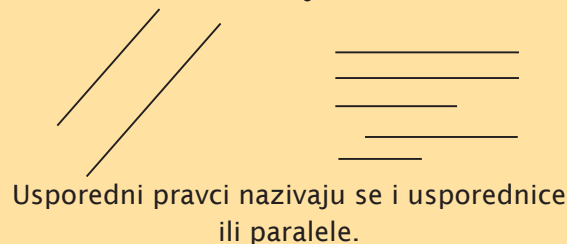
Pravci na slikama a) i c) se ne sijeku. Možemo ih produživati koliko želimo, oni nikada neće imati sjecište. Pravce koji se ne sijeku nazivamo **usporodnim pravcima**.



usporodni pravci
ili paralelni pravci
 $p \parallel r$

Za usporodne pravce koristimo matematički simbol $\parallel$. Pišemo $p \parallel r$ i čitamo: "pravac p je usporodan s pravcem r ". Pročitaj: $u \parallel v$

Usporedni pravci su pravci u ravni koji se ne sijeku.



Usporedni pravci nazivaju se i usporodnice ili paralele.

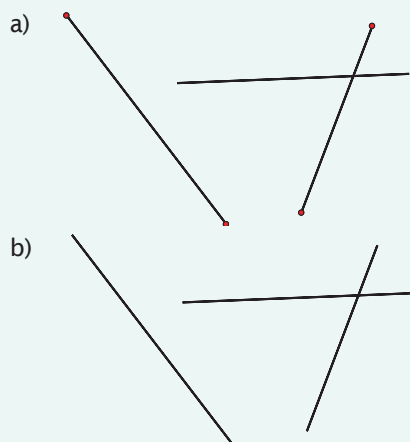
Primijetimo da dva pravca u ravni mogu biti samo u dva položaja:

pravci se mogu sjeći ili mogu biti usporodni.

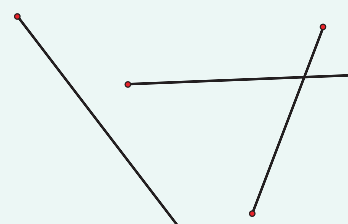
Zadaci:

1. Gdje će se ovi polupravci, pravci i dužine sjeći?

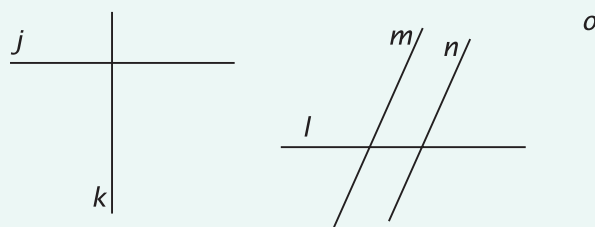
Nacrtaj sva sjecišta:



c)



2. Koji od pravaca sa slike se sijeku, a koji su usporodni?



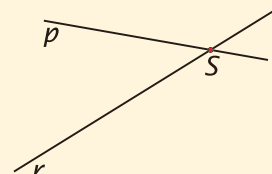
Primjer 2. Pravci se sijeku

Nacrtaj pravce p i r koji se sijeku.

Rješenje:

Nije teško nacrtati dva pravca koji se sijeku. Za

to nam je potrebno samo jedno ravalo. Njihovo sjecište označimo slovom S :



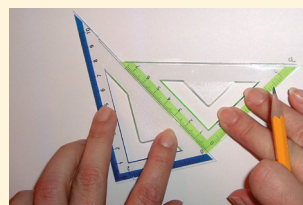
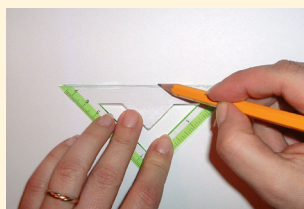
Primjer 3. Usporedni pravci

Nacrtaj pravce a i b koji su usporedni.

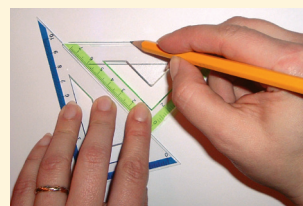
Rješenje:

Prisjetimo se kako se pomoću dvaju trokuta crtaju usporedni pravci:

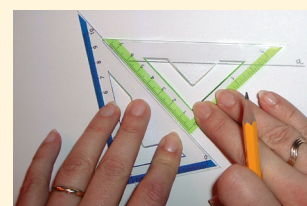
1. nacrtajmo pravac a koristeći najdulju stranicu trokuta za crtanje



3. pomičemo prvi trokut niz stranicu pomoćnog trokuta



2. pomoćni trokut prislonimo uz slobodnu stranicu prvog trokuta



4. na željenoj udaljenosti povučemo pravac b usporedan s pravcem a

Primjer 4. Usporednica kroz točku

Uradimo ovaj matematički diktat:

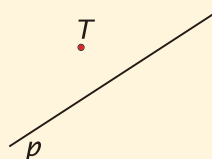
- Nacrtaj pravac p ;
- Istakni u ravni točku T koja ne pripada pravcu p ;
- Nacrtaj pravac d koji prolazi točkom T i koji je usporedan s p .

Pravac usporedan sa zadanim pravcem nazivamo **usporednicom**.

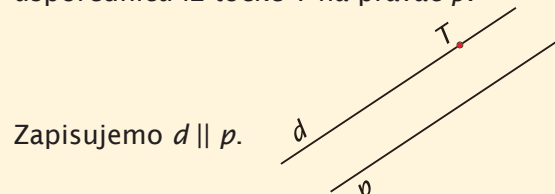
Rješenje:

Radimo crtež korak po korak kako je zadano u diktatu:

- Nacrtajmo pravac p i točku T koja ne pripada pravcu:



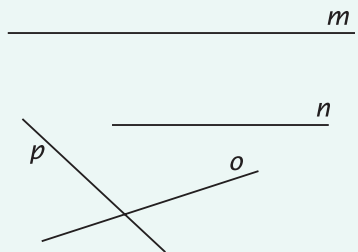
- Nacrtajmo sada usporednicu s pravcem p postupkom opisanim u Primjeru 2. Usporednica mora prolaziti točkom T pa prvi trokut povucimo do točke T . Zatim nacrtajmo usporednicu iz točke T na pravac p .



Zadaci:

1. Nacrtaj dva pravca koji se sijeku.
2. Nacrtaj tri pravca koji se sijeku u jednoj točki.
3. Nacrtaj dva usporedna pravca.
4. Nacrtaj tri usporedna pravca.
5. Nacrtaj dužinu $\overline{AB}$, a zatim nacrtaj dužinu $\overline{CD}$ koja je usporedna s njom.
6. Nacrtaj trokut $\triangle ABC$, a zatim nacrtaj dva pravca koji su paralelni s dužinom $\overline{AC}$.

7. Koji od ovih pravaca su usporedni? Zapiši to matematičkim simbolima:

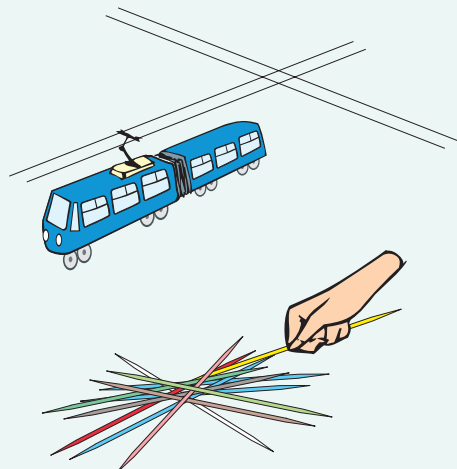


8. Na slikama vidiš neke primjere usporednih pravaca iz života. Nabroji još neke primjere.

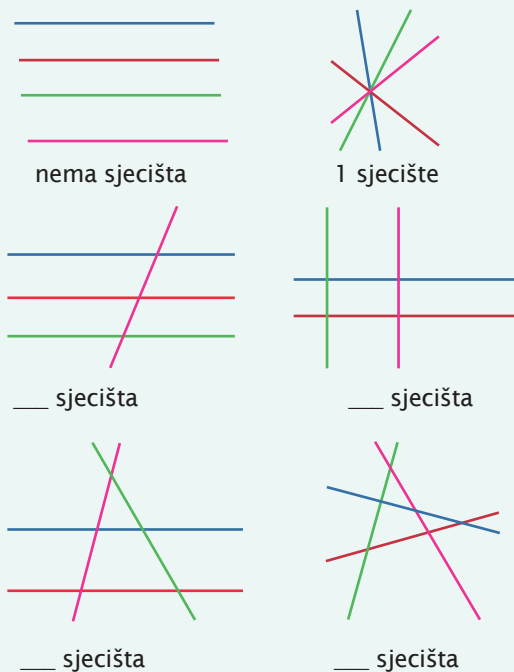


10. Pogledaj ove pravce. Svakom pravcu prosto-ručno nacrtaj neki njegov usporedni pravac.
11. U kojem položaju mogu biti 3 pravca u ravnini? Skiciraj i nacrtaj sve mogućnosti.
12. Rukom nacrtaj sve usporednice s pravcem p koje prolaze zadanim točkama:
13. Nacrtaj pravac i točku koja mu ne pripada. Kroz tu točku nacrtaj usporednicu sa zadanim pravcem.
14. Nacrtaj pravac p i točku A koja ne pripada pravcu p . Nacrtaj:
- pravac a koji prolazi kroz A i s pravcem p ima jednu zajedničku točku. Koliko takvih pravaca ima?
 - pravac b koji prolazi kroz A i s pravcem p nema zajedničkih točaka. Koliko takvih pravaca ima?
15. Nacrtaj tri pravca a , b i c od kojih se svaka dva međusobno sijeku u točkama C , A i B (a i b se sijeku u C , b i c se sijeku u A , a i c se sijeku u B). Nacrtaj usporednice s tim pravcima kroz točke A , B i C .
16. Ako je pravac a usporedan s pravcem b , a pravac b usporedan s pravcem c , u kakvom su međusobnom položaju pravci a i c ?
Odgovori i skiciraj.
18. Nacrtaj pravac p i točku A koja pripada pravcu p . Nacrtaj:

17. Na slikama vidiš neke primjere pravaca koji se sijeku. Navedi još neke primjere.



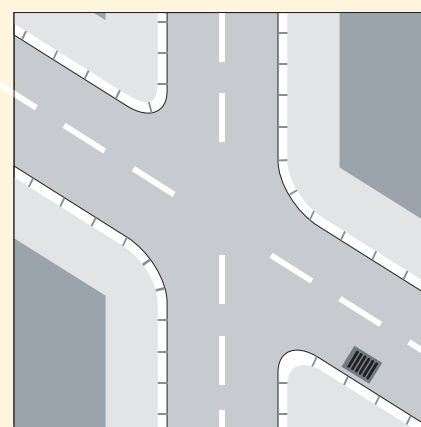
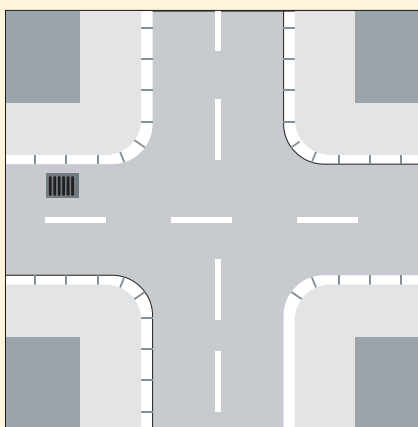
- pravac a koji prolazi kroz A i s pravcem p ima jednu zajedničku točku. Koliko takvih pravaca ima?
 - pravac b koji prolazi kroz A i s pravcem p nema zajedničkih točaka. Koliko takvih pravaca ima?
19. Nacrtaj pravac m i točku M koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac n kroz točku M takav da je $n \parallel m$.
20. Nacrtaj pravac t . Zatim nacrtaj nekoliko njemu usporednih pravaca. Koliko jedan pravac može imati usporednih pravaca?
21. Pogledaj u kojem položaju mogu biti 4 pravca u ravnini. Koliko sjecišta oni mogu imati?



Zašto ih se ne može nacrtati tako da imaju samo 2 sjecišta? Pokušaj skicirati tu sliku.

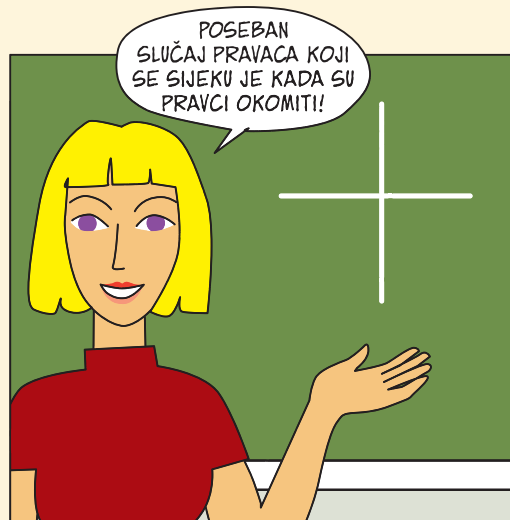
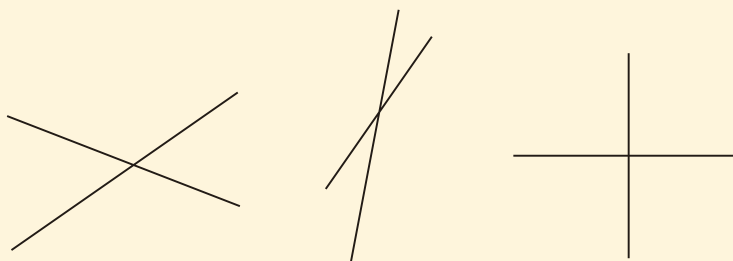
3.3. Okomiti pravci

Pazi, križanje!



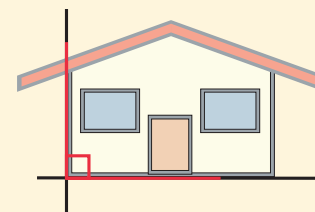
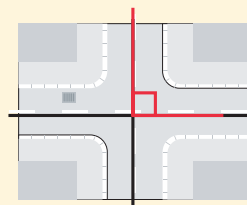
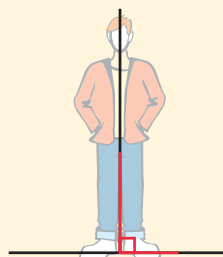
Zamisli da dolaziš biciklom na ova križanja. Koje križanje je opasnije? Iz kojih smjerova je posebno nepregledno?

Naučili smo da pravci u ravnini mogu imati samo dva položaja: mogu biti usporedni ili se sijeku. Pogledajmo neke pravce koji se sijeku:



Položaj pravaca na posljednjoj slici posebno je zanimljiv u matematici i tehnici. To su **okomiti pravci**.

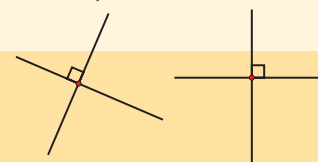
Pogledajmo ove situacije iz svakodnevnog života.



Svi pravci sa slika se sijeku, ali ne bilo kako. To su okomiti pravci. Da bismo istaknuli da su dva pravca okomita, sliku označavamo znakom $\perp$.

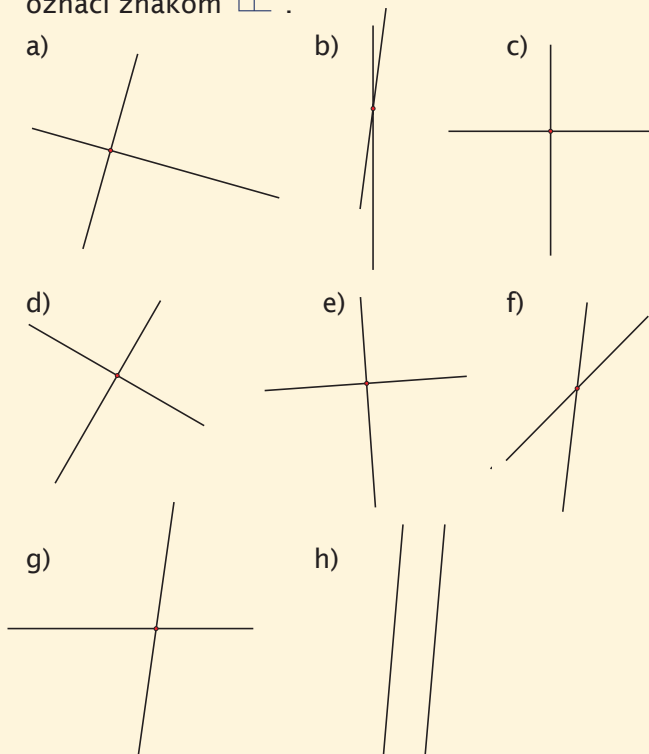
okomiti pravci

Okomite pravce na slici označavamo znakom $\perp$.



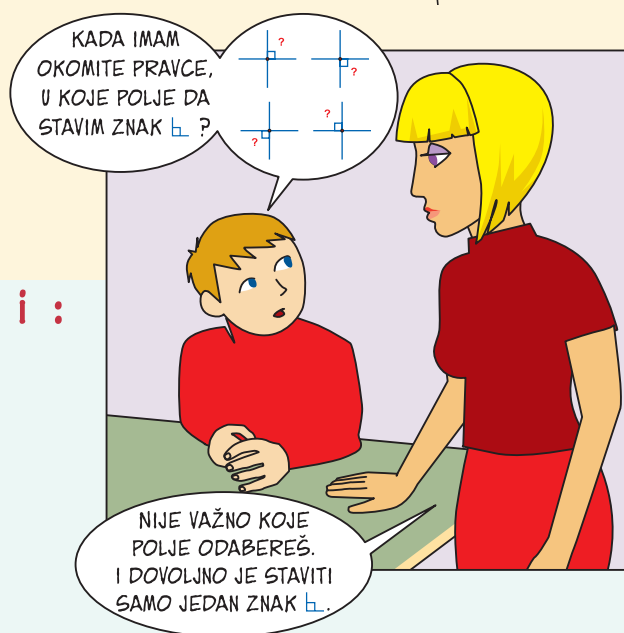
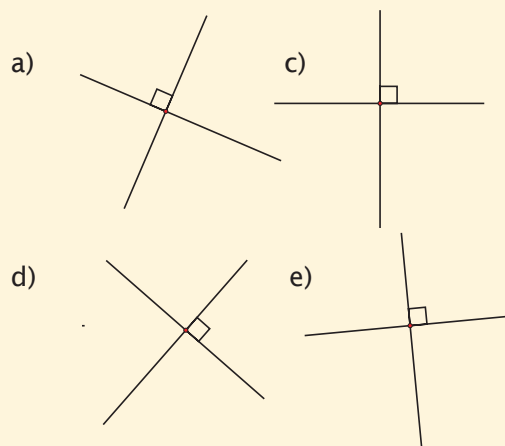
Primjer 1. Prepoznavanje okomitih pravaca

Koji od ovih pravaca su okomiti? Pronađi ih i označi znakom $\perp$.



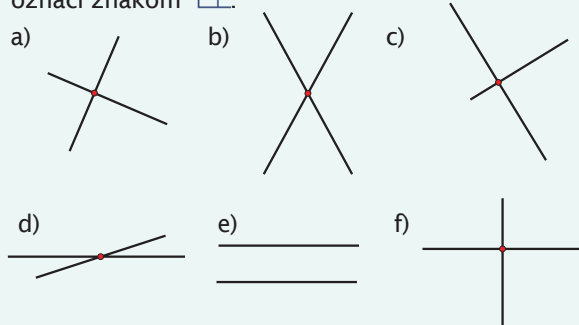
Rješenje:

Pravci na slici h) su usporedni i uopće se ne sijeku. Ostale slike prikazuju pravce koji se sijeku, no nisu svi okomiti. Okomiti su pravci na slikama a), c), d) i e). Stoga ih označimo znakom $\perp$:

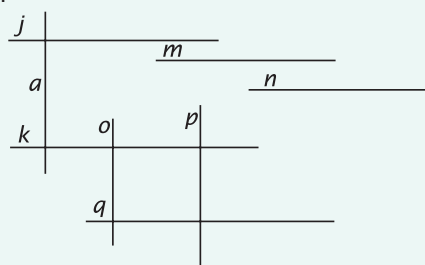


Zadaci:

1. Koji od ovih pravaca su okomiti? Pronađi ih i označi znakom $\perp$.

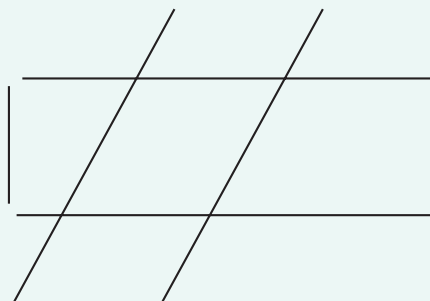


2. Pogledaj sliku:



- Koji od ovih pravaca su međusobno usporedni?
- Koji od ovih pravaca su okomiti na pravac a ?
- Koji od ovih pravaca su okomiti na pravac a ?

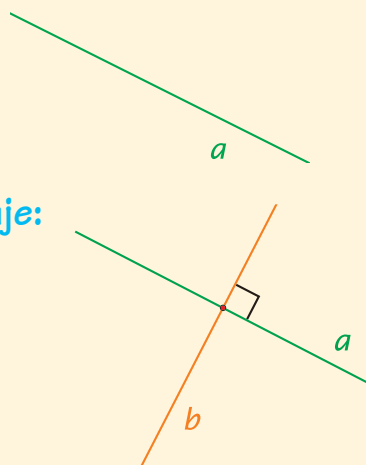
3. Imenuj pravce sa slike. Koji od ovih pravaca su međusobno okomiti? Zapiši to matematičkim simbolima:



Primjer 2. Skiciranje okomitih pravaca

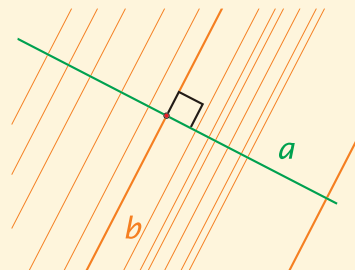
Zadan je pravac a . Skiciraj njemu okomit pravac b .

Rješenje:



Okomite pravce označavamo znakom $\perp$. Tako za pravce a i b sa slike vrijedi da je $a \perp b$ i čitamo: "pravac a je okomit na pravac b ".

Primijetimo da ovaj zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. Pravac b smo mogli nacrtati i na drugim mjestima, ali tako da uvijek bude $a \perp b$:



znak $\perp$

Novi matematički simboli:

$a \parallel b$ "pravac a je usporedan s pravcem b "

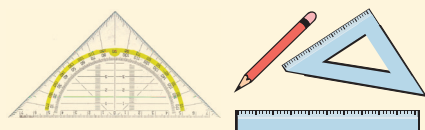
$a \perp b$ "pravac a je okomit na pravac b "

Pročitaj:

$c \perp d$, $e \perp f$, $m \parallel a$, $k \perp x$, $t \parallel s$, $n \perp r$.

Primjer 3. Crtanje okomitih pravaca

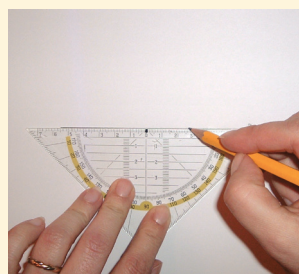
Nacrtaj pravce a i b tako da je $a \perp b$.



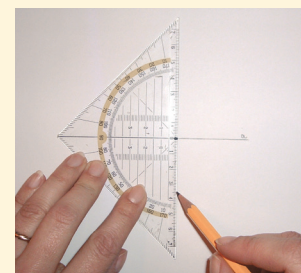
Rješenje:

Treba nacrtati okomite pravce a i b . Postupak za crtanje okomitih pravaca pomoću geotrokuta:

1. nacrtamo neki pravac a ,



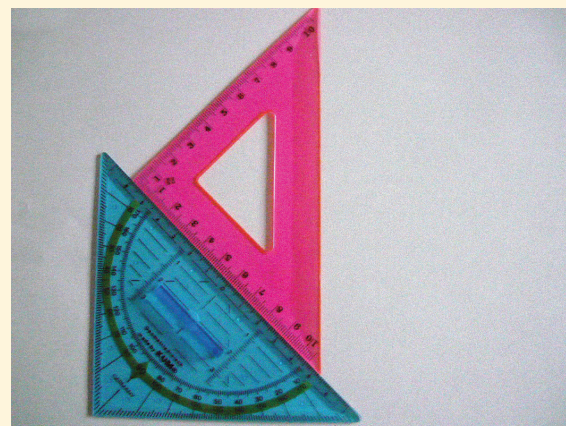
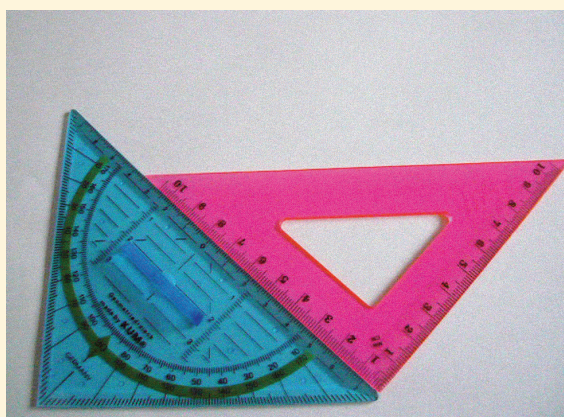
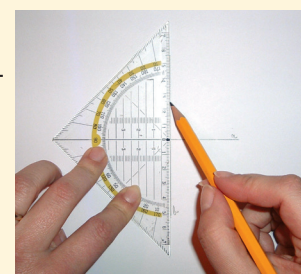
2. okrenemo geotrokut tako da se njegova središnja linija poklopi s pravcem a ,



3. povučemo pravac b po najduljoj stranici geotrokuta.

Zapisujemo $a \perp b$.

Naravno, to je isto kao $b \perp a$.



Zadaci:

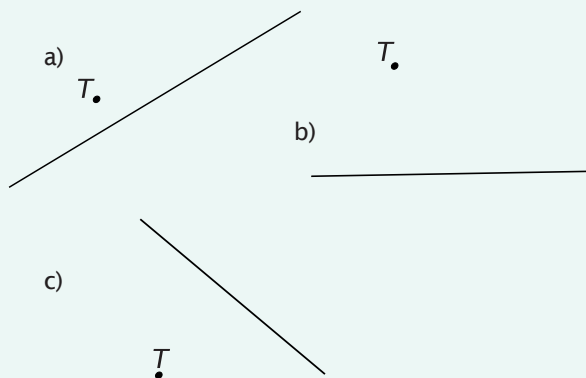
4. Nacrtaj dva okomita pravca.
5. Nacrtaj pravac i točku koja mu ne pripada. Kroz tu točku nacrtaj okomicu na zadani pravac.
6. Nacrtaj pravac p i točku T na njemu. Nacrtaj pravac a koji prolazi kroz T i s pravcem p ima jednu zajedničku točku. Koliko takvih pravaca ima?
7. Nacrtaj pravac m i točku M koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac n kroz točku M tako da je:
a) $n \perp m$; b) $m \parallel n$.
8. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku. Na pravcu a istakni točku A , a na pravcu b istakni točku B .

Nacrtaj: a) okomicu iz A na b ; b) okomicu iz b na A .

9. Nacrtaj tri pravca a , b i c od kojih se svaka dva međusobno sijeku u točkama C , A i B (a i b se sijeku u C , b i c se sijeku u A , a i c se sijeku u B). Nacrtaj okomice tih pravaca kroz točke A , B i C .
10. Ako je pravac a okomit na pravac b , a pravac b okomit na pravac c , u kakvom su međusobnom položaju pravci a i c ? Odgovori i skiciraj.
11. Ako je pravac a okomit na pravac b , a pravac b usporedan s pravcem c , u kakvom su međusobnom položaju pravci a i c ? Odgovori i skiciraj.

Vježbalica

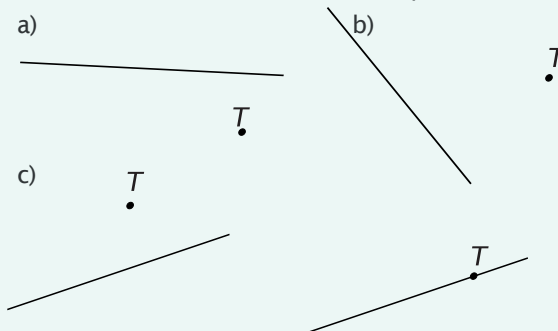
1. Nacrtaj dva pravca koji se sijeku.
2. Nacrtaj pet pravaca koji se sijeku u jednoj točki.
3. Nacrtaj četiri pravca od kojih se svaka dva međusobno sijeku.
4. Pogledaj u kojem položaju mogu biti 3 pravca u ravni. Koliko sjecišta oni mogu imati?
5. U kojem položaju mogu biti 4 pravca u ravni? Skiciraj sve mogućnosti.
6. U kojem položaju mogu biti 6 pravaca u ravni? Skiciraj sve mogućnosti.
7. Svakom od zadanih pravaca njegov usporedan pravac koji prolazi točkom T :



8. Nacrtaj pravac a . Zatim skiciraj što više njemu usporednih pravaca. Koliko jedan pravac može imati usporednih pravaca?
9. Nacrtaj pravac b i točku T koja mu ne pripada. Nacrtaj pravac koji prolazi točkom T i siječe pravac b . Možeš li pronaći još koji takav pravac? Koliko ih ima?

10. Nacrtaj pravac c i točku T koja mu ne pripada. Nacrtaj pravac koji prolazi točkom T i usporedan je s pravcem c . Možeš li pronaći još koji takav pravac? Koliko ih ima?
11. Nacrtaj pravac d i točku D koja mu ne pripada. Kroz tu točku nacrtaj usporednicu sa zadanim pravcem.
12. Nacrtaj pravac e i točku E koja ne pripada pravcu p . Nacrtaj:
a) pravac a koji prolazi kroz E i s pravcem e ima jednu zajedničku točku. Koliko takvih pravaca ima?
b) pravac b koji prolazi kroz E i s pravcem e nema zajedničkih točaka. Koliko takvih pravaca ima?
13. Nacrtaj pravac f i točku F na njemu. Nacrtaj:
a) pravac a koji prolazi kroz F i s pravcem f ima jednu zajedničku točku. Koliko takvih pravaca ima?
b) pravac b koji prolazi kroz F i s pravcem f ima beskonačno mnogo zajedničkih točaka.
14. Nacrtaj pravac g i točku G koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac h kroz točku G takav da je $g \parallel h$.
15. Ako je pravac e usporedan s pravcem f , a pravac f usporedan s pravcem g , u kakvom su međusobnom položaju pravci e i g ? Odgovori i skiciraj.

16. Povuci okomicu iz točke na zadani pravac:



17. Nacrtaj pravac a i točku A koja mu ne pripada.
 a) Nacrtaj pravac koji prolazi točkom A i siječe pravac a . Možeš li pronaći još koji takav pravac? Koliko ih ima?
 b) Nacrtaj pravac koji prolazi točkom A i okomit je na pravac a . Možeš li pronaći još koji takav pravac? Koliko ih ima?
18. Nacrtaj dva okomita pravca.
19. Nacrtaj pravac i točku koja mu ne pripada. Kroz tu točku nacrtaj okomicu na zadani pravac.

20. Nacrtaj pravac b i točku B koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac c kroz točku B takav da je:
 a) $b \perp c$; b) $c \perp b$.
21. Nacrtaj pravce d i c koji se sijeku. Na pravcu d istakni točku D , a na pravcu c istakni točku C . Nacrtaj:
 a) okomicu iz D na c ;
 b) okomicu iz d na C .

3.4. Kružnica i krug

Ludbreg – centar svijeta

Ludbreg je grad u sjeverozapadnoj Hrvatskoj. Prema staroj legendi, Ludbreg se smatra centrom svijeta. Iz Ludbrega u davna vremena bijahu opisane kružnice i na njima smještene europske metropole.

Na zemljopisnoj karti Hrvatske pronađi svoje mjesto te od njega na isti način napravi razne kružnice. Koji gradovi se nalaze na tim kružnicama?



Trg u Ludbregu

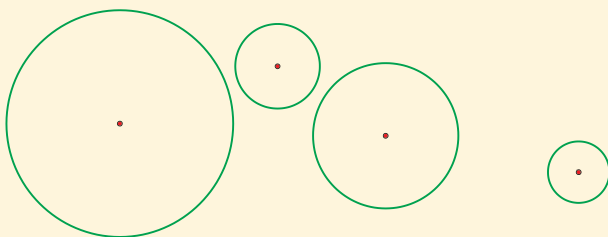
Dosad smo upoznali neke skupove točaka u ravnini. To su: dužina, polupravac i pravac. No spomenuli smo da skup točaka u ravnini ne mora biti samo dio "ravne crte", on može biti i "zakrivljen". Takav skup točaka u ravnini naziva se **krivulja**.

krivulja

Primjer 1. Osnovno o kružnici

Pogledaj sliku i odgovori na pitanja:

a) Kako se zovu ove krivulje?



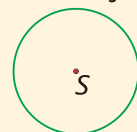
b) Precrtaj ih tako da u bilježnici dobiješ potpuno iste kružnice. Kako ćeš nacrtati kružnicu?

c) U čemu se razlikuju ove četiri kružnice?

Rješenje:

a) Nacrtani skupovi točaka su krivulje koje se zovu **kružnice**.

b) Kružnica se crta **šestarom**. Svaka kružnica ima svoje **središte**:



S - središte kružnice

kružnica
središte kružnice
šestar

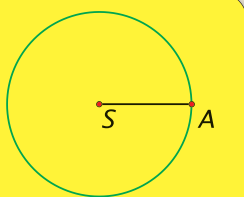


U udžbeniku šestarom odredimo razmak od središta do kružnice i nacrtamo takvu kružnicu u bilježnicu.

c) Pri crtanju ovih kružnica primijetit ćemo da je razmak između krakova šestara različit kod svake od ovih kružnica. Kažemo da ove kružnice imaju različite **polumjere**.

Dužina koja spaja središte i neku točku na kružnici naziva se **polumjer ili radijus kružnice**.

polumjer
ili radijus
kružnice



$\overline{SA}$ – polumjer ili
radijus kružnice

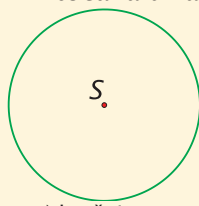
Duljinu te dužine također nazivamo polumjerom ili radijusom i označavamo slovom r .

$$|SA| = r$$

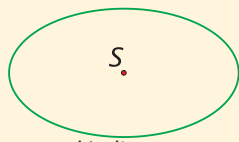
Polumjer se označava slovom r jer je to prvo slovo riječi "radijus".

Primjer 2. Što je kružnica?

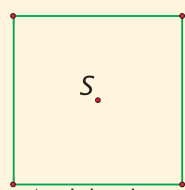
Nacrtao je središte S i oko njega neki skupovi točaka u ravni:



a) kružnica



b) elipsa



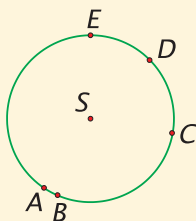
c) rub kvadrata

Odaberi 5 točaka na kružnici, zatim odaberi 5 točaka na elipsi te 5 točaka na rubu kvadrata. Izmjeri udaljenost od središta do svake izabrane točke.

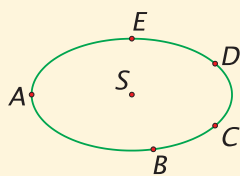
Rješenje:

Odaberimo bilo kojih 5 točaka na slikama a), b) i c).

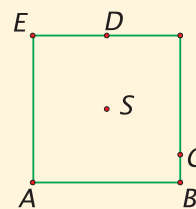
a)



b)



c)



Mjerimo li udaljenosti od izabranih točaka do središta S na slikama b) i c), primijetit ćemo da

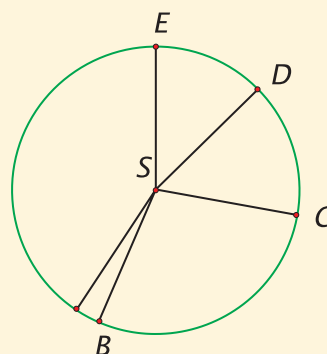
su udaljenosti različite. Primjerice, na slici b) udaljenost $|SD|$ nije ista kao $|SE|$.

Zaključujemo da točke elipse nisu jednako udaljene od njenog središta. Isto zaključujemo i kod kvadrata. Međutim, gledajući sliku a) dolazimo do vrlo važnog zaključka:

Svaka točka kružnice jednako je udaljena od središta kružnice.

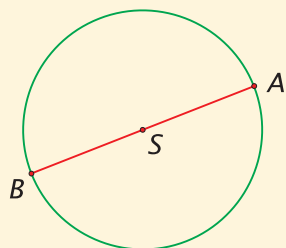
Na kružnici smo odabrali nekih 5 točaka. Udaljenost svake od njih do središta je jednaka. Kada bismo izabrali neke druge točke kružnice, opet bi njihova udaljenost od središta bila jednaka. Tu udaljenost zovemo polumjer kružnice i označavamo s r . Dakle, svaku kružnicu možemo opisati ovako:

Kružnica sa središtem S je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od točke S .



kružnica

Uz polumjer većemo još jedan geometrijski pojam. Produljimo li ravnalom pravac na kojem leži polumjer preko središta S do kružnice, dobivamo **promjer**. Pogledajmo sliku:



Matematička oznaka za kružnicu:

$k(S, 2 \text{ cm})$ čitaj: "kružnica oko središta S polumjera 2 cm"

$k(T, 1 \text{ cm})$ čitaj: "kružnica oko središta T polumjera 1 cm"

Pročitaj i nacrtaj:

$k(S, 2 \text{ cm})$

$k(S, 4 \text{ cm})$

$k(T, 11 \text{ mm})$

$k(A, 27 \text{ mm})$

Dužina koja spaja dvije točke na kružnici i prolazi središtem kružnice naziva se **promjer ili dijametar kružnice**.

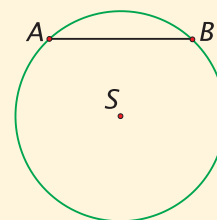
$\overline{AB}$ – promjer ili dijametar kružnice

Duljinu te dužine također nazivamo promjerom ili dijametrom i označavamo slovom d .

$$|AB| = d$$

Promjer se označava slovom d jer je to prvo slovo riječi "dijametar".

Nacrtajmo dvije točke na kružnici. Spojimo li ih u dužinu, dobit ćemo **tetivu**.

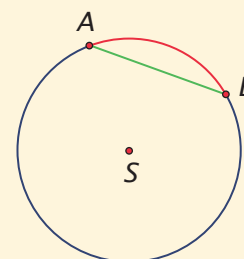


Tetiva je dužina koja spaja bilo koje dvije točke na kružnici.

Najdulja tetiva u svakoj kružnici je promjer.

Uz tetivu većemo i kružni luk.

Kružni luk je dio kružnice omeđen s dvije točke na kružnici. Svaka tetiva ima svoja dva pripadna kružna luka.



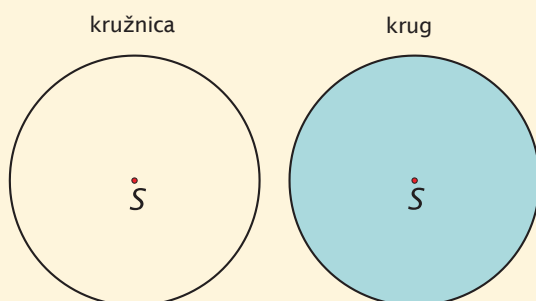
A, B - točke na kružnici

$\overline{AB}$ - tetiva

$\widehat{AB}$ - manji kružni luk
 $\overline{\widehat{AB}}$ - veći kružni luk

Primjer 3. Kružnica i krug

Pogledaj ove dvije slike.



Koja je razlika između kružnice i kruga?

Rješenje:

Rekli smo da je kružnica skup točaka koje su jednako udaljene od središta.

tetiva

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom.

To znači da krugu pripada kružnica, kao i sve one točke ravnine koje se nalaze "unutar" kružnice.

Primjer 4. Dijelovi kružnice i kruga

Uz kružnicu i krug povezani su još neki skupovi točaka u ravni. To su **polukrug**, **polukružnica**, **kružni luk**, **kružni isječak** i **kružni odsječak**. To su novi pojmovi, ali iz njihovih naziva možeš zaključiti kako izgledaju. Razmisli o kakvim se skupovima točaka radi i spoji sliku s odgovarajućim nazivom:

Naziv	Slika
1. krug	A 
2. kružnica	B 
3. polukrug	C 
4. polukružnica	D 
5. kružni luk	E 
6. kružni isječak	F 
7. kružni odsječak	G 

Rješenje:

Krug i kružnica su nam već poznati, a na isti način razlikujemo polukrug i polukružnicu. Zato spajamo: 1 – C, 2 – F, 3 – G, 4 – B.

Riječ luk poznata nam je iz svakodnevnog života (luk mosta, luk stupa itd.), pa zaključujemo da se kružni luk krije pod slovom D: 5-D.

Pitamo se koja je razlika između kružnog isječka i kružnog odsječka. Pokušajmo razliku shvatiti iz njihovih naziva. Isječak dolazi od riječi “iz+sjeći”, “sječenjem izvaditi iz unutrašnjosti”, što znači da isječku pripada i središte kruga. Odsječak zamišljamo kao dio kruga koji smo odsjekli (npr. nožem). Zato spajamo parove: 6-E i 7-A.

Izrežimo dijelove kruga!

Šestarom nacrtaj 4 kruga, svaki polumjera 5 cm. Svaki može biti na kolaž-papiru različitih boja. Izreži ih.

Posluži se škarama i zalijepi u bilježnicu:

- kružni isječak;
- kružni odsječak;
- polukrug;
- krug.



Zadaci:

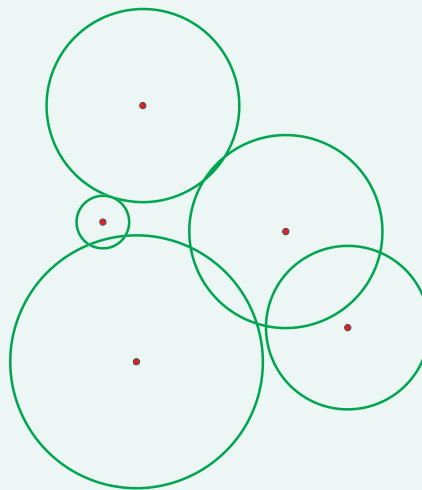
- Pogledaj ove slike.



Gdje još u svakodnevnom životu susrećemo:

- krug;
- kružnicu?

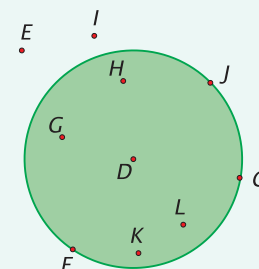
- Nacrtaj iste ovakve kružnice u bilježnicu:



3. Nacrtaj kružnicu sa središtem S polumjera:
 a) $r = 2$ cm; b) $r = 1$ cm; c) $r = 3$ cm; d) $r = 25$ mm;
 e) $r = 32$ mm; f) $r = 20$ mm; g) $r = 41$ mm.
 Koje od ovih kružnica imaju jednake polumjere?

4. Nacrtaj kružnicu:
 a) oko središta A , s polumjerom $r = 4$ cm;
 b) oko središta V , s polumjerom $r = 22$ mm;
 c) oko središta L , s polumjerom $r = 5$ mm;
 d) oko središta Y , s polumjerom $r = 31$ mm.
 Nacrtaj jedan polumjer i jedan promjer svake od ovih kružnica.

5. Koje od ovih točaka pripadaju:
 a) kružnici; b) krugu?

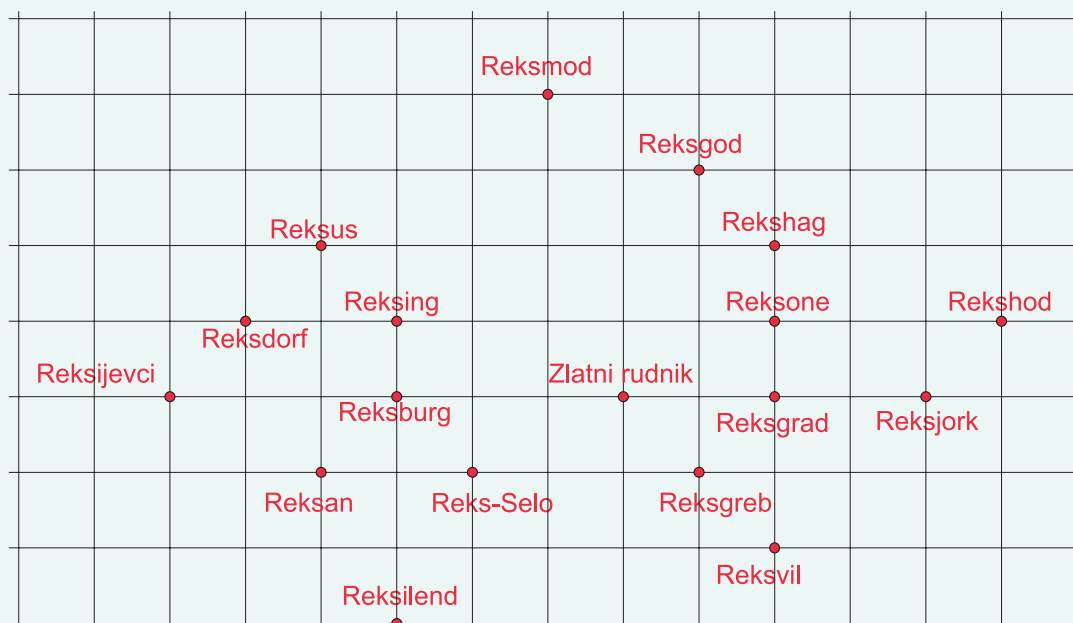


- c) Koja točka je središte kružnice i kruga?

6. Nacrtaj kružnicu k sa središtem S . Je li središte dio kružnice? Je li središte dio pripadajućeg kruga?

7. Imao kralj dva sina. Prije smrti dao im je kartu kraljevstva i rekao:

Tebi, stariji sine, ostavljam svu zemlju od Reksburga u polumjeru 3 km. A tebi, mlađi sine, ostavljam svu zemlju od Reksgrada u polumjeru 2 km (1 km = 1 cm na papiru).

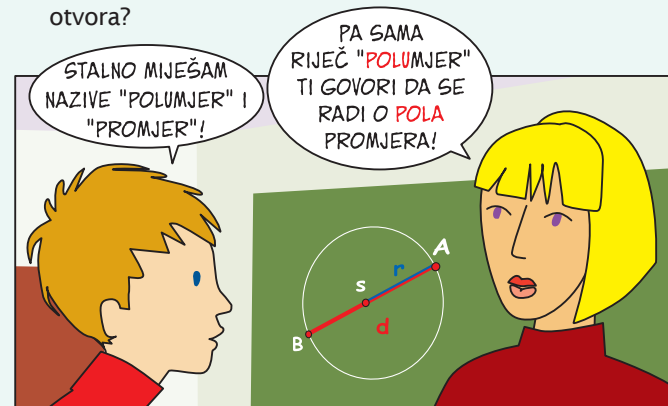


- a) Na karti nacrtaj koji dio kraljevstva će pripasti starijem, a koji mlađem sinu;
 b) Koji sin je dobio više zemlje?
 c) Koja naselja pripadaju starijem, a koja mlađem sinu?
 d) Hoće li se sinovi svađati oko nekog područja?

8. Nacrtaj kružnicu promjera:
 a) 2 cm; b) 4 cm; c) 22 mm; d) 5 cm; e) 46 mm.
 9. Koliki je promjer kružnice, ako je njen polumjer:
 a) 23 cm; b) 13 cm; c) 42 dm; d) 56 m; e) 26 km?
 10. Koliki je polumjer kružnice, ako je njen promjer:
 a) 28 cm; b) 132 cm; c) 42 dm; d) 56 m; e) 26 km;
 f) 21 m?
 11. a) Nacrtaj krug i u njemu oboji jedan kružni isječak.
 b) Nacrtaj krug i u njemu oboji jedan polukrug;
 c) Nacrtaj krug i u njemu oboji jedan kružni odsječak;
 d) Nacrtaj kružnicu i bojom označi jedan kružni luk;

- e) Nacrtaj kružnicu i bojom označi polukružnicu;
 f) Nacrtaj kružnicu i prikaži jednu njenu tetivu.

12. Cijev vanjskog promjera 8 dm ima stijenku debelu 1 dm. Koliki su polumjer i promjer unutarnjeg otvora?





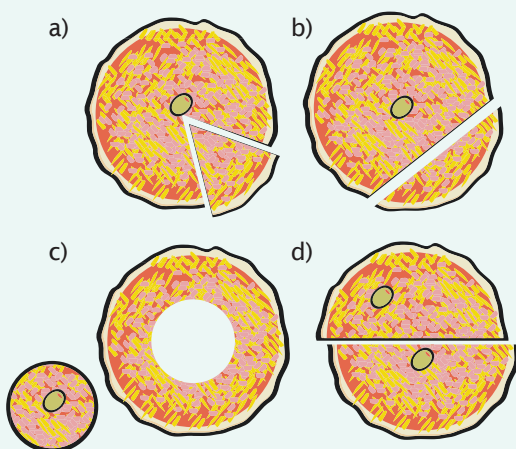
13. Nacrtaj 3 kružnice koje imaju isto središte, a različite polumjere. Oboji dio ravnine između tih kružnica.

Kružnice sa središtem u istoj točki, a s različitim polumjerima nazivaju se **koncentrične kružnice**. Dio ravnine koji omeđuju dvije koncentrične kružnice naziva se **kružni vijenac**.

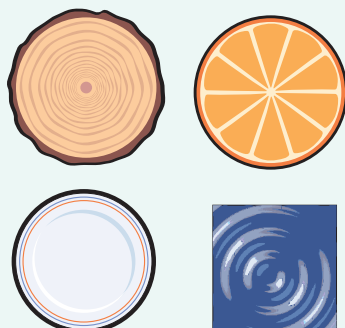
Nacrtaj koncentrične kruž-

nice i od kolaž-papira izreži kružni vijenac. Zalijepi ga u bilježnicu!

14. Koje dijelove kruga prepoznaješ na donjim slikama?



15. Gdje u prirodi nailazimo na koncentrične kružnice i kružni vijenac? Pogledaj ove slike i pokušaj se prisjetiti još nekih primjera:

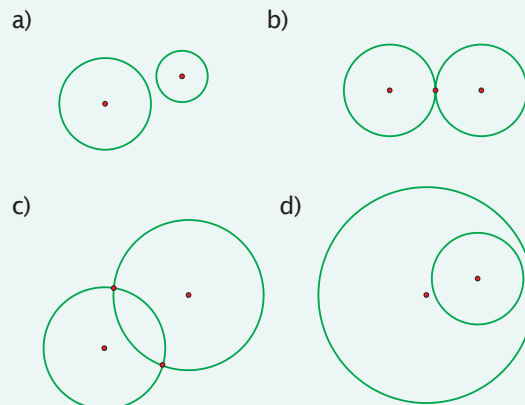


16. Nacrtaj koncentrične kružnice s polumjerima 1 cm, 20 mm i 27 mm.

17. Nacrtaj dvije kružnice koje:

- imaju isto središte, a različite polumjere;
- imaju jednake polumjere, a različita središta.

18. Pogledaj ove slike:



Gdje se sijeku ove kružnice? Označi sjecišta. Koliko zajedničkih točaka mogu imati dvije kružnice?

19. Nacrtaj pravac i kružnicu. Koliko zajedničkih točaka mogu imati pravac i kružnica? Nacrtaj sve mogućnosti.

20. Nacrtaj kružnicu i točku A na kružnici. Zatim nacrtaj pravac koji siječe tu kružnicu i prolazi točkom A . Koliko tih pravaca ima? Nacrtaj sliku.

21. Matematički diktat:

- Nacrtaj kružnicu sa središtem S i jednu točku A na kružnici.
 - Povuci pravac p koji prolazi točkama S i A .
 - Povuci okomicu iz točke A na pravac p .
 - Okomicu označi sa t .
- Pravac t dodiruje kružnicu u točki A .

22. Matematički diktat:

- Nacrtaj kružnicu sa središtem S i jednu točku A na kružnici.
- Nacrtaj pravac p koji prolazi točkama S i A .
- Povuci okomicu iz središta S na p .

23. Na slici skiciraj kružnicu koja siječe oba pravca:

a)

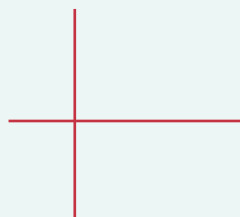


Zadaci

b)



c)

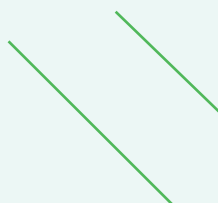


24. Na slici skiciraj kružnicu koja dodiruje oba pravca:

a)



b)



c)



25. Nacrtaj kružni isječak kruga polumjera 25 mm.

26. Nacrtaj kružni odsječak kruga polumjera 3 cm.

27. Nacrtaj kružni vijenac omeđen kružnicama čiji su polumjeri 21 mm i 29 mm.

28. Nacrtaj kružni isječak kruga promjera 44 mm.

29. Nacrtaj kružni odsječak kruga promjera 5 cm.

30. Nacrtaj kružni vijenac omeđen kružnicama čiji su polumjeri 24 mm i 50 mm.

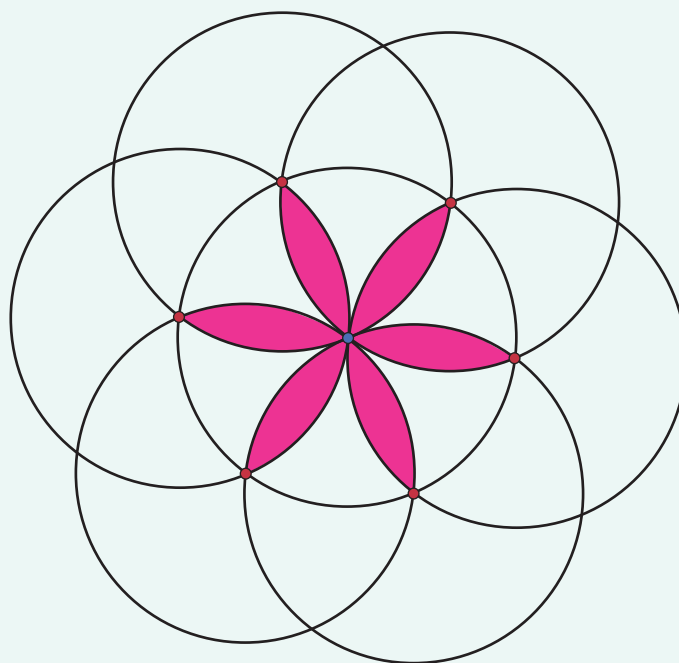
31. Nacrtaj polukrug polumjera 32 mm.

32. Nacrtaj polukrug promjera 32 mm.

33. Skiciraj nekoliko prometnih znakova koji imaju oblik kruga.

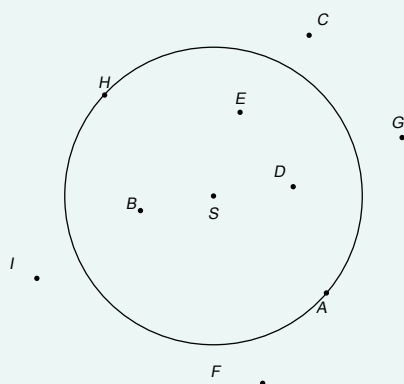
34. Nacrtaj kružnicu sa središtem S i polumjerom 25 mm. Nacrtaj njena dva okomita promjera. Točke u kojima ti promjeri sijeku kružnicu označi redom A, B, C i D i spoji ih redom dužinama. Kakav je četverokut ABCD?

35. Koristeći samo šestar konstruiraj ovu sliku.



Vježbalica

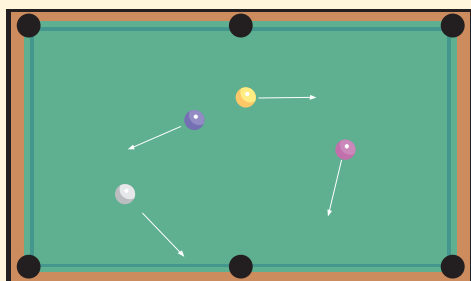
1. Nacrtaj kružnicu sa središtem S polumjera:
 - a) $r = 3$ cm; b) $r = 23$ mm; c) $r = 36$ mm.
2. Nacrtaj kružnicu:
 - a) oko središta A, $r = 5$ cm;
 - b) oko središta V, $r = 34$ mm;
 - c) oko središta L, $r = 18$ mm;
 - d) oko središta Y, $r = 48$ mm.
3. Koje od ovih točaka pripadaju:
 - a) kružnici; b) krugu?



4. Nacrtaj kružnicu promjera:
 - a) 6 cm; b) 7 cm; c) 56 mm; d) 8 cm; e) 68 mm.
5. Koliki je promjer kružnice ako je njen polumjer:
 - a) 11 cm; b) 2 cm; c) 26 dm?
6. Koliki je polumjer kružnice ako je njen promjer:
 - a) 18 cm; b) 50 cm; c) 43 dm; d) 57 m; e) 27 km; f) 21 m?
7. Nacrtaj krug i u njemu pobočaj jedan kružni isječak.
8. Nacrtaj krug i u njemu pobočaj jedan polukrug.
9. Nacrtaj krug i u njemu pobočaj jedan kružni odsječak.
10. Nacrtaj kružnicu i u bojom označi jedan kružni luk.
11. Nacrtaj kružnicu i u bojom označi polukružnicu.
12. Nacrtaj kružnicu oko točke S polumjera 3 cm i nacrtaj jednu njenu tetivu duljine 4 cm.
13. Nacrtaj kružnicu oko točke S polumjera 4 cm i nacrtaj jednu njenu tetivu duljine 5 cm.
14. Nacrtaj kružnicu oko točke S polumjera 45 mm i nacrtaj jednu njenu tetivu duljine 9 cm.

15. Nacrtaj dva pravca koji se sijeku u točki A. Zatim nacrtaj kružnicu sa središtem A polumjera $r = 46$ mm.
16. Nacrtaj dva okomita pravca koji se sijeku u točki S. Zatim nacrtaj kružnicu sa središtem S promjera $d = 42$ mm.
17. Nacrtaj 3 kružnice koje imaju isto središte, a različite polumjere. Oboji dio ravnine između te dvije kružnice.
18. Nacrtaj koncentrične kružnice s polumjerima 2 cm, 28 mm i 35 mm.
19. Nacrtaj dvije kružnice koje:
 - a) imaju isto središte, a različite polumjere;
 - b) imaju jednake polumjere, a različita središta
20. Nacrtaj dvije kružnice s polumjerima 25 mm i 2 cm koje se:
 - a) sijeku u 2 točke;
 - b) uopće ne sijeku;
 - c) sijeku u 1 točki.
21. Nacrtaj pravac i kružnicu promjera 64 mm. Koliko zajedničkih točaka mogu imati pravac i kružnica? Nacrtaj sve mogućnosti.
22. Nacrtaj kružnicu promjera 6 cm i točku A na kružnici. Zatim nacrtaj pravac koji siječe tu kružnicu i prolazi točkom A. Koliko tih pravaca ima?
23. Nacrtaj kružnicu polumjera 23 mm i točku A na kružnici. Zatim nacrtaj pravac koji dodiruje tu kružnicu u točki A. Koliko tih pravaca ima?
24. Nacrtaj dva usporedna pravca. Zatim nacrtaj kružnicu koja:
 - a) siječe oba pravca;
 - b) nema zajedničkih točaka s ovim pravcima.
25. Nacrtaj dva usporedna pravca. Zatim nacrtaj kružnicu koja dodiruje oba pravca.
26. Nacrtaj kružnicu promjera 7 cm. Zatim nacrtaj dva usporedna pravca koji dodiruju ovu kružnicu. Koja je međusobna udaljenost ovih pravaca?
27. Nacrtaj dva usporedna pravca. Zatim nacrtaj kružnicu koja:
 - a) siječe oba pravca;
 - b) nema zajedničkih točaka s ovim pravcima.

3.5. Kut i vrste kutova

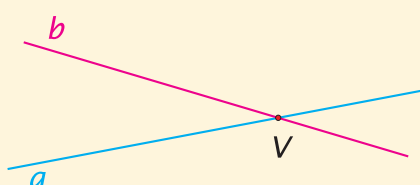


Kuda ide koja lopta

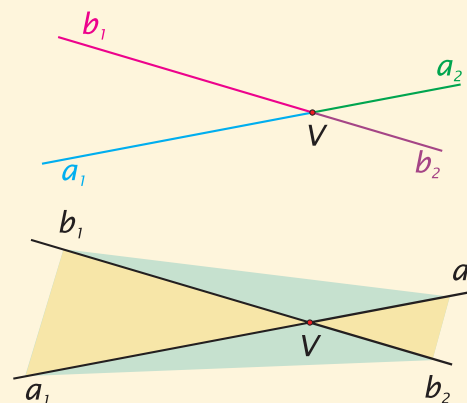
Koja lopta će pasti u rupu?

Nacrtaj putanju bijele i žute lopte.

Ako u ravni nacrtamo dva pravca koji se sijeku u točki V , dobit ćemo četiri polupravca s početnom točkom V .



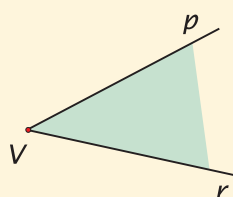
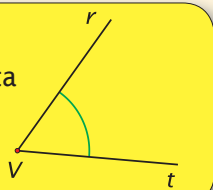
Polupravci a_1 , b_1 , a_2 i b_2 dijele ravnu na četiri dijela. Svaki od ta četiri dijela ravne nazivamo **kutom**.



kut

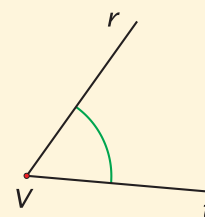
Kut je dio ravne omeđen s dva polupravca koji imaju zajedničku početnu točku.

kut
 t , r – kraci kuta
 V – vrh kuta

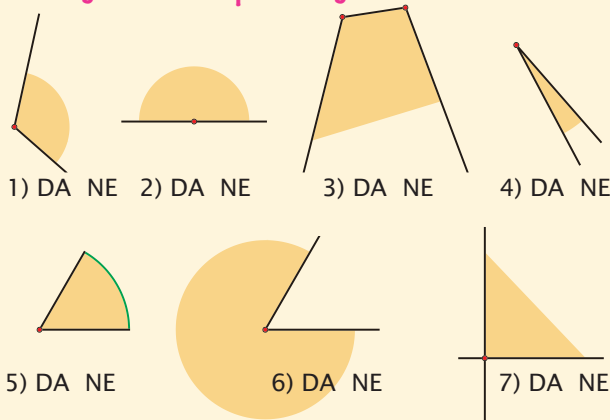


Polupravci koji omeđuju kut nazivaju se **kracima kuta**, a njihova zajednička početna točka **vrhom kuta**.

Kut sa vrhom V i kracima p i r označava se s $\sphericalangle pVr$.
Da ne bojimo cijeli taj dio ravne, kut obično označavamo dvama polupravcima i kružnim lukom kao na slici:



Primjer 1. Prepoznamo kut



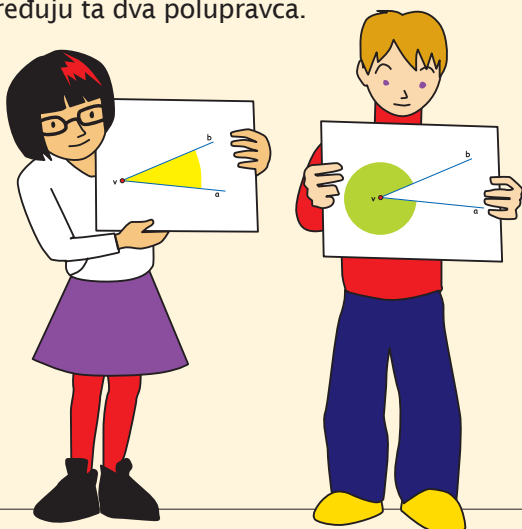
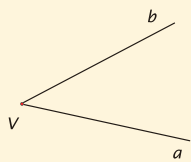
Pogledaj svaku sliku. Je li na njoj nacrtan kut?
Ako jest, zaokruži DA, a ako nije zaokruži NE.

Rješenje:

Naučili smo da je kut dio ravne omeđen s dva polupravca koji imaju zajedničku početnu točku. Stoga se kutovi nalaze (DA) na slikama br. 1, 2, 4, 6 i 7. Na slici br. 3 označeni dio ravne omeđen je s dva polupravca i dužinom, pa nije kut (NE). Na slici br. 5 je kružni isječak koji je omeđen s dvije dužine i kružnim lukom (NE).

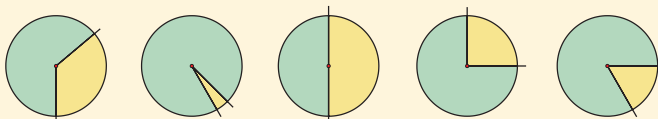
Primjer 2.

Zadani su polupravci a i b sa zajedničkom početnom točkom V . Oboji kut koji određuju ta dva polupravca.

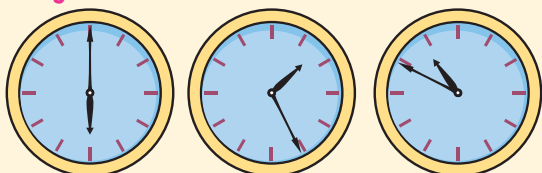


Rješenje:

Maja je obojila žutom bojom dio ravnine između polupravaca a i b koji imaju zajedničku početnu točku V . Dakle, Maja je točno riješila zadatak. No pogledamo li bolje Lukinu sliku, primijetit ćemo da je Luka također obojio (zelenom bojom) dio ravnine koji omeđuju polupravci a i b s početnom točkom V . Dakle, i Luka je u pravu. Zaključujemo da dva polupravca koji imaju zajedničku početnu točku uvijek određuju dva kuta. Na primjer:



Primjer 3. Vrste kutova



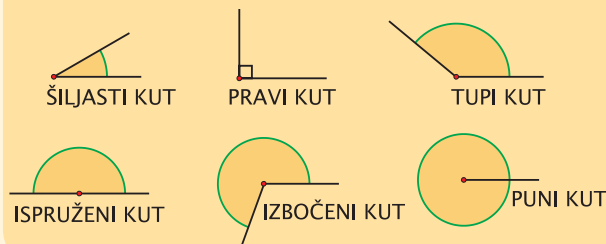
Pogledaj ove satove na slici. Velika i mala kazaljka zatvaraju dva kuta.

Možeš li pogoditi kojoj vrsti pripada svaki od kutova?

Rješenje:

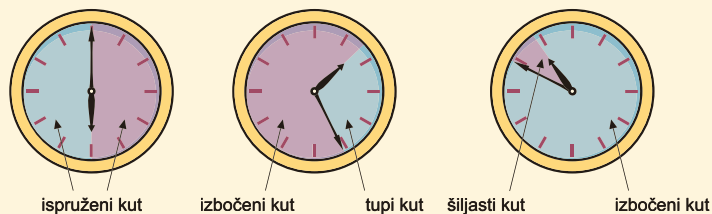
Razlikujemo nekoliko vrsta kutova, ovisno o međusobnom položaju njegovih krakova. Šiljasti, pravi i tupi kut poznajemo otprije. Primijetimo da su kraci pravog kuta okomiti. Zato ga označavamo oznakom $\perp$.

Vrste kutova:



Kraci ispruženog kuta čine pravac, a kraci punog kuta leže jedan na drugome.

Odgovorimo sada na pitanje iz zadatka:



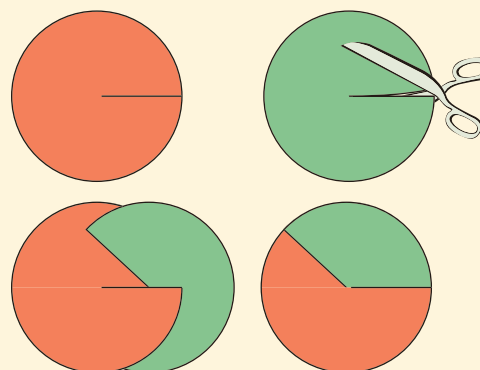
Primjer 4. Model kuta u krugu

Od tvrdog papira izreži dva kruga jednakog polumjera. Neka krugovi budu različitih boja. Razreži svaki krug po jednom polumjeru, a zatim ih umetni jedan u drugi kao na slici.

Pomoću ovog modela prikaži zelenim dijelom:

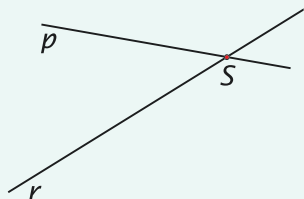
- tupi kut;
- šiljasti kut;
- ispruženi kut;
- pravi kut.

Kakvi su kutovi koje istovremeno dobivaš u drugom dijelu kruga?



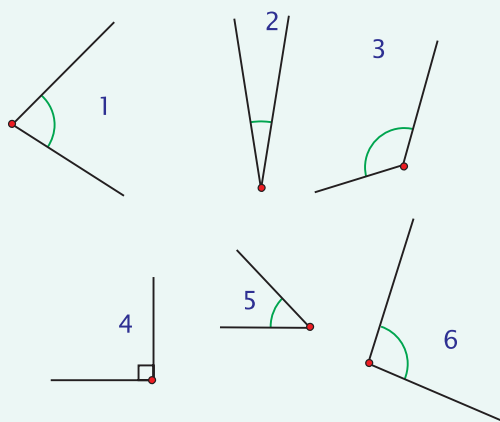
Zadaci

1. Bojom prikaži neke kutove na donjoj slici:

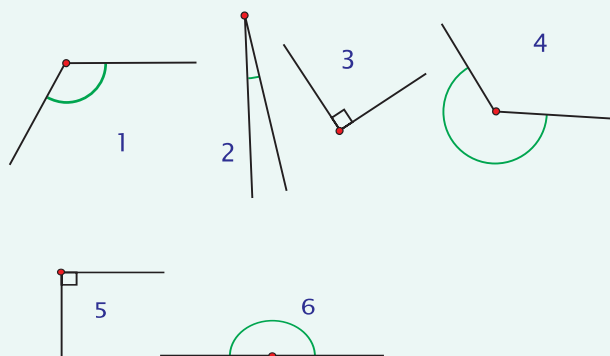


2. Nacrtaj dva pravca koji se sijeku i bojicama prikaži neke kutove koje pritom dobiješ. Ne zaboravi označiti pravce i njihovo sjecište!

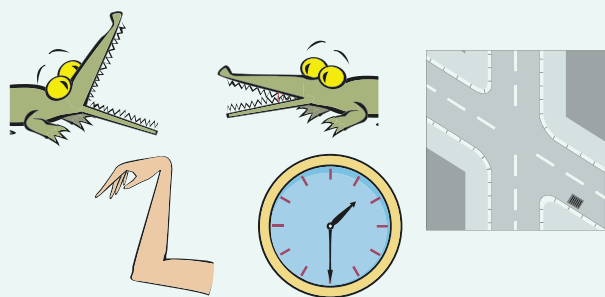
3. Koja je vrsta kuta prikazana na slici?



4. Koja je vrsta kuta prikazana na slici?



5. Kakve kutove vidiš na slici?



Gdje još u svakodnevnom životu susrećeš kutove?

6. Spoji parove:

tupi kut	
šiljasti kut	
izbočeni kut	
pravi kut	
ispruženi kut	
puni kut	

7. Nacrtaj:

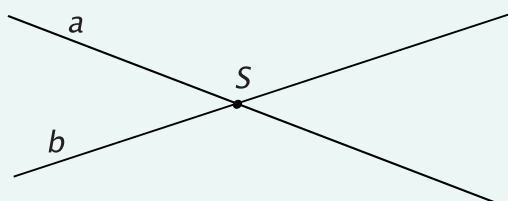
- pravi kut;
- izbočeni kut;
- ispruženi kut;
- šiljasti kut;
- puni kut;
- tupi kut.

8. Načini sat s kazaljka od tvrdog papira (ako ga imaš sačuvanog iz nižih razreda, možeš iskoristiti i taj). Na satu položajem kazaljki prikaži:

- tupi kut;
- ispruženi kut;
- pravi kut;
- šiljasti kut;
- izbočeni kut.

Vježbalica

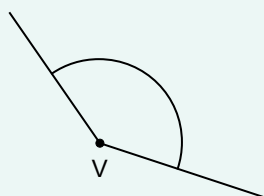
1. Bojom prikaži kutove na slici:



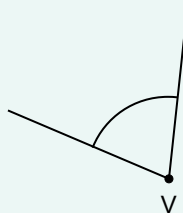
2. Nacrtaj dva pravca koji se sijeku i bojicama prikaži kutove koje pritom dobiješ. Ne zaboravi označiti pravce i njihovo sjecište!

3. Koja je vrsta kuta prikazana na slici:

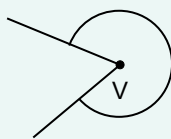
a)



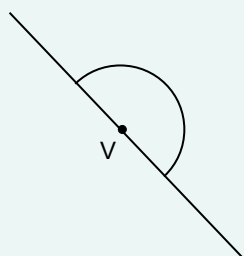
b)



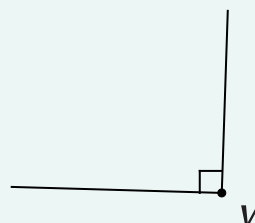
c)



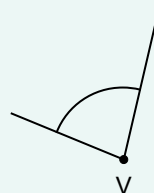
d)



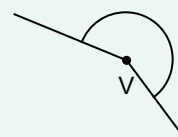
e)



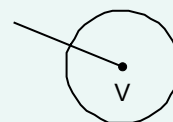
f)



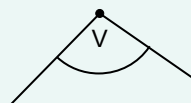
g)



h)



i)



4. Nacrtaj: a) pravi kut; b) izbočeni kut; c) ispruženi kut; d) šiljasti kut; e) puni kut; f) tupi kut.

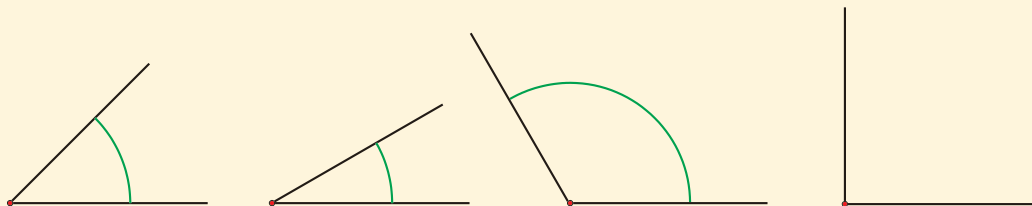
5. Nacrtaj:

a) pravi kut $\sphericalangle A$; b) ispruženi kut $\sphericalangle B$; c) tupi kut $\sphericalangle C$; d) šiljasti kut $\sphericalangle D$; e) izbočeni kut $\sphericalangle E$.

3.6. Mjerenje kutova

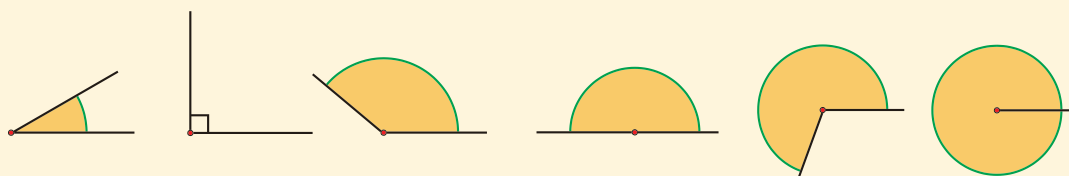
Poredaj po veličini

Koje vrste kutova prepoznaješ na slici? U čemu se oni razlikuju?



Poredaj kutove po veličini od najmanjeg prema najvećem.

Znamo da kutovi mogu biti raznih veličina. Tako su po veličini šiljasti kutovi manji od pravog kuta, pravi kut je manji od tupih kutova, tupi kutovi su manji od ispruženog, ispruženi kut je manji od izbočenih, a izbočeni su manjih veličina od punog kuta.

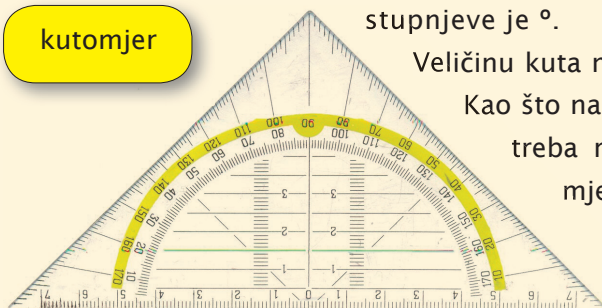


veličina kuta
ili mjera kuta

Zaključujemo da veličine kutova možemo uspoređivati. I ne samo uspoređivati već i **mjeriti**.

Kao što duljinu dužine mjerimo u metrima, centimetrima itd, tako veličinu kuta mjerimo u **kutnim stupnjevima**. Oznaka za stupnjeve je $^{\circ}$.

kutomjer



Veličinu kuta mjerimo **kutomjerom**.

Kao što nam za mjerenje duljine treba ravnalo, tako nam za mjerenje veličine kuta treba kutomjer.

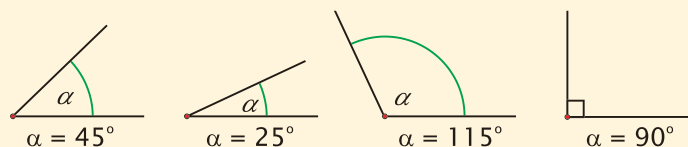


Veličinu kuta mjerimo u kutnim stupnjevima ($^{\circ}$).

Pomagalo za mjerenje i crtanje kutova zove se kutomjer.



Evo točnih veličina kutova iz uvodnog zadatka:

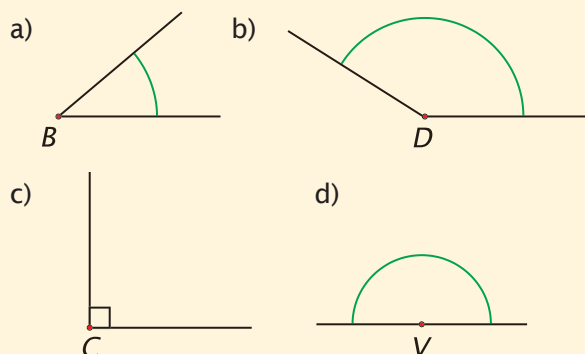


Preporučujemo kutomjer koji ima dvorednu skalu: od 0° do 180° i od 180° do 0° . S takvim kutomjerom je najlakše raditi.



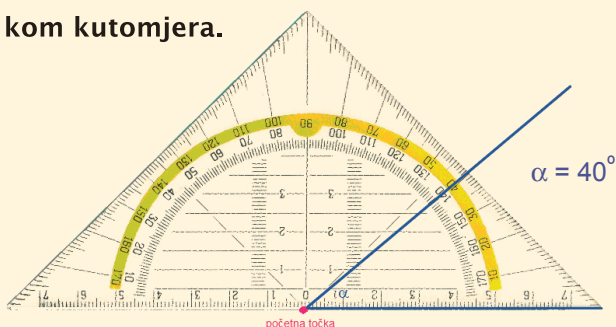
Primjer 1. Mjerenje kutova do 180°

Izmjeri veličine ovih kutova:



Rješenje:

a) Primijetimo na sredini kutomjera jednu crticu (na nekim kutomjerima je to križić, a na drugima točka). Nazovimo je **početnom točkom** kutomjera.



Tu točku položimo točno na vrh kuta. Zatim kutomjer postavimo tako da 0° sa skale leži na jednom kraku kuta. Ako je potrebno, produljimo krakove kutomjera kako bismo lakše mjerili.

Pogledajmo što se događa na drugom kraku kuta. Očitamo sa skale kutomjera koja veličina se poklapa s drugim krakom kuta. Ako smo dobro radili, očitat ćemo da je veličina kuta 40° .

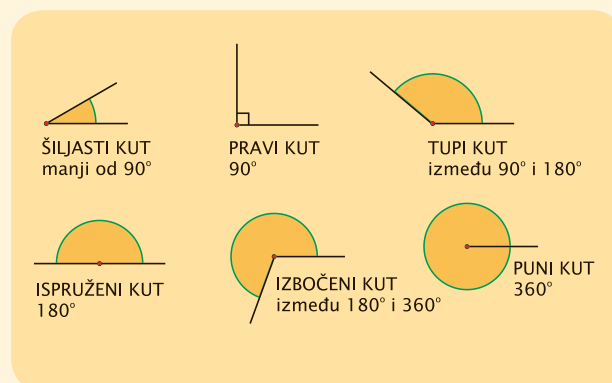
b) Na isti način nađemo da kut iznosi 150° .

c) Na slici prepoznamo pravi kut. Kutomjerom nađemo njegovu veličinu na opisani način i zaključujemo: svaki pravi kut ima 90° . Kako su šiljasti kutovi veličinom manji od pravog, zaključujemo da šiljasti kutovi imaju manje od 90° , a tupi više od 90° .

d) Ispruženi kut ima 180° . Kako je izbočeni kut veći od ispruženog, zaključujemo da izbočeni kut ima više od 180° . Puni kut se sastoji od dva ispružena kuta, pa zaključujemo da puni kut ima 360° .

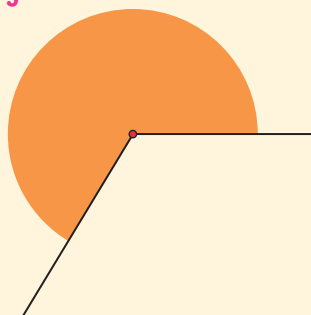
pravi kut ima 90°

Pogledajmo vrste kutova i njihove veličine:



Primjer 2. Mjerenje izbočenih kutova

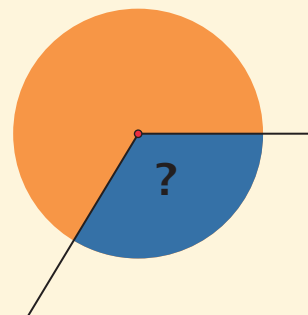
Kojoj vrsti pripada kut sa slike? Izmjeri veličinu ovog kuta.



Rješenje:

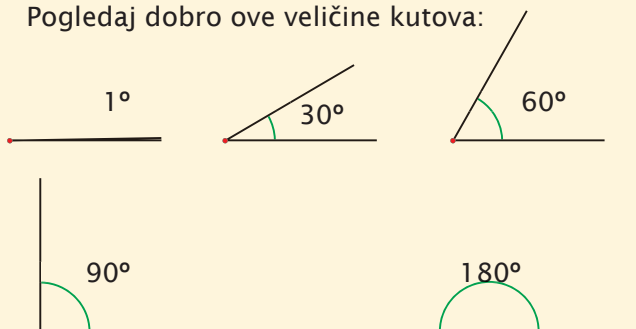
Pogledamo li naše kutomjere, većina ih ima skalu od 0° do 180° . Izbočeni kut sa slike ima više od 180° . Zato uočite na slici kut (plavo) koji ga dopunjava do punog kuta. Taj kut je manji od 180° .

Izmjerimo taj kut kutomjerom pa ćemo izračunati veličinu izbočenog kuta. Mjerenjem dobivamo da je veličina nepoznatog kuta 121° . Tu veličini oduzmemo od veličine punog kuta, tj. 360° i dobit ćemo veličinu traženog izbočenog kuta. $360^\circ - 121^\circ = 239^\circ$. Zadani izbočeni kut ima 239° .

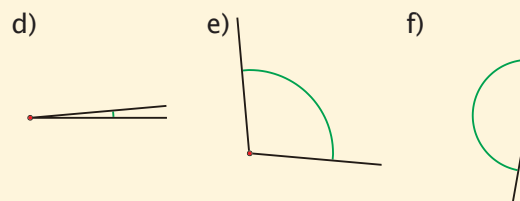
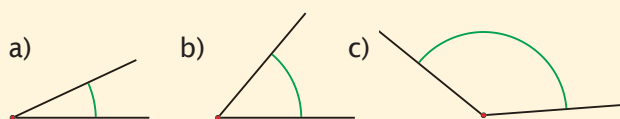


Primjer 3. Procjena veličine kuta

Pogledaj dobro ove veličine kutova:



Sada bez korištenja kutomjera pokušaj odrediti veličine ovih kutova:



Svoje rezultate provjeri mjerenjem kutomjerom.

Rješenje:

Kod procjene možeš zaokruživati stupnjeve na desetice. Pri procjenjivanju će nam pomoći i vrste kutova. Tako su kutovi na slikama a), b) i d) šiljasti, pa znamo da imaju manje od 90° . Ostala tri kuta su tupa, pa znamo da imaju između 90° i 180° . Točne vrijednosti su:

a) 25° , b) 50° , c) 136° , d) 5° , e) 100° , f) 173° .

Zadaci

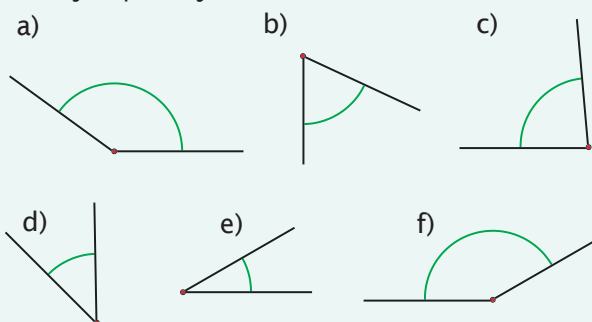
- Kojoj vrsti pripada kut od:
a) 145° ; b) 2° ; c) 300° ; d) 92° ; e) 23° ; f) 180° ;
g) 359° ; h) 360° ; i) 56° ; j) 90° ; k) 187° ?

- Spoji parove!

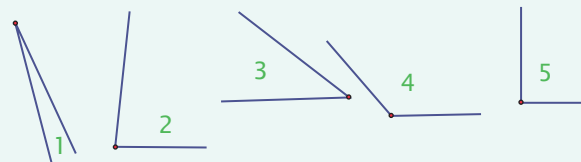
Veličina kuta	Slika kuta
manji od 90°	
90°	
između 90° i 180°	
180°	
između 180° i 360°	
360°	

- Nacrtaj po tri šiljasta, izbočena i tupa kuta i izmjeri im veličine.

- Procijeni pa izmjeri veličine ovih kutova:



- Procijeni koji kut je najmanji, a koji najveći. Zatim ih poredaj po veličini počevši od najmanjeg:



- a) Pomoću papirnatog modela kuta otprilike prikaži kutove veličine: 39° , 191° , 19° , 1° , 59° , 15° , 30° , 60° , 270° , 97° , 180° , 182° , 255° , 300° . Kojim vrstama pripadaju ti kutovi?
b) Izmjeri kutove koje si dobio. Imaš li dobru procjenu?
- Od papirnatog modela složi zadane kutove. Nakon toga ih izmjerite kutomjerom:
a) 30° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 100° ;
e) 120° ; f) 150° ; g) 180° .
- a) Odaberi tri šiljasta, tri tupa i tri izbočena kuta.
b) Prikaži ih otprilike pomoću papirnatog modela.
c) Izmjeri kutove koje si dobio. Imaš li dobru procjenu?

Naučili smo da veličinu kutova mjerimo u kutnim stupnjevima. No, postoje i manje mjerne jedinice od stupnjeva. To su **kutne minute** (oznaka: $'$). Jedan stupanj sadrži 60 kutnih minuta ($1^\circ = 60'$).



Pogledajmo na slici kut od 1° i zamislimo da je podijeljen na 60 dijelova, na 60 kutnih minuta. Ako jedan stupanj sadrži $60'$, onda pola stupnja sadrži $30'$. Kutne minute se dijele na još manje jedinice, na kutne sekunde (oznaka: $''$). Jedna kutna minuta sadrži 60 kutnih sekundi ($1' = 60''$).

3.7. Crtanje kutova

Skiciraj

Na temelju znanja iz mjerenja kutova, neće ti biti teško skicirati i crtati kutove. Skiciraj kut od 30° , 120° , 175° i 300° .

Crtanje kutova izvodit ćemo kutomjerom. Kutove crtamo sličnim postupkom kao kod mjerenja kutova.

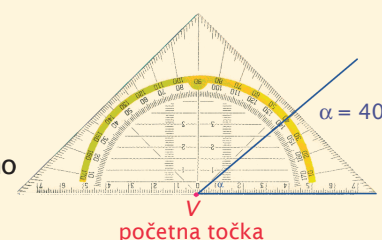
Nacrtajmo, primjerice, kut od 40° .

Koraci:

1. Nacrtajmo polupravac s početnom točkom V. To će biti jedan krak kuta.
2. Početnu točku kutomjera položimo točno na vrh kuta V. Zatim kutomjer postavimo tako da 0° sa skale leži na jednom kraku kuta.
3. Očitamo sa skale kutomjera 40° i uz to mjesto na papiru označimo točku A.
4. Iz vrha V povučemo polupravac koji prolazi točkom A. Taj polupravac je drugi krak kuta veličine 40° .

Primijetimo da je točka A samo pomoćna točka u crtanju kuta, pa je ubuduće ne moramo posebno označavati slovom.

Kutomjerom izmjerimo veličinu nacrtanog kuta kako bismo provjerili točnost svog crteža.



Primjer 1. Crtanje kutova do 180°

Zadane su veličine kutova u stupnjevima. Za svaku otprilike skiciraj kut, a zatim i nacrtaj:

a) 7° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 134° ; e) 180° .

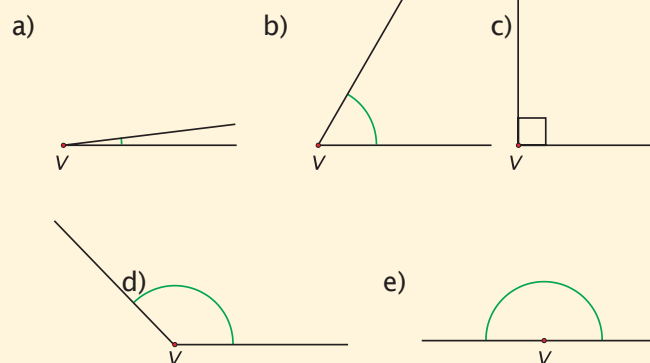
Rješenje:

Na temelju znanja iz mjerenja kutova, nije teško otprilike skicirati kutove za-

SADA ZNAM NA JOŠ JEDAN NAČIN NACRTATI OKOMITE PRAVCE: POMOĆU 90° NA KUTOMJERU!



danih veličina. Gore objašnjenim postupkom doći ćemo i do crteža zadanih kutova.

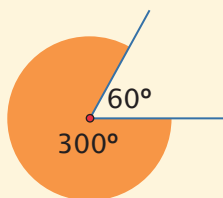


Primjer 2. Crtanje izbočenog kuta

Nacrtaj kut od 300° .

Rješenje:

Kut od 300° je izbočeni kut pa ćemo umjesto tog kuta nacrtati njegovu dopunu do punog kuta.



Znamo da puni kut ima 360° , a zadani kut ima 300° . $360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$. Dakle, nacrtamo li kut od 60° njegova dopuna do punog kuta bit će traženi kut od 300° .

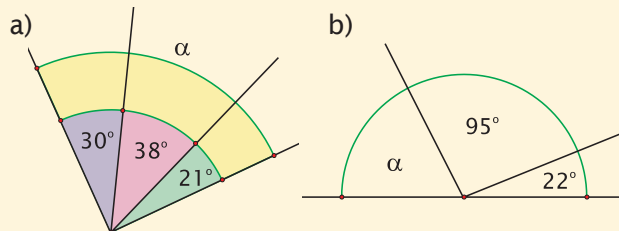
Kut i veličinu kuta često označavamo malim slovima grčkog alfabeta:

α (alfa), β (beta), γ (gamma) i δ (delta).

Primjer 3.

Računanje s veličinama kutova

Na svakoj slici pronađi veličinu kuta α :



Rješenje:

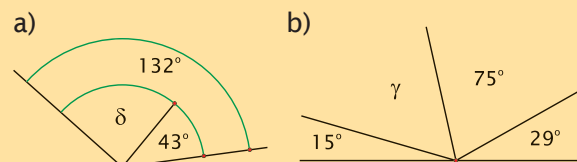
a) Veličina kuta α dobije se kao zbroj triju poznatih veličina kutova: $\alpha = 30^\circ + 38^\circ + 21^\circ$. Stoga je $\alpha = 89^\circ$.

b) Primijetimo da sva tri kuta zajedno čine ispruženi kut, koji ima 180° . Poznati kutovi zajedno imaju $95^\circ + 22^\circ = 117^\circ$. Pribrojimo li toj veličini nepoznati kut α , dobivamo 180° . Rješenje dobivamo oduzimanjem

$$\alpha = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

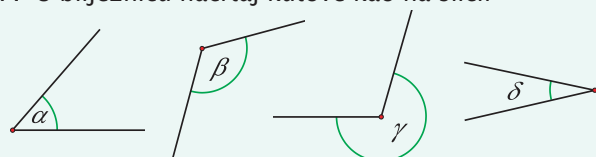
Veličina kuta $\alpha = 63^\circ$.

Pronađi kutove koji nedostaju:

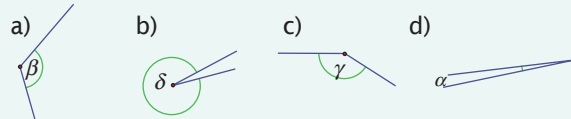


Zadaci

- Nacrtaj kutove od: a) 45° ; b) 179° ; c) 89° ; d) 91° ; e) 111° ; f) 10° .
- Nacrtaj ispruženi, pravi i puni kut.
- Nacrtaj izbočene kutove: a) 190° ; b) 200° ; c) 310° ; d) 270° ; e) 350° ; f) 305° .
- Nacrtaj kutove i ispod svakog zapiši kojoj vrsti pripadaju:
a) $\alpha = 122^\circ$; b) $\beta = 16^\circ$; c) $\gamma = 321^\circ$; d) $\delta = 100^\circ$.
- Nacrtaj kutove:
a) $\alpha = 5^\circ$; b) $\beta = 288^\circ$; c) $\gamma = 72^\circ$; d) $\delta = 90^\circ$.
- Nacrtaj kut od 359° .
- U bilježnicu nacrtaj kutove kao na slici:



- U bilježnicu nacrtaj kutove kao na slici:



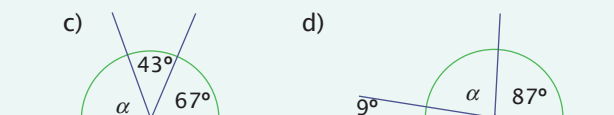
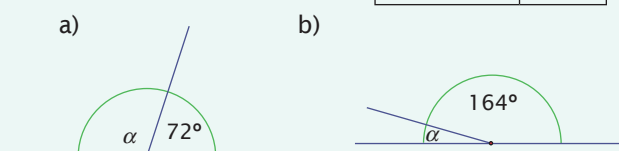
Kolika je veličina svakog od kutova?

- U tablici se nalaze podaci o širini vidnog polja čovjeka i nekih životinja.

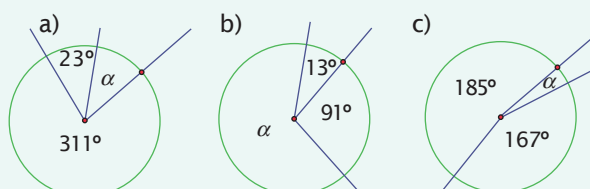
Nacrtaj te kutove:

Pas	130°
Čovjek	175°
Gušter	280°
Krokodil	290°
Žaba	330°

- Koliko iznosi kut α ?



- Koliko iznosi kut α ?

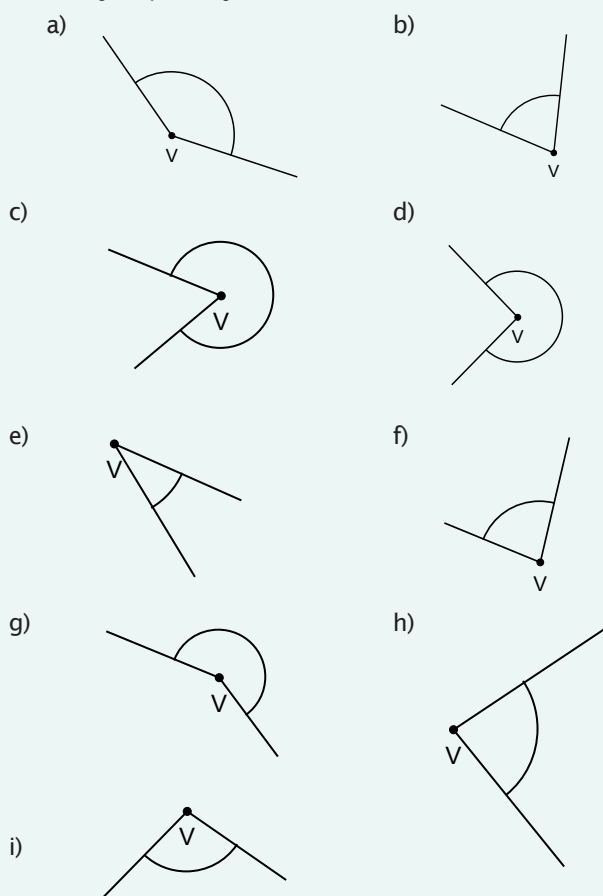


- Za svaki od zadanih kutova najprije napiši kakav je, a zatim ga nacrtaj.
a) 125° ; b) 66° ; c) 325° ;
d) 52° ; e) 160° .
- Na modelu kutomjera od papira prikaži šiljasti kut.
a) Procijeni koliko stupnjeva otprilike iznosi taj kut;
b) Izmjeri njegovu točnu veličinu;
c) Nacrtaj taj kut u bilježnicu.
- Na modelu kutomjera od papira prikaži tupi kut.
a) Procijeni koliko stupnjeva otprilike iznosi taj kut;
b) Izmjeri njegovu točnu veličinu;
c) Nacrtaj taj kut u bilježnicu.
- Na modelu kutomjera od papira prikaži izbočeni kut.
a) Procijeni koliko stupnjeva otprilike iznosi taj kut;
b) Izmjeri njegovu točnu veličinu;
c) Nacrtaj taj kut u bilježnicu.

Vježbalica

1. Kojoj vrsti pripada kut od: a) 125° , b) 45° , c) 320° , d) 98° , e) 32° , f) 90° , g) 180° , h) 299° , i) 44° , j) 11° , k) 177° ?

2. Procijeni pa izmjeri veličine ovih kutova:



3. Nacrtaj 4 šiljasta kuta te ih izmjeri.
 4. Nacrtaj 4 tupa kuta te ih izmjeri.
 5. Nacrtaj 4 izbočena kuta te ih izmjeri.
 6. Nacrtaj 5 šiljastih kutova te ih izmjeri.
 7. Nacrtaj 3 tupa kuta te ih izmjeri.
 8. Nacrtaj 2 izbočena kuta te ih izmjeri.
 9. Nacrtaj ispruženi, pravi i puni kut.

10. Nacrtaj šiljaste kutove:

a) 59° ; b) 20° ; c) 31° ; d) 67° ; e) 48° ; f) 35° .

11. Nacrtaj tupe kutove:

a) 149° ; b) 120° ; c) 91° ; d) 167° ; e) 148° ; f) 135° .

12. Nacrtaj izbočene kutove:

a) 189° ; b) 250° ; c) 330° ; d) 290° ; e) 3450° ; f) 210° .

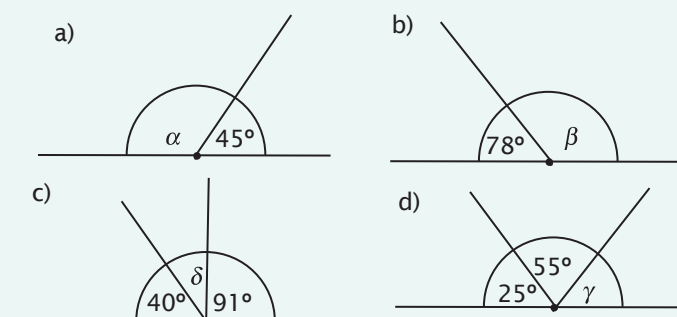
13. Nacrtaj kutove i ispod svakog zapiši kojoj vrsti pripadaju:

a) $\alpha = 75^\circ$; b) $\beta = 125^\circ$; c) $\gamma = 315^\circ$; d) $\delta = 66^\circ$.

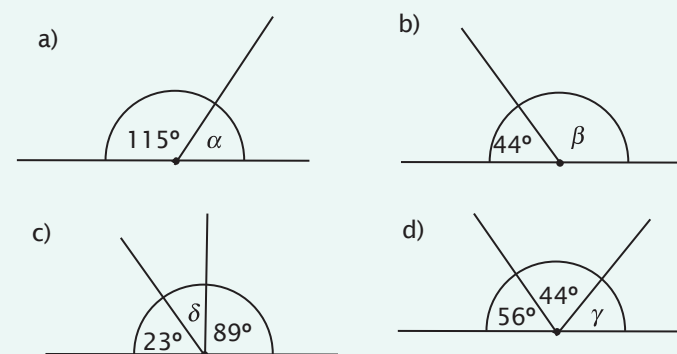
14. Nacrtaj kutove i ispod svakog zapiši kojoj vrsti pripadaju:

a) $\alpha = 45^\circ$; b) $\beta = 148^\circ$; c) $\gamma = 272^\circ$; d) $\delta = 160^\circ$.

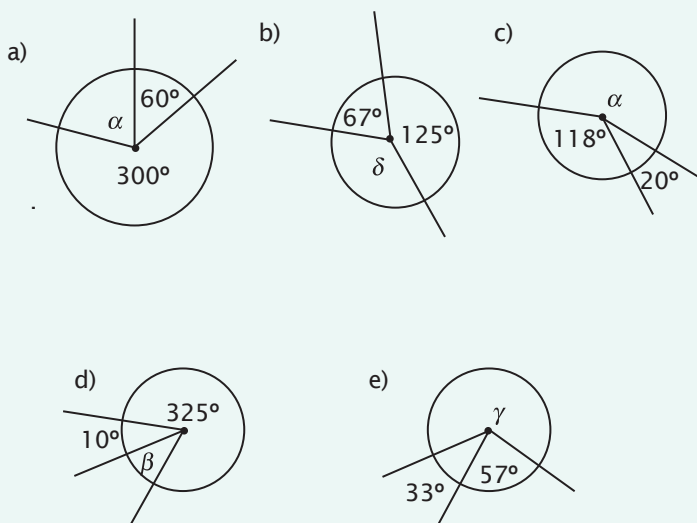
15. Koliko iznosi nepoznati kut?



16. Koliko iznosi nepoznati kut?



17. Koliko iznosi nepoznati kut?

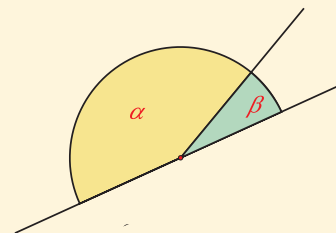


3.8. Sukuti i vršni kutovi

Koliki je β ?

Pogledaj sliku i pronađi veličinu kuta β :

Pogledajmo desnu sliku i kut β . On s kutom $\alpha = 154^\circ$ ima zajednički krak i zajedno čine ispruženi kut. Kažemo da su α i β **sukuti**.



sukuti
ili susjedni kutovi

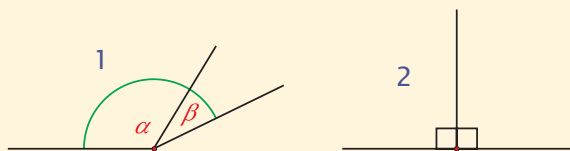
Dva kuta koji imaju jedan zajednički krak, a preostala dva kraka su suprotni polupravci istog pravca nazivaju se **sukuti** ili **susjedni kutovi**.

Zbroj veličina sukuta je 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Primjer 1. Sukuti

Koji od ovih kutova su sukuti?



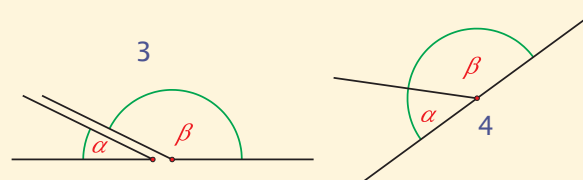
Rješenje:

Da bi dva kuta bila sukuti trebaju zadovoljavati dva uvjeta:

- da imaju zajednički krak
- da im druga dva kraka čine suprotne

polupravce istog pravca

To znači da se sukuti nalaze na slikama 2 i 4.

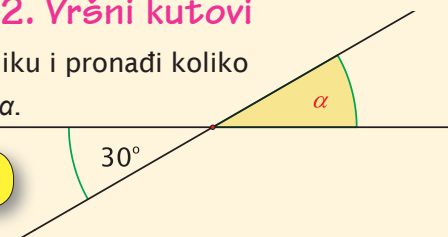


Kutovi na slici 1 imaju zajednički krak, ali ne čine ispruženi kut. Kad bi se spojili kutovi na slici 3 dobili bismo ispruženi kut, no oni nemaju zajednički krak. Zato oni nisu sukuti.

Primjer 2. Vršni kutovi

Pogledaj sliku i pronađi koliko iznosi kut α .

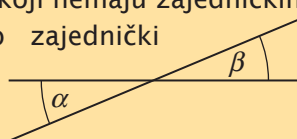
vršni kutovi



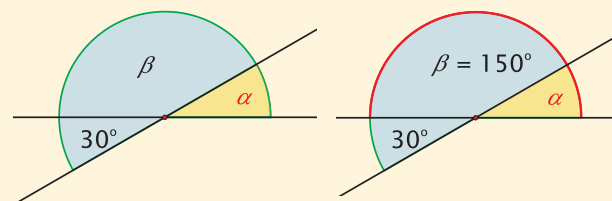
Rješenje:

Nacrtani su pravci koji se sijeku.

Dva kuta kao na slici koji su određeni pravcima koji se sijeku i koji nemaju zajedničkih krakova, već samo zajednički vrh, nazivaju se **vršni kutovi**.



Dopunimo sliku kutom β :



Primjećujemo da su kutovi 30° i β sukuti, pa je $\beta = 150^\circ$. No β i α su također sukuti! To se lijepo vidi na gornjoj slici. Stoga zaključujemo da je $\alpha = 30^\circ$. Toliko je iznosio početni vršni kut od α .

Vršni kutovi su jednakih veličina.

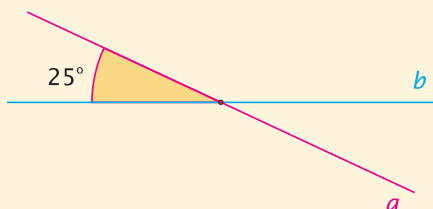


Primjer 3.

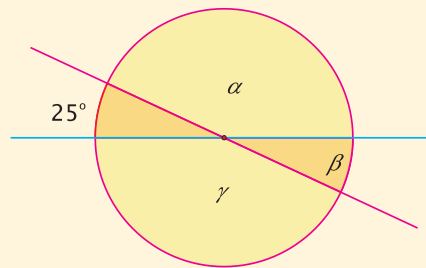
Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 25° . Odredi veličine svih kutova između ta dva pravca.

Rješenje:

Pravci a i b sijeku se pod kutom od 25° .



Nacrtajmo i ostale kutove koje zatvaraju pravci a i b :

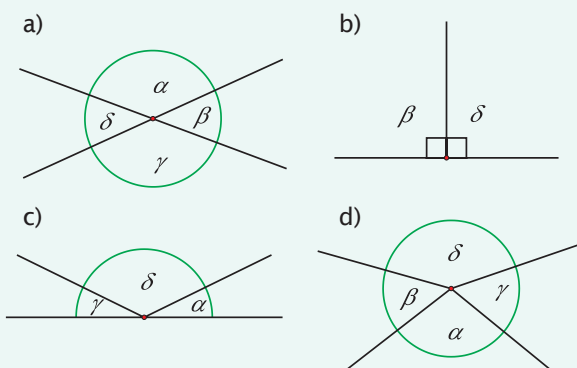


Među kutovima α , β i γ prepoznavamo sukute i vršne kutove s kutom od 25° . Kut α je sukut sa zadanim kutom od 25° . To znači da je $\alpha = 180^\circ - 25^\circ = 155^\circ$.

Kut γ je također sukut od 25° , pa i on iznosi $\gamma = 155^\circ$. Kut β i 25° su vršni kutovi, a znamo da su vršni kutovi jednakih veličina. Stoga je $\beta = 25^\circ$.

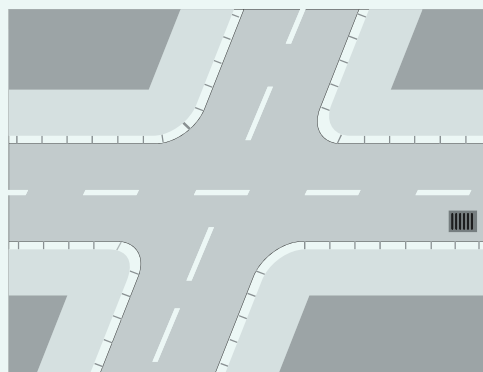
Zadaci

- Koji od ovih kutova su vršni, a koji su sukuti? Procijeni njihove veličine.



- Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 38° . Zaključi bez mjerenja kolike su veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
- Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 122° . Zaključi bez mjerenja kolike su veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.

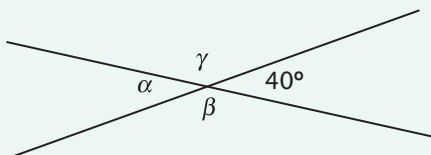
- Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 75° . Zaključi bez mjerenja kolike su veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
- Nacrtaj pravce p i r koji se sijeku pod kutom od 90° . Zaključi bez mjerenja kolike su veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
- Gdje u svakodnevnom životu susrećemo sukute?
- Gdje u svakodnevnom životu susrećemo vršne kutove?
- Kakve kutove vidiš na slici?



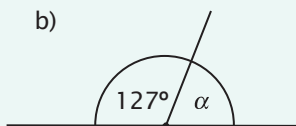
Vježbalica

1. Izračunaj nepoznate kutove sa slike:

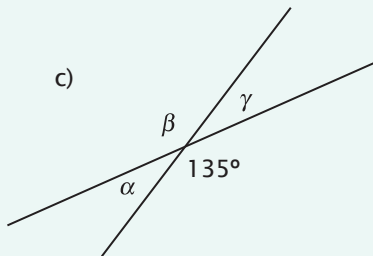
a)



b)

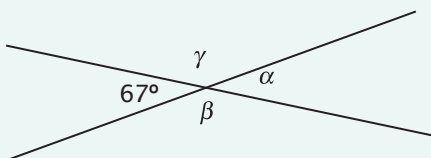


c)

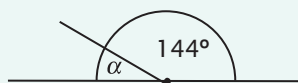


2. Izračunaj nepoznate kutove sa slike:

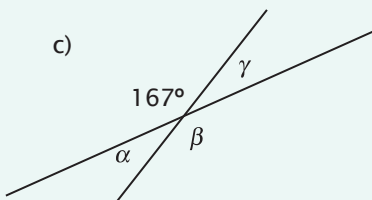
a)



b)

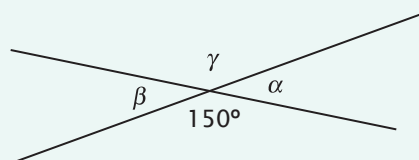


c)

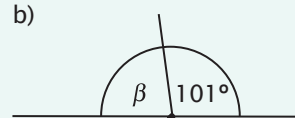


3. Izračunaj nepoznate kutove sa slike:

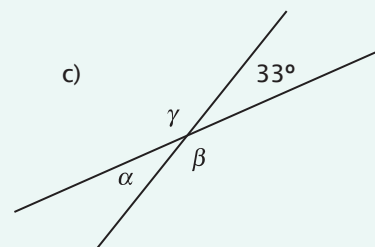
a)



b)



c)

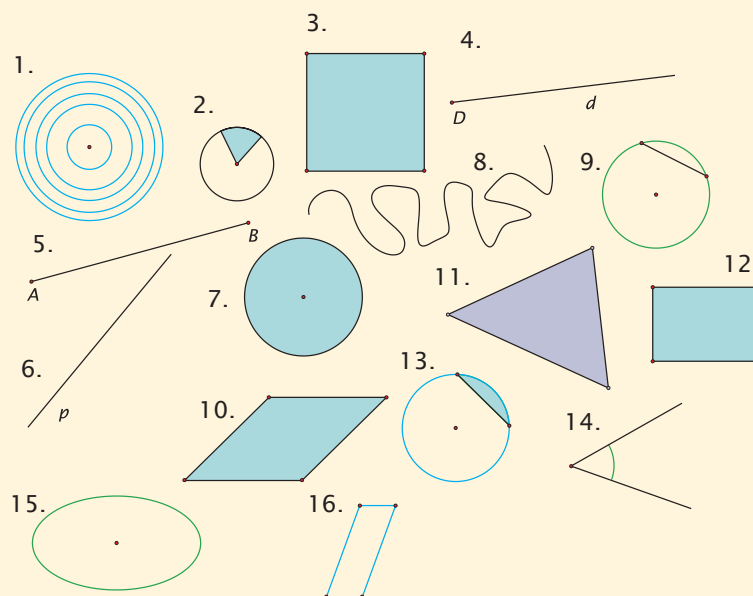


4. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 45° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
5. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 145° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
6. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 60° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
7. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 130° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
8. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 20° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
9. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 95° . Pronađi veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.
10. Zadan je neki kut $\alpha = 56^\circ$. Koliko stupnjeva ima njegov sukut?
11. Zadan je neki kut $\alpha = 156^\circ$. Koliko stupnjeva ima njegov vršni kut?
12. Zadan je neki kut $\alpha = 69^\circ$. Koliko stupnjeva ima njegov sukut?
13. Zadan je neki kut $\alpha = 37^\circ$. Koliko stupnjeva ima njegov vršni kut?
14. Zadan je neki kut $\alpha = 177^\circ$. Koliko stupnjeva ima njegov sukut?

3.9. Ponavljanje

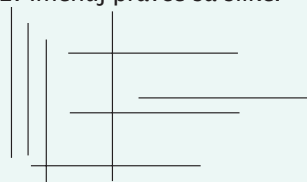
Pitanja za ponavljanje:

1. Koje skupove točaka vidiš na slici desno?
2. Koja je razlika između dužine, pravca i polupravca?
3. U kojem položaju mogu biti 2 pravca u ravni?
4. Što je to sjecište?
5. Kakvi su to okomiti pravci?
6. Što je kružnica?
7. Koja je razlika između kružnice i kruga?
8. Što je kut?
9. Čime mjerimo kutove?
10. Koje vrste kutova poznaješ?



Zadaci za ponavljanje

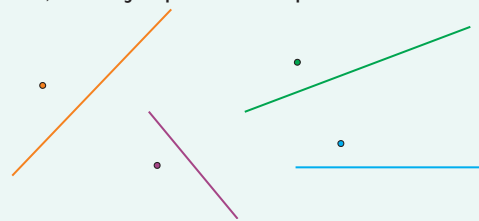
1. U bilježnicu nacrtaj šest točaka po volji i imenuj ih. Nacrtaj dužine koje povezuju te točke.
 - a) Procijeni udaljenost između svih točaka međusobno;
 - b) Ravnalom izmjeri udaljenost između točaka i izrazi ih u milimetrima.
2. Imenuj pravce sa slike.



Koji od ovih pravaca su usporedni? Zapiši to matematičkim simbolima.
3. Nacrtaj pravac i točku koja mu ne pripada. Kroz tu točku nacrtaj:
 - a) okomicu na zadani pravac;
 - b) usporednicu sa zadanim pravcem.
4. Nacrtaj kružnicu:
 - a) oko središta A, s polumjerom $r = 4$ cm;
 - b) oko središta V, s polumjerom $r = 22$ mm.

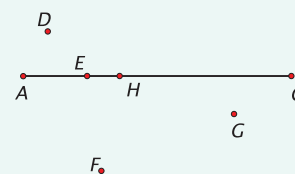
Zapiši te kružnice matematičkim simbolima.
5. Koliki je polumjer kružnice ako je njen promjer:
 - a) 18 cm;
 - b) 42 cm;
 - c) 48 dm?
6.
 - a) Skiciraj krug i u njemu oboji jedan kružni isječak;
 - b) Skiciraj krug i u njemu oboji jedan polukrug;
 - c) Skiciraj krug i u njemu oboji jedan kružni odsječak;
 - d) Skiciraj kružnicu i bojom označi njen kružni luk;
 - e) Skiciraj kružnicu i bojom označi njenu polukružnicu;
 - f) Skiciraj kružnicu i prikaži jednu njenu tetivu.
7. Nacrtaj koncentrične kružnice s polumjerima 3 cm, 20 mm i 37 mm.
8. Nacrtaj jedan:
 - a) pravi kut;
 - b) ispruženi kut;
 - c) tupi kut;
 - d) šiljasti kut;
 - e) izbočeni kut. Izmjeri veličinu svakog od kutova.

9. Nacrtaj kutove i ispod svakog zapiši kojoj vrsti pripadaju: a) $\alpha = 10^\circ$; b) $\beta = 90^\circ$; c) $\gamma = 298^\circ$; d) $\delta = 130^\circ$.
10. Na slici su četiri pravca, a svakom pravcu je bojom pridružena jedna točka.
 - a) Skiciraj usporednicu s pravcem kroz zadanu točku;

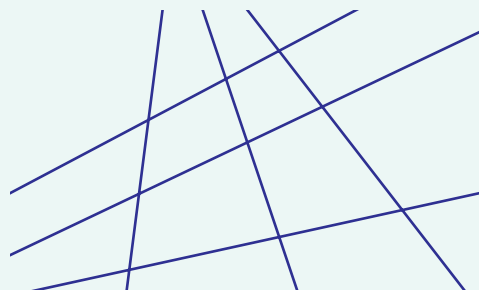


- b) Precrtaj pravce i točke u bilježnicu, pa geometrijskim priborom nacrtaj te usporednice.

11. Koje od točaka pripadaju dužini $\overline{AC}$, a koje točke joj ne pripadaju?



12. Pripadaju li dužini njezine krajnje točke?
13. Koliko je dužina, a koliko sjecišta na slici:



14. Koje od ovih rečenica su točne? Netočne rečenice ispravi.

Duljina dužine $\overline{CD}$ je 7 kg.

Dužina duljine $\overline{CD}$ je 7 cm.

7 cm = 70 mm

2 mm = 20 cm

Duljina pravca je 5 cm.

Duljina znači isto što i dužina.

Palac je dug otprilike 5 m.

Palac je dug otprilike 5 cm.

Palac je dug otprilike 5 mm.

Duljina polupravca je 5 dm.

Pravac je dug 6 mm.

18 dm = 180 cm

Ako je $|AB| = 12$ cm, onda je $|BA| = 120$ mm.

15. Nacrtaj pravac p i na njemu točke A , B i C tako da udaljenost između A i B bude 1 cm i da udaljenost između A i C bude 3 cm.
Zadatak ima 2 rješenja. Pronađi ih i odgovori koliko je $|BC|$.

16. Nacrtaj polupravac p s početnom točkom P i na njemu točke B i C tako da udaljenost između P i B bude 12 mm i da udaljenost između P i C bude 3 cm.
Koliko rješenja ima zadatak? Koliko je $|BC|$?

17. Nacrtaj dužinu $\overline{CE}$ duljine 36 mm. Procijeni gdje se nalazi točka X koja dijeli dužinu $\overline{CE}$ na dva jednaka dijela. Koliko iznosi $|CX|$, a koliko $|EX|$?

18. Nacrtaj dužinu $|BC| = 48$ mm. Nacrtaj točku:

a) A na dužini $\overline{BC}$ koja je od B udaljena 15 mm;

b) D na dužini $\overline{BC}$ koja je od C udaljena 23 mm.

Koliko iznosi $|AD|$?

19. Skiciraj dužinu od: 13 mm, 8 mm, 49 mm, 24 mm, 67 mm. Zatim točnost svojih crteža provjeri mjerenjem ravnalom.

20. Nacrtaj pravce okomite na zadani pravac, a koji prolaze zadanim točkama:



21. Nacrtaj dvije kružnice koje se:

a) sijeku u 2 točke;

b) uopće ne sijeku;

c) dodiruju u 1 točki.

Mogu li se dvije kružnice sjeći u 3 točke? Pokušaj nacrtati sliku pa odgovori.

22. Nacrtaj pravac i kružnicu. Koliko zajedničkih točaka mogu imati pravac i kružnica? Nacrtaj sve mogućnosti.

23. Matematički diktat:

- Nacrtaj kružnicu sa središtem S i jednu točku A na toj kružnici.

- Nacrtaj pravac r koji prolazi točkama A i S .

- Nacrtaj okomicu na pravac r iz točke A .

24. Nacrtaj kružnicu polumjera 3 cm. Zatim nacrtaj dva usporedna pravca koji dodiruju ovu kružnicu. Koja je međusobna udaljenost ovih pravaca?

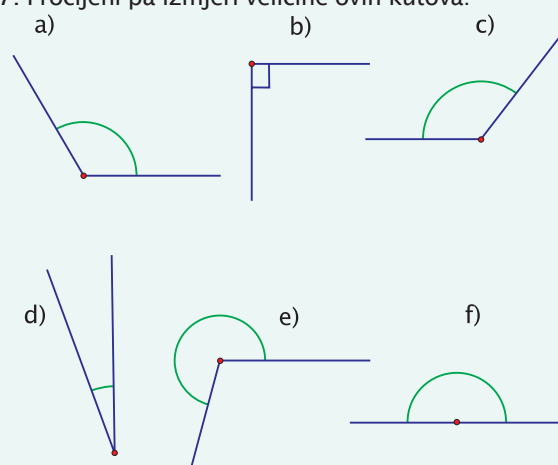
25. Načini sat s kazaljka od tvrdog papira. Na satu položajem kazaljki prikaži:

a) tupi kut; b) ispruženi kut; c) pravi kut;

d) šiljasti kut; e) izbočeni kut.

26. Pravilan položaj držanja ruku vozača na volanu automobila je kao da kazaljke (ruke vozača) na satu prikazuju vrijeme 13 h 50 min. Kakav kut zatvaraju kazaljke u to vrijeme?

27. Procijeni pa izmjeri veličine ovih kutova:



28. Od papirnatog modela složi zadane kutove. Nakon toga ih izmjerite kutomjerom:

a) 30° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 100° ;

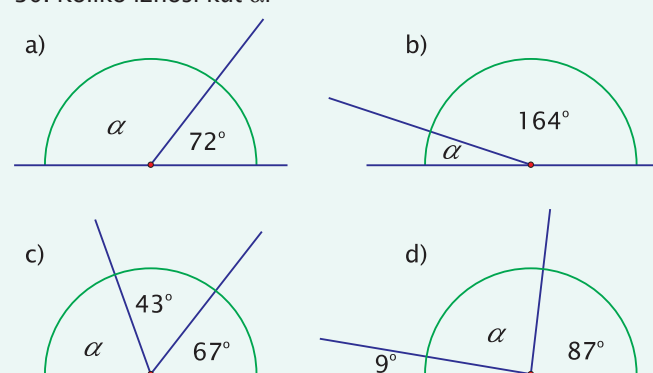
e) 120° ; f) 150° ; g) 180° .

29. Sada je 5 sati i ___ minuta.

Dopuni gornju rečenicu ako znamo da mala i velika kazaljka zatvaraju kut od, približno:

a) 90° ; b) 180° ; c) 30° ; d) 60° .

30. Koliko iznosi kut α ?

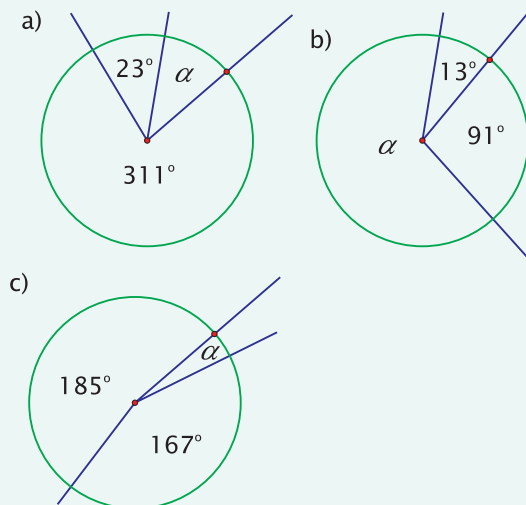


31. Nacrtaj pravac n i točku T koja mu ne pripada. Zatim nacrtaj pravac m kroz točku T takav da je:

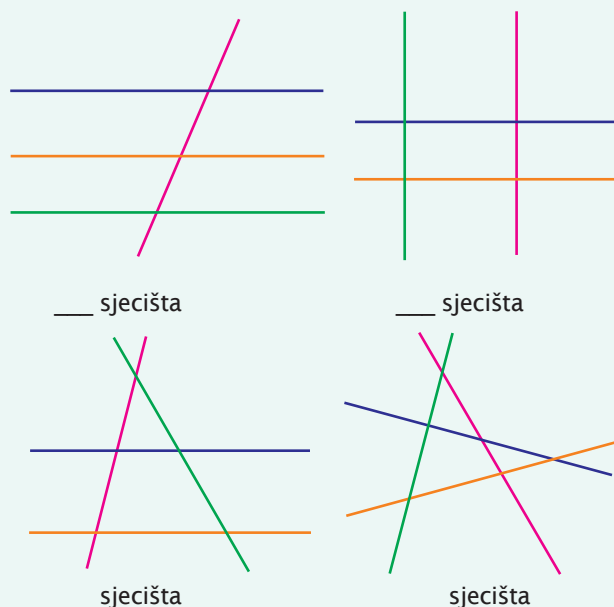
a) $n \perp m$; b) $m \parallel n$.

32. Ako je pravac a okomit na pravac b , a pravac b okomit na pravac c , u kakvom su međusobnom položaju pravci a i c ? Odgovori i skiciraj.

33. Koliko iznosi kut α ?



34. Pogledaj u kojem položaju mogu biti 4 pravca u ravlini. Koliko sjecišta oni mogu imati?



___ sjecišta

___ sjecišta

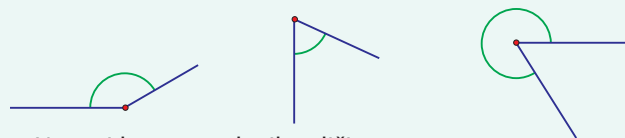
Zašto ih se ne može nacrtati tako da imaju samo 2 sjecišta? Pokušaj skicirati tu sliku.

35. Nacrtaj pravac p . Zatim skiciraj što više njemu okomitih pravaca. Koliko jedan pravac može imati okomica?

Primjer oglednog testa

- Nacrtaj par usporednih pravaca a i b .
- Nacrtaj pravac e i točku E izvan njega. Zatim nacrtaj pravac f koji je okomit na pravac e i prolazi točkom E .
- Pretvori u zadane mjerne jedinice:
 $40 \text{ cm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$
 $25 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$
 $1 \text{ km} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$
 $7\,000 \text{ mm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ cm}$
 $3 \text{ m} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ dm}$
 $100 \text{ dm} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ mm}$
- Nacrtaj kružnicu sa središtem S i polumjerom 3 cm . Nacrtaj njen promjer. Koliko iznosi promjer te kružnice?
- Nacrtaj neki krug i u njemu oboji jedan kružni isječak.
- Nacrtaj kružnicu promjera 50 mm . Zatim nacrtaj:
 a) pravac a koji siječe tu kružnicu;
 b) pravac b koji s tom kružnicom nema zajedničkih točaka.

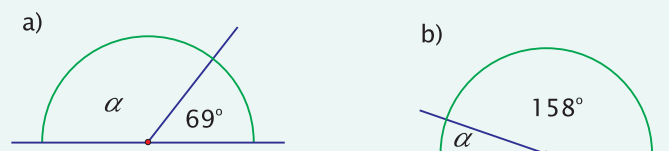
7. Izmjeri kutove na slici:



8. Nacrtaj kutove zadanih veličina:

a) 50° ; b) 135° ; c) 200° .
 Ispod svakog kuta napiši kojoj vrsti pripada.

9. Izračunaj veličinu kuta α :



10. Nacrtaj pravce a i b koji se sijeku pod kutom od 49° . Izračunaj veličine svih kutova koje određuju ta dva pravca.

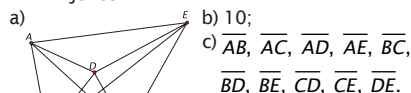
11. Matematički diktat:

- Nacrtaj kružnicu sa središtem S i jednu točku A na toj kružnici
- Nacrtaj pravac p koji prolazi točkom A i središtem kružnice
- Sjecište pravca p i kružnice označi s B
- Što je dužina AB te kružnici?
- Nacrtaj okomicu iz središta S na pravac p .

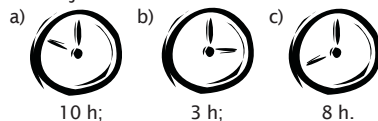
O. Uvodno ponavljanje

O.1. Geometrija

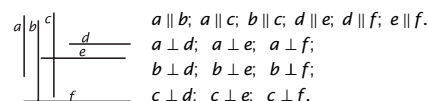
- $|MN| = 29$ mm; $|OP| = 43$ mm; $|AB| = 8$ mm.
- Primjerice:



- Primjerice:



- Primjerice:



- $\triangle OMN$: $|OM| = 24$ mm, $|ON| = 24$ mm, $|MN| = 24$ mm; $o = 72$ mm.
 $\triangle ABC$: $|AB| = 33$ mm, $|BC| = 22$ mm, $|CA| = 27$ mm; $o = 82$ mm.
 $\triangle GHI$: $|GH| = 29$ mm, $|HI| = 34$ mm, $|GI| = 18$ mm; $o = 81$ mm.
 $\triangle JKL$: $|JK| = 39$ mm, $|KL| = 39$ mm, $|LJ| = 11$ mm; $o = 89$ mm.
 $\triangle DEF$: $|DE| = 43$ mm, $|EF| = 29$ mm, $|FD| = 21$ mm; $o = 93$ mm.
Jednakostraničan: $\triangle OMN$; jednakokračan: $\triangle JKL$; raznostranični: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$, $\triangle GHI$.
7. $o = a + b + c$; $c = 18 - 5 - 6 = 7$ cm.
8. $a = 33 : 3 = 11$ m.
9. $o = 3 \cdot 2 = 6$ m. Mama nema dovoljno trake.
11. a) $P = 54$ cm²; b) $P = 48$ dm².
13. a) $o = 32$ cm; $P = 64$ cm²; b) $o = 148$ dm; $P = 1369$ dm²; c) $o = 296$ m; $P = 5476$ m².
14. 5.
15. 1) $o = 8$ cm; $P = 3$ cm²; 2) $o = 8$ cm; $P = 4$ cm²; 3) $o = 10$ cm; $P = 4$ cm².
16. $a = o : 4 = 62$ m.
17. $o = 4 \cdot a = 440$ m. Užetom se ne može opasti ku tula.
18. Površina prvog pravokutnika je $P = 6 \cdot 1 = 6$ cm². Površina drugog pravokutnika je $P = 2 \cdot 3 = 6$ cm². Oni imaju jednake površine.

O.2. Aritmetika

- a) 450; b) 605; c) 886; d) 1419; e) 2456; f) 4501; g) 8562; h) 16 655; i) 32 812; j) 65 097.
- a) 63; b) 147; c) 344; d) 767; e) 1642; f) 1421; g) 2008; h) 13 211; i) 17 646; j) 45 545.
- a) 63; b) 168; c) 420; d) 1008; e) 2352; f) 5376; g) 12 096; h) 26 880; i) 59 136; j) 129 024.
- a) 17; b) 34; c) 68; d) 136; e) 272; f) 544; g) 1088; h) 2176; i) 4352; j) 8704.
- 33.
- Pet mačaka ima ukupno 20 nogu, 10 očiju i 5 glava.
- 0, 3 i 8. 8. a) 53; b) 150.
- a) 45; b) 10. 10. a) 17; b) 16; c) 97; d) 13.
- Prvi pribrojnik je 54. On je veći od drugoga za 17.
- Treba naći brojeve veće od 110, a manje od 125. Primjerice, brojevi 119 i 120.
20. 14. 52.
- Pet svinja i dvije guske imaju ukupno 34 noge, 7 glava i 14 očiju.
- Na tri načina: $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, $5 = 1 + 1 + 1 + 2$, $5 = 1 + 2 + 2$.

- Karlo ima 19, Ivan ima 15, a Boris 34 godine.
- Luka je imao 42 kn, potrošio je 38 kn. Ostalo mu je 4 kn.
- Gumica stoji 8 kn, a lopta 44 kn.
- Franka ima 7 godina, a Franko 11 godina.

1. Prirodni brojevi

1.1. Skup prirodnih brojeva

- Ići će na Cres. 54.
- U zatvoru je 32 dana.
- Sljedeći članovi niza imaju: a) 9 i 11 točkica; b) 7, 21, 43, 73, 111, ...; c) 1, 4, 9, 16, 25, ...
- 312, 100, 2, 900, 5 987 770.
- 887, 35, 1, 13, 71, 791 973.
- 998, 996, 994, 992, 990.
- 1001, 1003, 1005, 1007, 1009.

1.2. Zapisivanje prirodnih brojeva

- a) U jednom danu ljudsko srce zakuca sto tisuća i osamsto puta i potisne sedam tisuća pedeset šest litara krvi; b) U svijetu je poznato milijun tristo dvadeset šest tisuća sedamsto osam različitih životinjskih vrsta. Pretpostavlja se da ih u Hrvatskoj ima pedeset šest tisuća sto dvadeset jedna; c) U Hrvatskoj su poznate četiri tisuće devetsto dvadeset četiri biljne vrste, a ugroženo ih je petsto četrnaest; d) Mjesec je od Zemlje udaljen oko tristo osamdeset četiri tisuće četrsto pet kilometara.
- a) Rijeka Sava je duga 945 kilometara; b) Dinara je visoka 1830 metara; c) Makarska ima 13718 stanovnika; d) Srednja udaljenost Zemlje i Mjeseca je 384000 kilometara; e) Hrvatska ima 4784265 stanovnika.
- 555 555 petsto pedeset pet tisuća petsto pedeset pet, 7 900 471 sedam milijuna devetsto tisuća četrsto sedamdeset jedan, 23 232 323 dvadeset tri milijuna dvjesto trideset dvije tisuće tristo dvadeset tri, 87 658 711 osamdeset sedam milijuna šesto pedeset osam tisuća sedamsto jedanaest, 100 100 001 sto milijuna sto tisuća jedan, 56 784 420 pedeset šest milijuna sedamsto osamdeset četiri tisuće četrsto dvadeset, 59 002 279 pedeset devet milijuna dvije tisuće dvjesto sedamdeset devet, 50 007 000 pedeset milijuna sedam tisuća.
- a) 5 007 000; b) 5 000 007; c) 5 070 000; d) 2 430 000; e) 2 043 000; f) 2 000 043; g) 7 003 016; h) 7 000 003 160; i) 17 002 058 256.
- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.
- 102, 120, 201, 210. Ima ih 4.
- a) 86 331, osamdeset šest tisuća tristo trideset jedan; b) 13 368, trinaest tisuća tristo šezdeset osam.
- Mjesna vrijednost stotica ne može biti 17, jer mjesna vrijednost mora biti jednoznamenasti broj.
- Dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake ima 9.
- 11, 3, 11, 3, 3, 19.
- a) 96, 69, 87, 78; b) 920; c) najveći je 91, a najmanji 19; d) 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2011, 2101, 1111, 1120, 1102, 1201, 1210, 1012, 1021, 1300, 1030, 1003.

- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.

- 102, 120, 201, 210. Ima ih 4.

- a) 86 331, osamdeset šest tisuća tristo trideset jedan; b) 13 368, trinaest tisuća tristo šezdeset osam.

- Mjesna vrijednost stotica ne može biti 17, jer mjesna vrijednost mora biti jednoznamenasti broj.

- Dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake ima 9.

- 11, 3, 11, 3, 3, 19.

- a) 96, 69, 87, 78; b) 920; c) najveći je 91, a najmanji 19; d) 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2011, 2101, 1111, 1120, 1102, 1201, 1210, 1012, 1021, 1300, 1030, 1003.

- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.

- 102, 120, 201, 210. Ima ih 4.

- a) 86 331, osamdeset šest tisuća tristo trideset jedan; b) 13 368, trinaest tisuća tristo šezdeset osam.

- Mjesna vrijednost stotica ne može biti 17, jer mjesna vrijednost mora biti jednoznamenasti broj.

- Dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake ima 9.

- 11, 3, 11, 3, 3, 19.

- a) 96, 69, 87, 78; b) 920; c) najveći je 91, a najmanji 19; d) 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2011, 2101, 1111, 1120, 1102, 1201, 1210, 1012, 1021, 1300, 1030, 1003.

- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.

- 102, 120, 201, 210. Ima ih 4.

- a) 86 331, osamdeset šest tisuća tristo trideset jedan; b) 13 368, trinaest tisuća tristo šezdeset osam.

- Mjesna vrijednost stotica ne može biti 17, jer mjesna vrijednost mora biti jednoznamenasti broj.

- Dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake ima 9.

- 11, 3, 11, 3, 3, 19.

- a) 96, 69, 87, 78; b) 920; c) najveći je 91, a najmanji 19; d) 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2011, 2101, 1111, 1120, 1102, 1201, 1210, 1012, 1021, 1300, 1030, 1003.

- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.

- 102, 120, 201, 210. Ima ih 4.

- a) 86 331, osamdeset šest tisuća tristo trideset jedan; b) 13 368, trinaest tisuća tristo šezdeset osam.

- Mjesna vrijednost stotica ne može biti 17, jer mjesna vrijednost mora biti jednoznamenasti broj.

- Dvoznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke jednake ima 9.

- 11, 3, 11, 3, 3, 19.

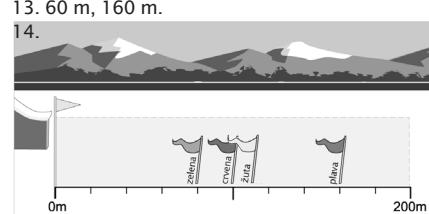
- a) 96, 69, 87, 78; b) 920; c) najveći je 91, a najmanji 19; d) 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2020, 2002, 2110, 2011, 2101, 1111, 1120, 1102, 1201, 1210, 1012, 1021, 1300, 1030, 1003.

- 345, 354, 435, 453, 534, 543. Ima ih 6.

- Neparnih brojeva ima beskonačno mnogo. Najmanji neparan prirodan broj je 1. Najveći neparan prirodan broj ne postoji.
- 460, 301, 1 000 001, 680, 809, 241 010, 6900, 900 000, 1, 2, 100.
- 699, 900, 60 000, 999 999, 112 798, 56 399, 199, 8099, 519, 0, 9.
- Sljedbenik, prethodnik, prethodnik, sljedbenik.
- 12, 3, 260, 1008.
- a) 1000, prethodnik 999, sljedbenik 1001; b) 888, 887, 889; c) 990, 989, 991; d) 10 234, 10 233, 10 235; e) 9955, 9954, 9956; f) 1 023 456, 1 023 455, 1 023 457; g) 8 765 432, 8 765 431, 8 765 433.

1.4 Prirodni brojevi na pravcu

- a) 11; b) 27; c) 42; d) 55.
-
-
-
- Marija ima 7 godina, Beni 8, Luka 10, a Ana 11 godina.
-
-
-
-
-
-
-
- Šibenik ima 40 000 stanovnika, Dubrovnik 30 000, Požega 21 000, Čakovec 15 000, a Samobor 10 000 stanovnika.
- 60 m, 160 m.
-



1.5 Uspoređivanje prirodnih brojeva

- a) Ana 155 cm, Luka 150 cm. Ana je viša; b) Skočili su jednako visoko; c) Dječak u bijeloj majici skočio je najdalje, a dječak u crvenoj majici najkraće.
- Točne su tvrdnje: a) $2 < 5$, $3 < 7$, $6 < 8$, $16 < 61$, $2 < 22$, $99 < 100$; b) $5 > 1$, $23 > 6$, $12 > 3$, $1010 > 1009$, $12 > 11$, $65 > 56$, $77 > 76$; c) $14 > 2$, $9 = 9$, $1 < 12$, $77 < 78$, $5 < 500$, $405 < 504$, $5 < 6$.

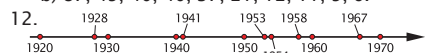
4. $22 < 27$, $45 > 44$, $505 = 505$, $23 < 78$, $0 < 12$, $34 < 56$, $32 = 32$, $44 > 4$.
 5. $808 > 88$, $37 < 73$, $73 > 37$, $33 = 33$, $1001 > 11$, $0 < 1$, $2 > 1$, $34 > 12$.
 6. a) 0, 1, 2, 3, 4, 5; b) 0, 1; c) 1, 2, 3; d) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; f) 6; g) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; h) 1, 2, 3; i) nemoguće je riješiti zadatak.

Životinja	Koliko dnevno spava?
Žirafa	20 min
Zebra	1 h
Slon	2 h 20 min
Majmun	12 h
Papiga	15 h
Lav	20 h

Životinja	Brzina (u km na sat)	Životinja	Brzina (u km na sat)
Gepard	112	Zebra	64
Skočijarac	96	Afrički bivol	56
Lav	80	Bradavičasta svinja	48
Gazela	80	Hijenski pas	48
Noj	80	Žirafa	48
Gnu	80	Slon	40
Pjegava hijena	64	Bijeli nosorog	40

Životinja	Koliko dugo živi?
Velika papiga	120 godina
Slon	70 godina
Nilski konj	60 godina
Nosorog	45 godina
Deva	31 godina
Klokan	20 godina
Vjeverica	16 godina

10. a) 2, 9, 12, 16, 32, 34, 45;
 b) 0, 1, 6, 12, 21, 45, 45, 54, 67.
 11. a) 97, 71, 37, 23, 13, 11, 3, 2;
 b) 87, 49, 40, 40, 37, 21, 12, 11, 9, 6.



14. Marko je dobio zlatnu, Lucija srebrnu, a Luka brončanu medalju. Više od 100 m skočili su Marko i Lucija.
 15. a) $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; b) $x = 17, 18, 19, 20, \dots$;
 c) $x = 1$; d) takav prirodan broj ne postoji.
 16. a) $x = 4, 5, 6, 7$; b) $x = 675$;
 c) $x = 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803$.

$x < 5$	1, 2, 3, 4
$13 < x < 18$	14, 15, 16, 17
$x < 2$	1
$x > 259$	260, 261, 262, ...
$x > 1$	2, 3, 4, 5, 6, ...
$x < 99$	1, 2, 3, 4, ..., 97, 98.
$34 < x < 304$	5, 36, 37, ..., 300, 301, 302, 303.

18. a) $x > 2$; b) $x < 7$; c) $x < 3$; d) $36 < x < 41$;
 e) $999 < x < 1006$.
 19. $x = 690, 692, 694, 696, 698$.

1.6. Približna vrijednost

1. a) $8 \approx 10$; $23 \approx 20$; $37 \approx 40$; $55 \approx 60$; b) $2 \approx 0$;
 $14 \approx 10$; $30 \approx 30$; $46 \approx 50$.

2. 20, 450, 70, 80, 90, 100, 100, 430, 660, 900, 990.
 3. a) 100, 300, 700, 200, 600, 500, 600, 7800, 6500, 3500, 3300; b) 300, 300, 400, 1300, 1200, 1300, 1600, 1200, 1400, 1900, 3400, 3400, 7900.
 4. a) 3000, 12 000, 15 000, 3000, 7000, 5000, 8000, 6000, 12 000, 35 000, 72 000, 126 000; b) 3000, 12 000, 2000, 3000, 6000, 20 000, 2000, 3000, 7000, 9000, 5000, 5000, 4000, 5000, 8000.
 5. 30, 40, 50, 100, 500, 5000, 2000, 10 000, 60 000.

Nacionalni park	Površina (ha)	Približna površina (ha)
Plitvička jezera	29 482	29 000
Kornati	23 400	23 000
Sjeverni Velebit	10 900	11 000
Krka	10 300	10 000
Paklenica	10 200	10 000
Risnjak	6 400	6 000
Mljet	5 480	5 000
Brijuni	3 635	4 000

7. Približne mjere Anine sobe su:
 3 m i 80 cm, 2 m i 30 cm.

More	Dubina	Približna dubina
Tihi ocean	11 516 m	11 500
Atlantski ocean	9 220 m	9 200
Sredozemno more	5 150 m	5 200
Crno more	2 135 m	2 100

9. Mamin bicikl: točna cijena je 1172 kn, cijena zaokružena na desetice je 1170 kn, a cijena zaokružena na stotice je 1200 kn. Tatin bicikl: točna cijena je 1327 kn, cijena zaokružena na desetice je 1330 kn, a cijena zaokružena na stotice je 1300 kn.

Planet	Promjer (km)	Planet	Promjer (km)
Jupiter	143 000	Venera	12 000
Saturn	121 000	Mars	7 000
Uran	51 000	Merkur	5 000
Neptun	50 000	Pluton	2 000
Zemlja	13 000		

- Od Zemlje su veći Jupiter, Saturn, Uran i Neptun. Od Zemlje su manji Venera, Mars, Merkur i Pluton.
 • Da, stali bi i u Jupiter i u Neptun.
 • Da.
 • Najviše satelita ima Saturn. Merkur i Venera nemaju satelita. Zemlja i Pluton imaju jedan satelit, a Mars i Neptun dva satelita.

11. b) Pariz;

Grad	Broj stanovnika	Približan broj stanovnika
Pariz	9 060 000	9 000 000
Moskva	8 720 000	9 000 000
London	7 070 000	7 000 000
Madrid	5 180 000	5 000 000
St. Petersburg	4 840 000	5 000 000
Barcelona	4 750 000	5 000 000
Berlin	3 470 000	3 000 000
Atena	3 070 000	3 000 000
Rim	2 650 000	3 000 000
Kijev	2 630 000	3 000 000

1.8. Zbrajanje prirodnih brojeva

1. 110, 80, 180, 270, 410, 350, 390, 670, 900, 410, 330.
 2. a) 20 g + 50 g ili 30 g + 40 g; b) 10 g + 40 g ili 20 g + 30 g; c) 5 g + 40 g; d) 10 g + 30 g.
 3. 500, 1300, 1300, 2000, 7700, 15 600, 26 500, 51 100, 23 800, 4100, 47 100, 26 900.
 4. 96, 92, 116, 125, 153, 376, 727, 285, 868, 616, 562.
 5. 97, 55, 56, 99, 136, 89, 49, 174, 488, 659, 509, 270.
 6. $b = 10$ cm, $c = 15$ cm.
 7. $b = 6$ cm, $c = 9$ cm.
 8. Luka dolazi kući 25. srpnja.
 9. Beni opet treba k veterinaru 21. veljače.
 10. Procjena: prva lutka: 550 kn, druga lutka: 700 kn, treća lutka: 200 kn. Točan zbroj: prva lutka: 548 kn, druga lutka: 698 kn, treća lutka: 194 kn.
 11. Krive su procjene: $34 + 88 \approx 400$, $77 + 897 \approx 105$.

Zadatak:	Procjena:	Točan rezultat:
$45 + 88$	$\approx 50 + 90 = 140$	133
$56 + 11$	$\approx 60 + 10 = 70$	67
$38 + 35$	$\approx 40 + 40 = 80$	73
$25 + 71$	$\approx 30 + 70 = 100$	96
$32 + 57$	$\approx 30 + 60 = 90$	89
$38 + 83$	$\approx 40 + 80 = 120$	121
$56 + 13$	$\approx 60 + 10 = 70$	69
$123 + 45$	$\approx 120 + 50 = 170$	168

13. a) 60; b) 70; c) 70; d) 60.
 14. a) 12 + 3, jer smo broju 12 pribrojili 3; b) $245 + 6$; c) $514 + 67$; d) $214 + 56$.
 15. a) 2567; b) jednaki su; c) $402 + 32$; d) jednaki su.
 16. a) oko 12. 10.; b) knjigu mora vratiti 17. 10.
 17. a) oko 20. 8.; b) Maja se vraća 20. 8.
 18. 45 987, 36 104, 13 208, 34 310, 14 834, 110 766, 63 504, 68 035, 64 788.
 19. a) Procjena: $\approx 60 + 680 = 740$, točan rezultat: 734, 950, 10 043; b) 10 618, 41 333, 100 217; c) 401, 9699, 826, 1277; d) 442 250, 5 348 571, 74 435.
 20. a) 5615; b) 448.
 21.
$$\begin{array}{r} 3142 \quad 5129 \quad 7074 \quad 45\ 679\ 301 \\ +7103 \quad +1032 \quad +\ 23 \quad +23\ 002\ 335 \\ \hline 10245 \quad 6161 \quad 7097 \quad 68\ 681\ 636 \end{array}$$

 22. U drugom skakanju Matija je preskočio 167 cm, a u trećem 169 cm.
 23. Zagrebačka katedrala visoka je 105 metara.
 24. Knjiga koju Luka čita ima 121 stranicu.
 26. Druge godine stipendija je iznosila 1625 kn. Treće godine stipendija je iznosila 2145 kn. Kroz sve tri godine Marko je dobio 5020 kn.
 27. Lucija je potrošila 2184 kn na opremu.

1.9. Svojstva zbrajanja prirodnih brojeva

1.

+	15	34	39	53	62	77
15	30	49	54	68	77	92
34	49	68	73	87	96	111
39	54	73	78	92	101	116
53	68	87	92	106	115	130
62	77	96	101	115	124	139
77	92	111	116	130	139	154

 2. Zbroj je jednak prvom pribrojniku.
 3. Drugi pribrojnik je 0.
 4. a) 82, 164; b) 67, 102; c) 85, 165; d) 152, 218.
 5. a) otprilike 70 učenika; b) 72.
 6. a) 174, 57; b) 99, 129; c) 150, 102; d) 134, 178; e) 139, 194; f) 209, 228.
 7. b) 140 243 stanovnika.
 8. Majina mama treba platiti 850 kn.
 9. Avion je preletio 16 471 km.

1.10. Oduzimanje prirodnih brojeva

- a) 46, 57, 26, 14; b) 16, 14, 19, 10; c) 41, 42, 24, 91; d) 71, 61, 203, 104; e) 97, 56, 262, 421, 149, 22.
- a) 101, 212, 329, 628; b) 342, 409, 180, 141; c) 99, 881, 381, 762.
- Broj 999.
- Broj 37.
- Broj 11.
- a) Luka nosi tenisice broj 38; b) Ana ima tenisice broj 35; c) Za 10 brojeva.
- $b = 9$ cm, $c = 11$ cm.
- Duljina svakog kraka je 9 cm.
- $b = 17$ cm, $c = 24$ cm.
- Razlika je 230.
- Razlika je 2.
- Do početka filma ima još 32 minute.
- Do početka filma ima još 23 minute.
- Procjena: $\approx 430 - 290 = 140$. Točan rezultat: 143 stranice; 411 stranica; 66 stranica.
- Krive su procjene: $96 - 14 = 40$, $85 - 44 = 100$.
- a) 30; b) 40; c) 30; d) 40.
- a) Drugi zbroj je manji za 5, jer je $16 - 11 = 5$; b) Drugi zbroj za 3; c) Prvi zbroj za 2; d) Drugi zbroj za 5.
- 2848, 12 796, 74 136, 100, 8993, 2908, 42 130, 1988, 4328, 287 898, 232.
- Procjena: $\approx 4800 - 700 = 4300$. Točan rezultat: 4101, 1877, 29 465, 5604, 27 121, 927, 13 765, 32 597, 298, 21 325, 429 346, 50 325 697, 61 279, 6.
- Na dnu grozda je broj 21.
- Matija je na moru proveo 49 dana.
- a) Imao je 76 godina.
- 27 dana.
24. 270 godina.
- Za 77 CD-a.

2735	1400	4568	337	8865	356
- 1450	- 249	- 344	- 215	- 8860	- 250
1285	1151	4224	122	5	106

27.	23687	1900	6781	587742
- 15302	- 564	- 5003	- 139620	
	8385	1336	1778	448122

- Još treba prijeći 86 km.
- Stroj za pranje rublja 281 kn, usisavač 34 kn, televizor 90 kn, lonac 47 kn, tanjuri 16 kn.
- Roman ima 219 stranica.
- Bit će udaljeni 416 km.
- Ostalo mu je 79 kuna. Za majicu mu nedostaje 1 kuna.
- a) Na Zemlji ima više mora; b) oko 150 000 000 km²; c) 148 638 000 km²; d) Sto četrdeset osam milijuna šesto trideset osam tisuća kilometara kvadratnih.

1.11. Svojstva oduzimanja

- Razlika nije prirodan broj u zadacima: a) 12 - 234; b) 303 - 303, 103 - 299; c) 391 - 700, 43 - 121; d) 877 - 877, 877 - 878.
- 9, 12, 25, 0, 44, 1, 448.
- a) 0 - 2; b) 0 - 99, 0 - 56; c) 0 - 0, 0 - 23, 0 - 11; d) 0 - 7, 0 - 2; e) 0 - 41, 0 - 27; f) 0 - 1, 0 - 3.
- a) 0, 0, 0, 0; b) 0, 0, 0, 0.
- a) 0, 9, 0, 0; b) 1, 1, 1; c) 8, 67, 0, 23; d) 5, 0, 14; e) 33, 12, 0; f) 4, 23, 23; g) 0, 11, 2, 0; h) 27, 11, 0, 14, 3, 3.

Popunjena tablica

a	5	25	501	235	1245
b	5	0	501	235	0
a-b	0	25		0	1245

1.12. Zbroj i razlika

- a) 52, 101, 122; b) 280, 174, 100; c) 1, 140, 496.
 - a) 121, 12; b) 145, 24; c) 0, 46, 177; d) 8, 69; e) 46, 31; f) 0, 143, 66; g) 1056, 65.
 - 4.
 - Broj putnika najviše se promijenio u Rijeci. U Crikvenici su izišla 43 putnika.
- | | Zagreb | Karlovac | Severina Kupi | Delnice | Rijeka | Crikvenica |
|-------------------------|--------|----------|---------------|---------|--------|------------|
| ušlo | 47 | 9 | 2 | 16 | 11 | 0 |
| izišlo | 0 | 3 | 4 | 11 | 24 | 43 |
| broj putnika u autobusu | 47 | 53 | 51 | 56 | 43 | 0 |
- a) 3, 2, 14; b) 13, 10, 5; c) 0, 2, 0; d) 4, 7, 9; e) 3, 0, 0, 9.
 - a) 240, 337; b) 95, 444; c) 398, 2149; d) 376, 847.
 - U autobusu je ostao samo vozač.
 - 357.
 - 478.
 - $5 + 4 + 3 - 2 - 1 = 9$; $5 - 4 + 3 - 2 - 1 = 1$; $5 - 4 + 3 + 2 + 1 = 7$.
 - Za zadnji dan mu je ostalo 7 zadataka.
 - a) Luka je potrošio više; b) Preostalo im je 12 kn.
 - Nije dovoljno uštedio. Nedostaje mu 6 €.
 - a) 33; b) 81; c) 1; d) 24; e) 10.
 - a) 40; b) 53; c) 15.
 - a) 94; b) 118; c) 397.
 - a) 48; b) 38.

1.13. Množenje prirodnih brojeva

- a) $4 \cdot 10 = 40$, $5 \cdot 2 = 10$, $5 \cdot 1 = 5$; b) 45, 18, 18; c) 20, 36, 15; d) 28, 28.
- $5 + 5 + 5 + 5 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 10 + 10 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 8 + 8 + 8 + 8 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 6 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, nema, 0 + 0.
- a) $4 \cdot 3 = 12$; b) $5 \cdot 4 = 20$.
- a) 30; b) 99; c) 56; d) 56.
- Ima 30 jabuka, 70 limuna i 20 krušaka.
- a) 35, 54, 24, 25, 36, 35, 50; b) 50, 18, 30, 42, 16, 9, 56; c) 56, 20, 27, 27, 63, 24, 40; d) 28, 36, 100, 36, 7, 48, 12; e) 10, 10, 81, 54, 30, 24, 42, 1, 32, 36, 48.
- Broj 18.
- Broj 22.
- Majina mama ima 44 godine.
- $32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8$, $16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$, $81 = 1 \cdot 81 = 3 \cdot 27 = 9 \cdot 9$, $25 = 1 \cdot 25 = 5 \cdot 5$, $28 = 1 \cdot 28 = 4 \cdot 7 = 2 \cdot 14$, $64 = 1 \cdot 64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16 = 8 \cdot 8$, $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$, $72 = 1 \cdot 72 = 2 \cdot 36 = 4 \cdot 18 = 8 \cdot 9 = 24 \cdot 3 = 6 \cdot 12$, $63 = 1 \cdot 63 = 3 \cdot 21 = 9 \cdot 7$, $15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5$, $90 = 1 \cdot 90 = 2 \cdot 45 = 3 \cdot 30 = 5 \cdot 18 = 6 \cdot 15 = 9 \cdot 10$, $12 = 1 \cdot 12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.
- Broj 40.
- Broj 12; b) Broj 7.
- a) 4900, 230, 244 000, 3 000 000; b) 48 000, 5600, 340 000, 405 000 000; c) 30 000, 2 050 000, 3210, 234 569 990.
- Umnošku dopišemo onoliko nula koliko faktor (dekadska jedinica) ima nula.
- a) 1200, 1000, 16 000, 490, 180; b) 4000, 540, 56 000, 2400, 140; c) 480, 28 000, 1 000 000, 900, 48 000, 8100.
- a) 10 000, 24 000, 81 000, 300 000; b) 80 000, 600 000, 25 000, 320 000;

- c) 180 000, 2 000 000 000, 42 000, 40 000.
- Ana je pojela dvije, a Petar i Luka pojeli su svaki po 6 palačinki. Ostalo je još 6 palačinki.
- Treba joj 55 ruža.
- $b = 10$ cm.
- $b = 12$ cm, $c = 16$ cm.
- a) 540, 320, 240, 560, 80, 640; b) 200, 200, 320, 300, 280, 540; c) 810, 180, 320, 180, 90, 240; d) 120, 480, 630, 60, 120, 150; e) 400, 350, 210, 80, 90, 450.
- Točne procjene su: $32 \cdot 3 \approx 90$, $51 \cdot 7 \approx 350$, $12 \cdot 6 \approx 70$, $5 \cdot 92 \approx 451$, $76 \cdot 4 \approx 300$, $13 \cdot 3 \approx 40$, $62 \cdot 8 \approx 480$, $19 \cdot 9 \approx 180$.
- a) ≈ 160 sati; b) 120 sati.
- a) 1500, 1600, 900, 2700, 1000; b) 1600, 900, 4900, 3000, 1000; c) 2100, 900, 3200, 2700, 2800; d) 3600, 1600, 1500, 5600, 3000; e) 900, 1200, 4000, 7200, 600, 200, 1800.
- a) 320, 3200, 640, 6400, 4000, 3000; b) 12 000, 120 000, 400, 12 000, 15 000, 60 000; c) 32 000, 4800, 15 000.
- a) 1200, 4200, 2400, 1200; b) 1500, 5600, 2400, 900.
- a) Procjena: $\approx 60 \cdot 700 = 42 000$. Točna vrijednost: $37 968$, $\approx 250 000$, $= 225 141$, ≈ 4000 , 5203 , $\approx 12 000$, $= 12 675$; b) 89 001, 100 254, 11 571, 20 412; c) 175 315, 3104, 14 743, 8216; d) 18 315, 20 188, 11 376, 1221; e) 21 008, 57 672, 2163.
- Približno $\approx 150 \cdot 10 = 1500$, točno 1740; približno ≈ 4000 , točno = 4066; približno ≈ 4500 , točno = 4995; približno $\approx 30 000$, točno = 38 280; približno $\approx 600 000$, točno = 542 430; približno $\approx 4 000 000$, točno = 3 892 729.
- a) Za tjedan dana uštedjela bi 98 kn; b) Za mjesec dana uštedjela bi 420 kn; c) Za godinu dana uštedjela bi 5110 kn.
- a) Za jedan dan prođe 1440 minuta; b) Za jedan tjedan prođe 10 080 minuta; c) Za jedan mjesec prođe 43 200 minuta; d) Za jednu godinu prođe 525 600 minuta.
- a) Osoba koja svaki dan ide na kupanje mjesečnom ulaznicom može uštedjeti 50 kn; b) Za najmanje 27 ulazaka.
- a) Pretplatom se može uštedjeti 24 kune; b) Za 10 brojeva.
- Broj 132.
- Broj 918.
- Broj 4060.
- Broj 432; b) Broj 147.
- a) Broj 644; b) Broj 86 523.
- a) Broj 28 944; b) Broj 651; c) Broj 555; d) Broj 28 944.
- Udaljenost od Zemlje do Sunca je približno 150 000 000 km.

Posloži znamenke 5, 6, 7, 8 i 9 na crtice tako da umnožak bude najveći mogući: 965 · 87

1.14. Svojstva množenja prirodnih brojeva

- a) svi rezultati su 0; b) 5, 35, 46, 1, 2, 2399, 254, 2009, 50 991, 19.
- a) 6, 6, 0, 0, 0, 0, 8; b) 8, 0, 0, 0, 0, 0; c) 0, 7, 12, nije prirodan broj, 5, 0, 13.
- a) 3105, 729, 2716, 288; b) 19 320, 190 680, 2 185 248; c) 1 660 126, 25 481 493, 95 815 628, 290 582 050.
- a) 3000, 46 000, 25 000, 72 000, 36 000, 28 000, 1080, 56 000, 2500, 18 000 000, 28 000 000, 280 000; b) 9000, 50 000, 2000, 36 000 000, 210 000, 14 000, 360 000, 540 000 000 000, 8 000 000, 8 000 000 000; c) 120 000, 240 000, 6 000 000, 125 000, 8 000 000, 10 000 000 000, 96 000, 245 000, 960 000, 280 000.

7. 100, 100, 1000.
8. a) 6600, 4500, 45 800; b) 2300, 0, 457 000; c) 290 700, 888 000, 370, 68 200, 30 300.
9. 7800, 245 000, 0, 13 400, 56 000, 4 670 000, 782 000, 90 900, 4 130 000, 7 630 000, 40 980 000, 1 000 000.
10. a) Luka u jednom danu prijeđe 8 km; b) U jednom radnom tjednu prijeđe 40 km.
11. a) Lukina obitelj tjedno troši 56 kn; b) Lukina obitelj godišnje troši 2920 kn.
12. Trgovac je naručio 10 272 komada jabuka.
13. a) Baka ima 27 unuka; b) Na proslavi bilo je najmanje 37 ljudi; c) Bio je jednak broj ruža i svjećica.

1.15. Distributivnost

1. a) 300, 240, 490, 120, 240; b) 400, 270, 320, 150, 630; c) 630, 360, 320, 480, 210; d) 360, 560, 540, 90.
2. a) 224, 680, 255, 296, 198; b) 204, 360, 170, 203, 270; c) 275, 217, 63, 270, 201.
3. 72 h.
4. Pet takvih knjiga ima 325 strana.
5. Pradjed ima 108 godina.
6. Pet šampona stoji 90 kuna.
7. Zaradila je 525 kn.
8. a) Približno $8 \cdot 33 \approx 240$. Točno: 264, 126, 270, 248; b) $92 \cdot 3 \approx 270$. Točno: 276, 891, 704, 539; c) $66 \cdot 6 \approx 420$. Točno: 396, 220, 99, 44.
9. a) $43 \cdot 9 = 387 < 450$, djed nije kupio dovoljno ploča; b) Razmak između ploča trebao bi biti 7 cm.
10. a) 206, 1025, 4545, 2151; b) 288, 2664, 875, 732; c) 1530, 5019, 4527, 4075; d) 3068, 2733, 2520, 1094, 3772.
11. Točni zadaci: $71 \cdot 4 = 284$, $419 \cdot 4 = 1676$.
12. 93, 896, 540, 182, 177, 258, 336, 500, 528, 752, 130.
13. a) 1656, 20 856; b) 986 000, 316 662; c) 0, 84 630; d) 104 006, 610 184.
14. 551.
15. 612.
16. 3100.
17. 3600.
18. 90.
19. 24 900.
20. 429.
21. 29 110.
22. 4400.
24. a) 100; b) 70.
25. a) 480, 990, 180; b) 270, 440, 300; c) 480, 2100.
26. a) 1100, 150; b) 500, 6500; c) 80 400.
27. 280.
28. 301.
29. Ukupno će potrošiti 1630 kuna.
30. a) Manju plaću dobiva novi radnik; b) Vlasnik trgovine svakog tjedna mora izdvojiti 6405 kuna za njihove plaće.
31. Grof Drakula večeru je platio 468 novčića.
32. Gospoda von Stauss platila je 2400 kuna.

1.16. Dijeljenje prirodnih brojeva

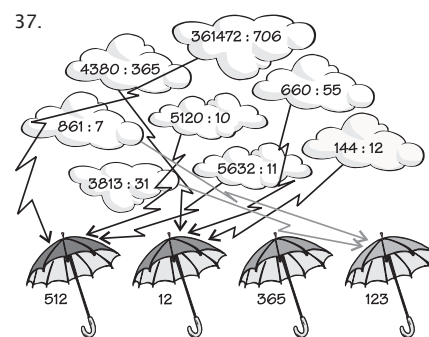
1. a) 25 : 5; b) 60 : 6.
2. a) 7 jer je $7 \cdot 7 = 49$, 5 jer je $3 \cdot 5 = 15$; 3, 10, 4, 9; b) 8 jer je $7 \cdot 8 = 56$; 9, 9, 6, 9, 6; c) 9 jer je $9 \cdot 9 = 81$; 5, 4, 5, 3, 3; d) 20, 1200, 10, 6000, 800; e) 1100, 9000, 10, 2000, 4, 870; f) 2 000 000, 20 000, 20 000.
3. a) 70, 50, 50, 800, 50, 50; b) 40, 80, 90, 900, 300, 300.
4. 3 m.
5. U svakoj grupi će biti 9 učenika.
6. a) 60 cm; b) 40 cm; c) 20 cm; d) 12 cm; e) 10 cm.
7. 36, 18, 12, 9, 6, 4, 1.
8. Broj 25.
9. Broj 6.
10. 10 puta.
11. Broj 7.

12. a) Broj 9; b) Broj 24.
13. a) Broj 40; b) 9 puta.
14. a) Broj 216; b) Broj 42; c) Broj 30; d) Broj 6; e) 6 puta; f) Broj 42.
16. a) 72, 304, 200, 2; b) 2000, 707, 1110, 910.
17. a) 120, 6, 90, 500; b) 40, 4, 50 000, 2; c) 720, 50, 70, 800; d) 200, 6, 60, 5.
18. Duljina jedne stranice tog trokuta je 90 cm.
19. Duljina jedne stranice tog kvadrata je 8 cm.
20. Količnici manji od 20 su 100 : 10, 100 : 25, 100 : 50, 100 : 100.
21. Veći je broj 28 : 4, 36 : 6, 270 : 9, 702 : 2, 297 : 1, 450 : 9.



24. $45 : 6 = 7$ i ostatak 3; $29 : 9 = 3$ i ostatak 2; $38 : 10 = 3$ i ostatak 8; $30 : 6 = 5$ i ostatak 0; $15 : 2 = 7$ i ostatak 1; $75 : 8 = 9$ i ostatak 3; $31 : 5 = 6$ i ostatak 1; $66 : 7 = 9$ i ostatak 3; $97 : 9 = 10$ i ostatak 7; $55 : 7 = 7$ i ostatak 6; $56 : 8 = 7$ i ostatak 0.
25. 79 cm.
26. a) Približno $\approx 9300 : 7 \approx 1300$. Točno: 1326; Približno $\approx 3000, \approx 600, \approx 200$; b) $\approx 5400 : 3 = 1800, \approx 700, \approx 8000, \approx 34 000$; c) $\approx 9000 : 9 = 1000, \approx 41 000, \approx 18 000, \approx 15 000$; d) $\approx 24 000$ jer je $72 : 3 = 24, \approx 90 000, 10 000 000, \approx 7000$; e) $\approx 450 000$ jer je $90 : 2 = 45, \approx 18 000, \approx 4000, \approx 2 400 000, \approx 26 000$.
27. Mama je trebala 26 teglica.
28. Ima 12 redaka.
29. a) 3572 i ostatak 1. Provjera: $3572 \cdot 2 + 1 = 7145$; 643 i ostatak 3. Provjera: $643 \cdot 8 + 3 = 5147$; 1042; 1238; b) 974; 9110 i ostatak 3; 102 714 i ostatak 4; 3229 i ostatak 6; 2068; c) 1863 i ostatak 2; 7883 i ostatak 1; 8635 i ostatak 1; 8982 i ostatak 6; 3024 i ostatak 1.
30. a) ≈ 7 jer je $140 : 2 = 7; \approx 72; \approx 305; \approx 80$; b) ≈ 170 jer je $85 : 5 = 17; \approx 60; \approx 50; \approx 40$; c) ≈ 80 jer je $40 : 5 = 8; \approx 105; \approx 70; \approx 111$; d) $\approx 2800 : 70 = 40; \approx 111; \approx 105; \approx 90 000$; e) $\approx 7000 : 50 = 140; \approx 150; \approx 50; \approx 2$.
31. Luka ima 37 kg.
32. Svaki pobjednik će dobiti 43 000 kn.
33. Lukin sat rada iznosi 35 kn, a Markov 42 kn. Marko je bolje plaćen po satu rada.
35. $13536 : 24 = 564$ $7332 : 47 = 156$
 $\begin{array}{r} 13536 : 24 = 564 \\ -120 \\ 153 \\ -144 \\ 96 \\ -96 \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{r} 7332 : 47 = 156 \\ -47 \\ 263 \\ -235 \\ 282 \\ -282 \\ 0 \end{array}$

36. $216 : 22 = 9$ $915 : 6 = 152$
 $\begin{array}{r} 216 : 22 = 9 \\ -198 \\ 28 \end{array}$ $\begin{array}{r} 915 : 6 = 152 \\ -6 \\ 31 \\ -30 \\ 15 \\ -12 \\ 3 \end{array}$
- $700 : 25 = 28$
 $\begin{array}{r} 700 : 25 = 28 \\ -50 \\ 200 \\ -200 \\ 0 \end{array}$



- 37.
38. Sahara je 150 puta veća od Hrvatske.
39. 12 minuta i 40 sekundi.
40. Svaki učenik je trebao platiti 36 kn za izlet.
41. a) Jer je $400 : 200 = 2$, a $600 : 200 = 3$, rješenje je između 2 i 3; $\approx 420 : 30 = 14; \approx 8; \approx 8$; b) $\approx 4900 : 70 = 70; \approx 110; \approx 5; \approx 5$; c) ≈ 5 ; između 4 i 5; $\approx 80, \approx 1$; d) $\approx 4200 : 700 = 6; \approx 5; \approx 50$; $\approx 3000 : 600 = 5; \approx 5$; e) $\approx 6; \approx 3500; \approx 10; \approx 1; \approx 14$.

1.17. Svojstva dijeljenja prirodnih brojeva

1. To znači da ako djeljeniku i djeljitelju zamijenimo mjesta, nećemo dobiti jednak količnik.
2. Ako brojeve koje dijelimo združimo na različite načine, nećemo dobiti isti rezultat.
3. S nulom se ne dijeli. 0: a = 0.
4. a) $48 : (6 : 2) = 48 : 3 = 16$, $(48 : 6) : 2 = 8 : 2 = 4$; b) $(35 : 5) : 7 = 7 : 7 = 1$, $35 : (5 : 7) = 7$ nije prirodan broj; c) $(100 : 2) : 2 = 25$, $100 : (2 : 2) = 100$; d) 4, 16.
5. a) NE, 0, NE, 0, 0, NE, NE, 0; b) 0, NE, NE, 0, NE, 0, 0.
6. a) svi rezultati su 1; b) 1, 1, NE, 1.
7. a) 25, 5, 5, 0, 0, NE, 0; b) 0, 0, 5, 5, 5, nije prirodan broj; c) 1, 1, 45 369, 9, NE, 1, 81; d) 0, 204, 1836, 1, 374 544, 612; e) 612, 612, 0, 0, 0.
8. a) NE, 0, NE, NE, NE, 0, NE, 0; b) NE, 0, NE, 0, NE, 0, NE, 0, NE; c) NE, 0, 0, NE, 0, 0, NE, NE.
9. a) 0, 0, 0, 1, 0, 1, NE; b) 0, 8, 0, NE, 27, 0, 1; c) 0, 5, 0, 0, 12, 12, 1; d) 4, 0, 4, 23, 23, 0, 0.

1.18. Povezivanje računskih operacija

1. a) 33, 44, 28, 22, 33; b) 1, 12, 30, 2, 10; c) 0, 18, 7, 8, 35, 8; d) 14, 12, 67, 3, 30, 8.
2. a) 39, 0, 3, 17, 2; b) 2, 2, 33, 18, 16.
3. a) 194, 731, 9; b) 11 022, 726; c) 14, 691; d) 4048, 246, 266.
4. $3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 4 + 2 = 16$. Maja je za proslavu rođendana pripremila 16 litara.
5. a) Kupila je 5 kg mesa; b) Potrošila je 274 kn.
6. $4 + 4 + 4 = 12$ ili $4 \cdot 4 - 4 = 12$; $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$; $4 + 4 - 4 = 4$.
7. a) 9; b) 11; c) 8; d) 6; e) 10 i ostatak 1.
8. a) 55; b) 7; c) 97; d) 0; e) 13; f) 49; g) 7.
9. $(15 + 15) : 3 - 1 = 9$, $(15 + 15 : 3) - 1 = 19$.
10. 328.
11. 149.
12. 16.
13. 10.
14. 7.
15. 36.
16. a) $4 + 4 \cdot (4 - 4) = 4$; b) $(4 + 4) \cdot 4 - 4 = 28$; c) $4 + 4 \cdot 4 - 4 = 16$; d) $(4 + 4) \cdot (4 - 4) = 0$.
17. Svatko treba dati 30 kn za autobus.
18. a) Blagajnik treba sakupiti 414 kuna; b) U razredu su 32 učenika.
19. 3813.
20. a) 20; b) 46; c) 29.
21. a) 0; b) 9; c) 10.

1.19. Ponavljanje

Zadaci za ponavljanje:

- 999 998. 2. 1023 i 9876. 3. 16.
- a) 60, 51, 15, 42, 24, 33;
b) 600, 501, 510, 150, 105, 420, 402, 240, 204, 303, 330, 222.
- 76 cm, 77 cm i 78 cm.
- 55 cm, 57 cm, 59 cm.
- a)
- b)
- c)
- 2 < 27, 48 > 44, 5 < 55, 23 = 23, 0 < 12, 34 > 26, 32 < 302, 44 < 444.
- 9, 63, 112, 401, 402, 411, 479, 737, 807, 821.
- a)
- x = 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59.
- a) 410, 310, 710, 5620, 1400, 2680, 45 510, 570, 1010, 3260; b) 400, 300, 700, 5600, 1400, 2700, 45 500, 600, 1000, 3300; c) 400, 300, 700, 6000, 1000, 3000, 50 000, 600, 1000, 3000.
- a) 748; b) 9217; c) 4123; d) 3754; e) 1682; f) 25 141.
- a) 7070; b) 2917; c) 421; d) 22; e) 2636; f) 4925.
- Luka je složio sliku za 47 minuta, a Matija za 25 minuta.
- a) 733; b) 195; c) 38; d) 89; e) 183; f) 70.
- Stranice trokuta su 210 cm, 211 cm i 212 cm, a opseg je 633 cm.
- a) 84; b) 432; c) 2435; d) 4186; e) 4896; f) 129 425.
- a) 7; b) 26; c) 3400; d) 45; e) 369; f) 275.
- a) 1; b) 9; c) 10; d) 9; e) 35; f) 262.
- Za sladoled su morali platiti 32 kune.
- a) 41 760; b) 40 320.
- a) 70 kuna tjedno; b) 310 kuna u mjesecu siječnju.
- U svakoj grupi će biti 8 učenika.
- Veća je od Hrvatske 150 puta.
- a) 11; b) 61; c) 82; d) 371.
- a) 98; b) 10; c) 20; d) 5410; e) 253; f) 16.

Primjerak oglednog testa:

- 45 > 1, 12 < 13, 880 = 880, 0 < 5001.
- a) 128 000; b) 9 056; c) 144; d) 3 074.
- a) 42 875; b) 3 440; c) 4 698; d) 441.
- Duljine stranica su 33 cm, 34 cm i 35 cm.
- a)
- b)
- Ostatak je 5.
- Točni su računi:
b) $12 + 8 : 4 - 3 = 12 + 2 - 3 = 11$;
c) $16 - 2 \cdot (15 - 9) = 16 - 2 \cdot 6 = 16 - 12 = 4$;
f) $8 \cdot 25 \cdot 60 : 4 + 1 = 480 \cdot 100 + 1 = 48 000 + 1 = 48 001$.
- a) 230 ovaca i 720 koza; b) 200 ovaca i 700 koza; c) 949 ovaca i koza.
- Matija ima 340 sličica.
- Uštedjela je 740 kuna, što je dovoljno za bicikl.
- Za 54 337.

Riješi i zabavi se!

- a) $16 : (4 + 4) - 2 = 0$; b) bez zagrada;
c) $(5 + 15) \cdot 4 = 80$; d) $14 : 2 \cdot (1 + 5) = 42$;

- $(16 - 12) : 4 + 3 : 3 = 2$;
- $100 : (10 \cdot 10) + 100 = 101$.
- a) da; b) ne; c) da.

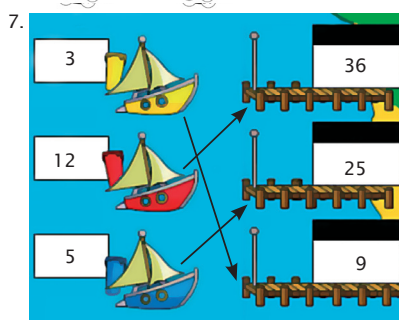
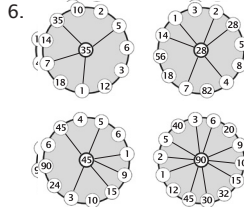
1	5	0		7
6	0		4	5
3	0	7	0	0
8		2	5	6
4	0	0	0	

- Četiri četvorke:
 $1 = 4 : 44$ ili
 $1 = 4 : 4 + 4 - 4$;
 $2 = 4 : 4 + 4 : 4$;
 $3 = (4 + 4 + 4) : 4$;
 $4 = (4 - 4) \cdot 4 + 4$;
 $5 = (4 \cdot 4 + 4) : 4$;
 $6 = (4 + 4) : 4 + 4$;
 $7 = 4 + 4 - 4 : 4$;
 $8 = 4 \cdot (4 + 4) : 4$;
 $9 = 4 + 4 + 4 : 4$.
- a) 156; b) 45100; c) 118; d) 56000; e) 43000.
- $12 : 4 + 2 \cdot 1 - 3 = 2$; $12 \cdot 4 - 2 : 1 + 3 = 49$;
 $12 \cdot 4 + 2 : 1 - 3 = 47$; $12 - 4 : 2 + 1 \cdot 3 = 13$;
 $12 + 4 : 2 - 1 \cdot 3 = 11$.

2. Djeljivost prirodnih brojeva

2.1. Višekratnici

- a) 1 i 2; b) 1, 2, 3 i 6.
- 2, 16, 8, 24, 100, 40.
- 12, 24, 36, 48.
- Višekratnici broja 10 nisu: 1, 2, 5, 101.
- NE, DA, NE, NE, DA, NE, NE, DA, DA, NE.



- Primjerice: a) 19, 38, 57, 190; b) 40, 80, 120, 400; c) 65, 130, 195, 260; d) 133, 266, 399, 1330; e) 871, 1742, 8710, 87 100; f) 2009, 4018, 6027, 20 090.
- a) 54, 27, 48 i 60; b) 54, 19, 35, 27, 48 i 60; c) 35 i 60; d) 60; e) 54 i 27; f) 48 i 60.
- 25.
144. Najveći višekratnik od 144 ne postoji.
314. Najveći višekratnik od 314 ne postoji.
- Vlak može biti dug 14, 21, 28, 35, 42, 49 ili 56 cm.
- a)

Bombonijera	Komada	Bombonijera	Komada
1	28	6	168
2	56	7	196
3	84	8	224
4	112	9	252
5	140	10	280

b) Ako želimo 80 čokoladnih bombona moramo kupiti 3 bombonijere. Ako želimo 150 čokoladnih bombona moramo kupiti 6 bombonijera.

- Ovu količinu jaja možemo upakirati u kutije od 12, 15, 16 i 24 komada jaja.
- a) 17, 34; b) 34, 51, 68, 85; c) 221.
- U kamionu može biti 320, 330 ili 340 komada jaja.
- Luka može imati 360, 372, 384 ili 396 CD-ova.
- Ne nalazi.
- Da, broj 825.
- Može složiti punih 14 ili 15 polica.
Objašnjenje: Ako knjiga ima 416, 417, 418 ili 419, onda će knjižničar složiti 14 punih polica i započeti puniti petnaestu policu, ali je neće popuniti do kraja. Ako ima 420 knjiga, knjižničar će popuniti točno 15 polica. Ako ima 421 ili 422 knjige, knjižničar će popuniti 15 polica, te započeti puniti i šesnaestu.

2.2. Djelitelji

- 1, 2, 7, 14.
- 2, 5, 10, 1, 20, 100, 50, 25.
- Djelitelji broja 15 nisu: 2, 10, 30, 290.
- Broj 1.
- NE, DA, DA, NE, NE, DA, DA, NE.
- DA, DA, DA, DA, NE, DA, DA, NE.
- a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 30, 60;
b) 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90;
c) 1, 2, 4, 19, 38, 76.
- a) 1, 3, 5, 15;
b) 1, 3, 9; c) 1, 11; d) 1, 2, 4, 5, 10, 20;
e) 1, 3, 5, 15, 25, 75; f) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100; g) 1, 3, 5, 9, 15, 45.
- a) 1, 5, 25; b) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42;
c) 1, 3, 9, 27, 81;
d) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100, 200;
e) 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80.
- Čokolada može imati 1, 2, 3, 6, 9 ili 18 redaka.
- Čokolada može imati 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ili 30 redaka.
- Blagajnica mu može vratiti:

1 kuna	2 kune	5 kuna	1 kuna	2 kune	5 kuna
10	0	0	0	5	0
8	1	0	0	0	2
6	2	0	5	0	1
4	3	0	3	1	1
2	4	0	1	2	1

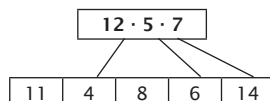
1 kuna	2 kune	5 kuna
16	0	0
14	1	0
12	2	0
10	3	0
8	4	0
6	5	0
4	6	0
2	7	0
0	8	0
1	0	3
6	0	2
4	1	2
2	2	2
0	3	2
1	5	1
3	4	1
5	3	1
7	2	1
9	1	1
11	0	1

2.3. Djeljivost zbroja i razlike

- a) 1, 2, 3, 4, 6, 12; b) 1, 2, 3, 6; c) 1, 17; d) 1, 3; e) 1, 2; f) 1, 5.
- a) 1, 5, 25; b) 1, 2; c) 1, 2, 4, 5, 10, 20; d) 1, 2, 4, 8.
- a) 1, 5; b) 1, 2; c) 1, 2, 4, 8; d) 1, 7.
- a) 1, 7; b) 1, 5; c) 1, 2, 4, 8.
- Zbroj u računu bi morao biti djeljiv s 10.
- Jer je cijena jedne olovke 18 kuna, ukupni iznos bi trebao biti djeljiv s 2, a nije.
- Bilo koji neparni broj, na primjer 1.
- Broj 2.
- Brojeve 1, 10, 19, 28, 37, 46. Ima ih 6.
- Primjerice: $84 = 70 + 14$; $174 = 180 - 6$; $48 = 30 + 18$; $75 = 60 + 15$; $102 = 90 + 12$; $84 = 60 + 24$; $728 = 700 + 28$.
- Dovoljno je da postoji bar jedan rastav u kojem su oba pribrojnika djeljiva sa 4. (Na primjer, $40 + 24$). Nisu svi rastavi takvi.
- Promet od dnevnih novina nije mogao iznositi 83 kn (utorak), 68 kn (četvrtak) i 56 kn (nedjelja), jer ti brojevi nisu djeljivi sa 6.
- a) Ponedjeljkom, srijedom i četvrtkom se svi bomboni mogu raspodijeliti u paketiće bez ostatka; b) Utorkom ostane 5 bombona, a petkom 10 bombona.

2.4. Djeljivost umnoška

- S brojevima 1, 2, 3, 6, 9 i 18.
- a) DA; b) NE; c) DA; d) DA; e) DA; f) DA; g) NE.
- a) NE; b) DA; c) DA; d) DA; e) NE.
- a) NE; b) DA; c) NE; d) DA; e) NE; f) DA.
- a) DA; b) DA; c) DA; d) DA.
- a) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42; b) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60; c) 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42; d) 1, 2, 4, 11, 22, 44; e) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
- Manje kutije mogu biti sa 1, 2, 5, 10 ili 25 jaja.



2.5. Djeljivost s 10, 5 i 2

- 250, 10, 500, 2000, 880, 450, 100 000, 20 000.
- 100, 2500, 4000, 200, 6000, 5 000 000.
- S 10 su djeljivi brojevi: 40, 5000, 700, 20, 400, 100, 10, 2020, 2200, 310, 9000, 5 000 000, 40 000, 5090, 60, 800, 1000. Sa 100 su djeljivi brojevi: 5000, 700, 400, 100, 2200, 9000, 5 000 000, 40 000, 800, 1000.
- 5700, 5800, 5900, 6000, 6100, 6200, 6300, 6400, 6500, 6600, 6700.

broj	Prvi manji djeljiv s 10	broj	Prvi manji djeljiv s 10
456	450	999	990
467	460	327	320
321	320	342	340
10 001	10 000	123	120

Prvi manji djeljiv sa 100	broj	Prvi veći djeljiv sa 100
300	324	400
0	22	100
100	156	200
200	209	300
3600	3648	3700

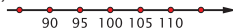
100	122	200
700	779	800
14 400	14 456	14 500

- b) Prirodan broj je djeljiv s 1000 ako završava s tri nule.
- Prirodan broj je djeljiv s 10 000 ako završava s četiri nule. Primjerice: 20 000, 50 000, 140 000, 660 000 itd.
- Primjerice, 2 000 000, 9 000 000, 25 000 000... Prirodan broj je djeljiv s milijun ako završava sa šest nula.
- Točno je: b) Ako je broj djeljiv sa 100, onda je djeljiv i s 10; jer je 100 djeljivo s 10.
- Višekratnici broja 5 su: 110, 545, 100, 25, 5, 10, 1000, 1010.
- S brojem 5 nisu djeljivi: 32, 1, 2, 54.
- Najveći: 95, najmanji: 10.
- Najveći: 9 999 995, najmanji 1 000 000.
- Na primjer: 1000, 2005, 5555, 9990, 4775, 4770.

djeljivi s 5	djeljivi s 10	djeljivi sa 100	djeljivi sa 1000
45	450	4500	2000
450	4500	2000	2 000 000
4500	320	900	80 000
320	10	2 000 000	600 000
5	2000	100	
10	900	80 000	
2000	2 000 000	600 000	
900	410		
2 000 000	100		
410	80 000		
255	600 000		
75			
100			
80 000			
600 000			

Neki se brojevi pojavljuju u više stupaca jer oni koji su djeljivi s 1000 djeljivi su i sa svim ostalim brojevima. Naime, broj 1000 je višekratnik brojeva 100, 10 i 5. Broj 100 je višekratnik od 10 i 5, a broj 10 je višekratnik od 5.

- 305, 350, 530.
- a) 6405, 6450, 6540, 6045, 4650, 4605, 4560, 4065, 5640, 5460; b) 6450, 6540, 4650, 4560, 5640, 5460.
- 90, 95, 100, 105, 110.



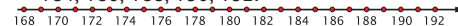
broj	Prvi veći djeljiv s 5	broj	Prvi veći djeljiv s 5
301	305	327	330
484	485	342	345
321	325	123	125
10 001	10 005	654	655
999	1000		

- Točna je rečenica: b) Ako je broj djeljiv s 10, onda je djeljiv i s 5; jer je 10 djeljivo s 5.
- Točne su rečenice b), c) i d).
- Parni brojevi: 346, 110, 108, 136, 1000, 1014.
- Nisu djeljivi s 2: 15, 17, 1, 777, 16 773, 1765.
- a) 45, 450, 5, 10, 2000, 70 000, 410, 505, 75, 100, 600 000; b) 450, 10, 2000, 70 000, 410, 100, 600 000; c) 2000, 70 000, 100, 600 000; d) 450, 452, 328, 10, 2000, 906, 70 000, 410, 254, 100, 80 008, 600 000.
- 100 i 998.
- a) Najmanji dvoznamenkasti broj djeljiv s 2 je 10. Najmanji dvoznamenkasti broj djeljiv s 5 je 10. Oni su jednaki. b) Najveći

dvoznamenkasti broj djeljiv sa 2 je 98.

Najveći dvoznamenkasti broj djeljiv s 5 je 95. Vrijedi da je $98 > 95$.

- a) 508, 580 i 850; b) 580, 850, 805; c) 580 i 850.
- U prazninu se mogu umetnuti znamenke: a) 0, 2, 4, 6, 8; b) 0, 5; c) 0.
- a) U prazninu se mogu umetnuti znamenke 2, 4, 6, 8; b) U prazninu se može umetnuti znamenka 5.
- 168, 170, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 186, 188, 190, 192.
- Točne su rečenice b) i d).



2.6. Djeljivost s 3 i 9

Broj	Zbroj znamenaka	Je li broj djeljiv sa 3?
395	17	ne
375	15	da
459	18	da
5789	29	ne
437	14	ne
1023	6	da
351	9	da
49 807	28	ne
444	12	da
57 108	21	da
123 456	21	da

- S 3 su djeljivi: 390, 102, 2508, 4446, 207, 6000, 3, 45.
- Primjerice: 246, 912.
- Primjerice: 10 002, 33 333, 60 606.
- Primjerice: 9 876 540.
- 432 ili 435 ili 438; 501 ili 531 ili 561 ili 591; 90 ili 93 ili 96 ili 99; 516 ili 546 ili 576; 23652 ili 23655 ili 23658; 21 ili 24 ili 27; 4186521 ili 4486521 ili 4786521.
- Nedostajati bi mogla znamenka 2 ili 5 ili 8. Ako su roditelji platili 1278 kn, jedan stolac stoji 426 kn. Ako su platili 1578 kn, jedan stolac stoji 526 kn, a ako su platili 1878 kn, jedan stolac stoji 626 kn.
- Luka je u pravu. Do odgovora je brzo došao zbrajajući znamenke brojeva. Beni je odabrao najveći četveroznamenkati broj djeljiv s 3, ali to i tako nije bitno, ako svi bomboni ostanu njemu.

Broj	232	8011	7776	1023
Zbroj znamenaka	7	10	27	6
Je li djeljiv s 9?	NE	NE	DA	NE

Broj	8290	33 5602	558	90 326
Zbroj znamenaka	19	19	18	20
Je li djeljiv s 9?	NE	NE	DA	NE

- 324, 90 009, 1431, 5058, 9297, 4041, 9, 18.
 - 216, 981, 90 ili 99, 486, 23 652, 36, 423 333.
 - Primjerice: a) 18, 27, ...; b) 513; c) 1305; d) 12 609.
 - a) Na prazno mjesto dolazi broj 1; b) Jedno računalo stoji 5123 kune.
 - Primjerice: a) 15, 45, ...; b) 30, 60, ...; c) 18, 36, ...; d) 90, 180, 270, ...
 - a) Primjerice: 510; b) Takav broj ne postoji. Svi brojevi koji su djeljivi s 9 djeljivi su i s 3.
 - a) 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99; b) 63, 72, 81, 90, 99.
- Više ima brojeva djeljivih s 3, jer su među njima i svi oni djeljivi s 9.

17. a) sve znamenke; b) 0, 2, 4, 6, 8; c) 0, 3, 6, 9; d) 0, 5; e) 6; f) 0.
18. Broj 111. 19. Broj 111 111 111.
20. Broj 333. 21. 1002; 9999.
22. 1005.

2.7. Prosti i složeni brojevi

1. Broj:	43	54	65	76	87	57	13	2	22
Djelitelji:	1, 43	1, 2, 3, 6, 9, 18, 27, 54	1, 5, 13, 65	1, 2, 4, 19, 38, 76	1, 3, 29, 87	1, 3, 19, 57	1, 13	1, 2	1, 2, 11, 22
Je li prost?	da	ne	ne	ne	ne	ne	da	da	ne

2. 29, 2, 97, 43, 83.
3. Prosti brojevi su: 3, 23, 29, 31, 11, 2, 13.

4. Broj:	Djelitelji	Je li prost:
67	1, 67	da
18	1, 2, 3, 6, 9, 18	ne
99	1, 3, 9, 11, 33, 99	ne
40	1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40	ne
102	1, 2, 3, 6, 17, 34, 51, 102	ne
201	1, 3, 67, 201	ne
67	1, 67	da
49	1, 7, 49	ne
22	1, 2, 11, 22	ne
1	1	ne
15	1, 3, 5, 15	ne
3	1, 3	da
11	1, 11	da
111	1, 3, 37, 111	ne
1111	1, 11, 101, 1111	ne

5. Broj 22 je djeljiv sa 2, 45 je djeljiv s 5 i 9, 130 je djeljiv s 10, 297 je djeljiv s 9 i 3, 27 je djeljiv s 9 i 3, 406 je djeljiv s 2, 555 je djeljiv s 5, 72 je djeljiv s 9 i 3, 28 je djeljiv s 2.
6. a) 11, 13, 17, 19, 23, 29; b) 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131.
7. Djelitelji od 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 i 36. Prosti djelitelji su: 2 i 3.
8. Djelitelji od 90: 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15, 18, 30, 45, 90. Prosti djelitelji su: 2, 3 i 5.
9. Složen: $91 = 13 \cdot 7$.
10. Jer su svi ostali parni brojevi djeljivi s 2, pa nisu prosti.
11. Najmanji neparan prost broj je 3, a najveći ne postoji.
12. Najmanji 11, najveći 97.
13. Najmanji: 101, najveći troznamenkast prost broj: 997.
14. Brojevi 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, ...
15. Brojevi 2 i 3. Više ih nema, jer ako je razlika dva broja jednaka 1, jedan od njih mora biti paran.
16. Brojevi 12 i 18.
17. 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, 29 i 31, 41 i 43, 59 i 61, 71 i 73, 101 i 103, 107 i 109.
20. Samo 2 i 3, jer od dva uzastopna prirodna broja jedan je uvijek paran.
21. Umnožak dvaju prostih brojeva je složen broj, jer je djeljiv s oba ta prosta broja. Na primjer: $2 \cdot 3 = 6$. Broj 6 je složen broj, a on je umnožak dva prosta broja.

2.8. Rastavljanje na proste faktore

1. $34 = 2 \cdot 17$, $22 = 2 \cdot 11$, $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, 13 je prost broj pa se ne može više rastaviti, $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$.
2. $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, $99 = 3 \cdot 3 \cdot 11$, $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$.
3. $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, $65 = 5 \cdot 13$, $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$, $87 = 3 \cdot 29$.
4. $10 = 2 \cdot 5$, $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $10\,000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.
5. $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $700 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.
6. $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $27 = 3 \cdot 3 \cdot 3$, $625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $216 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.
7. $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$, $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $8100 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $444 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$, $5050 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 101$, $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, $900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$, $78\,125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$.
8. $8000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $60\,025 = 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, $99\,099 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 13$, $40\,500 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, $102\,400 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.
9. a) 5; b) 3; c) 7; d) 17.
10. Svi ovi brojevi su prosti, i ne mogu se više rastaviti.
11. $9 = 3 \cdot 3$, $25 = 5 \cdot 5$, $49 = 7 \cdot 7$, $121 = 11 \cdot 11$. Ovi se brojevi daju rastaviti na dva jednaka prosta faktora.
12. $45 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2$, $9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$, $3 \cdot 10 \cdot 3 = 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3$.
13. $242 = 2 \cdot 11 \cdot 11$, $2002 = 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $247 = 13 \cdot 19$, $2873 = 13 \cdot 13 \cdot 17$.
14. $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, djelitelji: 1, 2, 4, 8, 16, 32; $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, djelitelji: 1, 2, 3, 4, 6, 12, 18, 36; $38 = 2 \cdot 19$, djelitelji: 1, 2, 19, 38; $40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, djelitelji: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40; $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, djelitelji: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42.
15. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, djelitelji: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
16. $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, djelitelji: 1, 3, 9, 27, 81.
17. $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$, djelitelji: 1, 2, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 36, 72.
18. a) $420 : 7 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$; b) $420 : 4 = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$; c) 15; d) 30; e) 28; f) 12.
19. $504 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$; a) $504 : 8 = 3 \cdot 3 \cdot 7 = 63$; b) 14; c) 24; d) 6.
20. $2592 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; a) da; b) da; c) da.
21. Zamislila sam broj 2187.
22. Zamislio sam broj 27 500.
23. a) 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361; b) 8, 27, 125, 343; c) 16, 81; d) 32, 243.
24. $343 = 7 \cdot 7 \cdot 7$.
25. Primjerice: 60, 120, 180, ... Najmanji takav broj je 60.

2.9. Najveći zajednički djelitelj

1. a) 1, 5; b) 1, 3 i 9; c) 1, 2, 7 i 14; d) 1, 2, 5 i 10; e) 1, 3 i 9.

2. 1, 2, 3, 4, 6 i 12; 1, 3 i 9; 1 i 11; 1, 2, 7 i 14.
3. Zajednički djelitelj u svim ovim zadacima je samo broj 1. Brojevi su relativno prosti.
4. 1, 2 i 4; 1 i 5; 1, 3, 5 i 15.
5. Relativno prosti su brojevi: a) 12 i 11; c) 12 i 25.
6. Jedinčna dužina može biti duljine 1 cm, 2 cm, 5 cm ili 10 cm.
7. Duljina jedne "kockice" može biti 1 cm, 2 cm, 3 cm ili 6 cm.
8. Duljina jedne pločice može biti 1 cm ili 2 cm.
9. Na primjer: 3, 9, 7, 21, 11, 33, ...
10. $D(10, 15) = 5$, $D(27, 18) = 9$, $D(65, 42) = 1$, $D(100, 150) = 50$, $D(33, 220) = 11$.
11. a) $D(18, 27) = 9$, $D(14, 21) = 7$, $D(64, 44) = 4$; b) $D(50, 75) = 25$, $D(12, 20) = 4$, $D(60, 75) = 15$.

8 i 10	4
16 i 4	2
15 i 25	5

12. 13. Najmanji djelitelj je broj 1, $D(45, 60) = 15$.
14. a) $D(6, 4) = 2$; b) $D(8, 10) = 2$; c) $D(4, 8) = 4$; d) $D(10, 15) = 5$; e) $D(8, 12) = 4$; f) $D(12, 4) = 4$; g) $D(8, 5) = 1$; h) $D(2, 10) = 2$; i) $D(8, 6) = 2$.
15. a) $D(682, 2552) = 22$; $D(25\,000, 7500) = 2500$; b) $D(4096, 20\,000) = 32$; $D(1296, 5832) = 648$.
16. a) $D(13, 14) = 1$; b) $D(15, 16) = 1$; c) $D(22, 45) = 1$. To su relativno prosti brojevi.
17. a) $D(10, 20) = 10$; b) $D(3, 33) = 3$; c) $D(15, 60) = 15$; d) $D(100, 1500) = 100$; e) $D(32, 128) = 32$. Ako je a djelitelj od b , onda je $D(a, b) = a$.
18. Ti dijelovi mogu biti dugi 1 m, 3 m, 5 m, 9 m, 15 m ili 45 m. Platno ćemo najmanje rezati ako izrežemo dijelove od 45 m.
19. Duljina svake ploče će biti 60 cm.
20. Duljina svake ploče će biti 130 cm.
21. 4, 12, 20, 28, 36, ...; 2, 3, 4, 6, 7, ... (sve koji nisu djeljivi s 5); 4, 8, 12, ... (višekratnike broja 4); 9, 18, 36, 45, ... (sve koji su djeljivi s 9, ali nisu djeljivi s 27).
22. Broj a je višekratnik broja 12.
23. Broj a je djelitelj broja 12.
24. Primjerice: a) $\odot = 10$, $\odot = 4$; b) $\odot = 36$, $\odot = 60$; c) $\odot = 15$, $\odot = 14$; d) $\odot = 300$, $\odot = 600$; e) $\odot = 78$, $\odot = 117$; f) $\odot = 4$, $\odot = 8$.
37. Najviše se može igrati 5 prijatelja, i svaki će dobiti 4 crvene, 6 žutih i 9 plavih pikula.
25. a) U bocu za prodaju može stati 1, 2, 3, 4, 6 ili 12 litara; b) 12 litara.
26. a) Kolači mogu biti veličine 1 cm, 2 cm, 4 cm, 7 cm, 8 cm, 14 cm, 28 cm ili 56 cm; b) 4 cm, 7 cm ili 8 cm.
27. Duljina stranica svake pločice će biti 70 cm.
28. a) $D(45, 60, 150) = 15$; b) $D(20, 30, 90) = 10$; c) $D(16, 20, 36) = 4$.
29. a) $D(45, 54, 126) = 9$; b) $D(90, 140, 250) = 10$; c) $D(160, 440, 1000) = 40$.
30. a) 90; b) 1; c) 10.
31. a) 50; b) 25; c) 44; d) 7.
32. a) 12; b) 4.
33. a) 9; b) 30; c) 70; d) 8.
34. Debljina svakog odrezanog komada biti će 4 cm.
35. Najveća duljina tih dijelova je 72 cm.
36. Najveća duljina jedne "kockice" može biti 3 cm.
37. Najviše se može igrati 5 prijatelja, i svaki će dobiti 4 crvene, 6 žutih i 9 plavih pikula.

2.10. Najmanji zajednički višekratnik

1. 18, 36.
2. a) 120, 240, 360, ...; b) 90, 180, 270, ...; c) 100, 200, 300, ...; d) 120, 240, 360, ...; e) 300, 600, 900, ...

8 i 10	60, 120, 180 ...
16 i 4	40, 80, 120 ...
20 i 30	16, 32, 48 ...

4. a) 24, 48, 72, ...; b) 45, 90, 135, ...;
c) 33, 66, 99, ...; d) 70, 140, 210, ...
5. a) 30, 60, 90, ...; b) 56, 112, 168, ...;
c) 99, 198, 297, ...; d) 36, 72, 108, ...
6. Primjerice: Zajednički višekratnici relativno prostih brojeva 2 i 3 su 6, 12, 18, 24, ...
7. a) 120, 30, 72, 36; b) 120, 30; c) 120, 30.
8. a) 30, 60, 90, ...; b) 30, 60, 90, ...; c) 120, 240, 360, ...
9. a) 120, 240, 360, ...; b) 450, 900, 1350, ...;
c) 180, 360, 540, ...
10. a) Tornjevi će biti visoki 30 cm;
b) U Ivanovom tornju će biti 15 kocaka, u Majinom 10 kocaka, a u Lukinom 6 kocaka.
11. a) $V(10, 15) = 30$; b) $V(27, 18) = 54$;
c) $V(65, 42) = 2730$; d) $V(100, 150) = 300$.
12. a) $V(18, 27) = 54$, $V(14, 21) = 42$, $V(66, 44) = 132$;
b) $V(50, 75) = 150$, $V(12, 20) = 60$, $V(60, 75) = 300$.

8 i 10	75
16 i 4	40
15 i 25	16

13. 14. Najmanji višekratnik zadanih brojeva je $V(4, 6) = 12$, njihov najveći višekratnik ne postoji.
15. a) 12; b) 40; c) 8; d) 30; e) 24; f) 12; g) 40; h) 10; i) 24.
16. a) $D(7, 5) = 1$, $V(7, 5) = 35$; b) $D(6, 3) = 3$, $V(6, 3) = 6$; c) $D(10, 12) = 2$, $V(10, 12) = 60$;
d) $D(12, 18) = 6$, $V(12, 18) = 36$;
e) $D(25, 35) = 5$, $V(25, 35) = 175$;
f) $D(9, 12) = 3$, $V(9, 12) = 36$;
g) $D(14, 21) = 7$, $V(14, 21) = 42$;
h) $D(24, 16) = 8$, $V(24, 16) = 48$;
i) $D(4, 5) = 1$, $V(4, 5) = 20$.
17. a) 1800; b) 75 000; c) 2156; d) 420.
18. a) $V(3, 4) = 12$; b) $V(15, 16) = 240$;
c) $V(2, 5) = 10$. To su relativno prosti brojevi.
19. Svaki dio torte od jagoda treba podijeliti na jednaka 4 dijela, a svaki dio torte od banana na tri jednaka dijela. Tako će svaka torta biti podijeljena na 12 jednakih komada.
20. a) Brži je prvi biciklist; b) Na startu će se opet naći nakon 60 minuta; c) Ponovo za 60 minuta, odnosno 120 minuta nakon početka vožnje.
21. Na startu će se opet naći nakon 40 minuta.
22. Opet će zazvoniti u isto vrijeme nakon 144 minute.
23. a) Brži je prvi klizač; b) Na startu će se opet naći za 100 sekundi; c) Prvi će napraviti 5 krugova, a drugi 4 kruga.
24. Opet će se sresti u knjižnici za 42 dana.
25. Primjerice: 10 i 21. $V(10, 21) = 210$.
Najmanji zajednički višekratnik dvaju relativno prostih brojeva je njihov umnožak.
26. a) $V(10, 20) = 20$; b) $V(3, 33) = 33$; c) $V(15, 60) = 60$; d) $V(100, 1500) = 1500$;
e) $V(32, 128) = 128$.
Ako je a višekratnik od b , onda je $V(a, b) = a$.
27. $V(48, 36) = 144$. Zupčanik sa 48 zubaca napraviti će 3 kruga, a onaj sa 36 zubaca 4 kruga.
28. a) Zajedno će krenuti s kolodvora nakon 200 min, tj. Nakon 3 h 20 min;
b) To će biti u 9 h 20 min.
29. a) 1 351 350; b) 97 020.
30. a) 4, 20, 12, 60; b) 8, 40; c) 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70; d) 8, 24.
31. Broj a je djeljitelj broja 12.
32. Broj a je višekratnik broja 12.
33. Primjerice: a) $\odot = 3$, $\odot = 4$; b) $\odot = 1$, $\odot = 2$;

- c) $\odot = 25$, $\odot = 20$; d) $\odot = 35$, $\odot = 7$;
e) $\odot = 3$, $\odot = 13$; f) $\odot = 15$, $\odot = 5$.
34. Točan je zadatak e) $D(12, 16) = 4$. Ispravci:
a) $V(6, 2) = 6$; b) $V(14, 7) = 14$; c) $V(9, 6) = 36$;
d) $V(4, 4) = 4$; f) $V(25, 30) = 150$;
g) $D(16, 32) = 16$.
35. $V(5, 6, 15) = 30$.
36.

2, 3 i 5	30
2, 8 i 16	40
10, 4 i 8	16

37. $V(16, 40, 100) = 400$.
38. 900.
39. Za 72 dana.
40. Sva trojica sresti će se na otoku nakon 60 dana.
41. a) Nakon 126 minuta; b) Staza je duga 50 m, pa jedan "krug" ima 100 m. Prvi će preplivati 4200 m, drugi 1800 m, treći 2100 m, a četvrti 1400 m; c) Prvi i treći, nakon 6 min.

2. 11. Ponavljanje

Zadaci za ponavljanje:

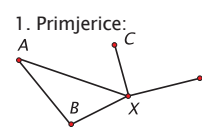
- Višekratnici broja 8: 16, 24, 48.
- NE, DA, DA, NE, DA.
- a) 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40; b) 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21; c) 11, 22, 33, 44, 55, 66; d) 18, 36, 54, 72, 90, 108.
- 52, 54, 56, 58.
- 124, 128, 132, 136, 140, 144, 148.
- 1, 2, 3, 6.
- 9, 2, 5, 10, 1, 90.
- Čokolada može imati 1, 2, 4, 5, 10 ili 20 redaka.
- a) 1, 2, 5, 10; b) 1, 2; c) 1, 5; d) 1, 7.
- Iznos mora biti paran broj, jer je 16 paran broj.
- Primjerice: $68 = 40 + 28$; $42 = 30 + 12$;
 $114 = 120 - 6$; $93 = 90 + 3$.
- a) Ne; b) Da; c) Da; d) Da; e) Da; f) Da; g) Ne.
- a) 105, 450, 2330, 310, 5, 10, 1000, 400, 6 000 000, 410, 255, 75, 100, 80 000, 600 000; b) 450, 2330, 310, 10, 1000, 400, 6 000 000, 410, 100, 80 000, 600 000; c) 1000, 400, 6 000 000, 100, 80 000, 600 000; d) 1000, 6 000 000, 80 000, 600 000.
- a) 100, 110, 120, 200, 210, 220; b) 100, 110, 120, 200, 210, 220; c) 100, 200.
- Primjerice: 112, 334, 560, 718, 666, 100, 998.
- Na primjer: a) 450; b) 300; c) 90; d) 180.
- a) Primjerice: 12; b) Takav broj ne postoji.
- a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; b) 0, 2, 4, 6, 8; c) 0, 3, 6, 9; d) 0, 5; e) 3; f) 0.
- a) $45 = 1 \cdot 45$ ili $45 = 9 \cdot 5$ ili $45 = 3 \cdot 15$;
b) $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5$.
- Broj 36.
- 1, 2, 4; $D(56, 100) = 4$.
- a) $D(45, 72) = 9$; b) $D(25, 125, 625) = 25$;
c) $D(14, 27) = 1$.
- Duljina jedne pločice može biti 1 cm, 2 cm, 4 cm ili 8 cm.
- a) $D(25, 70) = 5$; b) $V(66, 44) = 132$;
c) $D(44, 121) = 11$; d) $V(16, 28, 12) = 336$.
- Nakon 54 min.

Rješenja oglednog testa:

- DA, NE, DA, NE.
- a) 1, 2, 3, 6, 9, 18; b) 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70.
- a) 27 i 18; b) 400, 24, 48, 18 i 32.
- b) 16.
- a) 1, 4, 7; b) 4; c) 0 ili 5; d) 0.
- 23 i 29.
- a) $28 = 2 \cdot 2 \cdot 7$; b) $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$;
c) $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.
- a) $D(45, 72) = 9$; b) $D(100, 125) = 25$.
- a) $V(15, 40) = 120$; b) $V(128, 320) = 640$.
- a) Brži je drugi trkač koji prijeđe stazu za 3 min; b) Opet će se na startu naći za 12 min.
- Duljina stranica svake pločice će biti 160 cm.

3. Skupovi točaka u ravni

3.1. Dužina, pravac, polupravac

- Primjerice: 
- Tih dužina ima 15: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{CF}, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{EF}$.
- Tih dužina ima 10: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}, \overline{DE}$.
- Točke R i S pripadaju pravcu p . Točke R i S su krajnje točke dužine RS . Točke R i S dijele pravac p na dužinu i dva polupravca.
- Točke A, E, H i C pripadaju dužini AC , a točke D, F i G joj ne pripadaju.
- Da.

	Pripada li točka B	Pripada li točka E	Pripada li točka G
dužini AB	da	da	ne
dužini DE	ne	da	da
dužini DC	ne	da	da
dužini MN	ne	da	ne
dužini GP	ne	ne	da
dužini BN	da	ne	ne

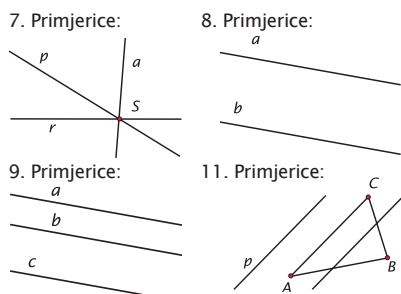
- 3 pravca, 6 polupravaca.
- a) Na crtežu su 4 pravca i 6 dužina;
b) Na crtežu su 4 pravca i 24 dužine.
- 18 dužina, 9 sjecišta.

3.2. Duljina dužine

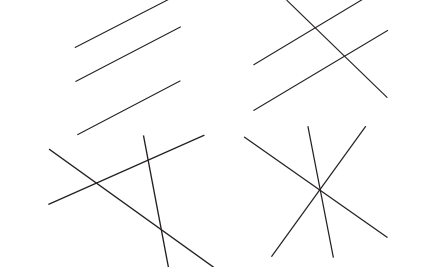
- Najkraći put od A do B je dužina AB . 
- Duljina dužine FG je 4 cm. Ne možemo izmjeriti duljinu pravca i polupravca, jer nemaju dvije krajnje točke.
- b) $|IJ| = 23$ mm, $|IK| = 24$ mm, $|IL| = 32$ mm, $|JK| = 12$ mm, $|JL| = 12$ mm, $|KL| = 11$ mm.
- $|BC| = 1$ cm ili $|BC| = 5$ cm.
- Zadatak ima jedno rješenje jer se radi o polupravcu. $|BC| = 23$ mm.
- $|CX| = |EX| = 31$ mm.
- $|AD| = 1$ mm.
- udaljenost; duljina; milimetar, centimetar, decimetar i metar.
- Duljina kuće je 8 m. Duljina zida kuhinje od prozora do vrata je 7 m. Udaljenost između dva učenika u klupi je 6 cm.
- Na primjer: kutijica za CD, mala žlica, itd.
- 240 mm, 10 mm, 650 mm, 220 mm, 50 mm, 180 mm, 430 mm, 550 mm, 40 mm, 100 mm, 1000 mm, 870 mm, 330 mm, 1250 mm.
- 2 cm, 10 cm, 6 cm, 1 cm, 5 cm, 18 cm, 41 cm, 59 cm, 4 cm, 7 cm, 30 cm, 87 cm, 31 cm.
- 1 m = 100 cm, 1 dm = 10 cm, 1 km = 1000 m, 1 km = 100 000 cm, 1 km = 1 000 000 mm, 1 m = 1000 mm, 1 cm = 10 mm, 1 dm = 100 mm, 1 m = 10 dm.
- 10 m = 1000 cm; 100 dm = 1000 cm; 10 km = 10 000 m; 100 m = 100 000 mm; 10 cm = 100 mm; 10 dm = 1000 mm.
- 6 m = 600 cm; 8 dm = 80 cm; 5 km = 5000 m; 17 m = 17 000 mm; 92 cm = 920 mm; 55 cm = 550 mm; 4 dm = 400 mm.
- 200 cm = 2 m; 500 mm = 50 cm; 670 mm = 67 cm; 8600 mm = 86 dm; 230 cm = 23 dm; 7600 cm = 76 m; 790 dm = 79 m.

3.3. Položaj pravaca u ravni

1. a) b) c)
 2. Sijeku se: $j i k$; $j i m$; $j i n$; $j i o$; $k i l$; $k i m$; $k i n$; $l i m$; $l i n$; $l i o$; $m i o$; $n i o$. Paralelni: $j \parallel l$, $k \parallel o$, $m \parallel n$.
 3. $m \parallel n$.
 6. Primjerice:



13. Mogu biti sva tri usporedna, dva usporedna i jedan koji ih siječe, sijeku se u tri točke u parovima ili da se svi sijeku u jednoj točki.



15. 16. a) Ima ih beskonačno mnogo;
 17. b) Postoji samo jedan takav pravac.
 Oni su usporedni, $a \parallel b$.

3.4. Okomiti pravci

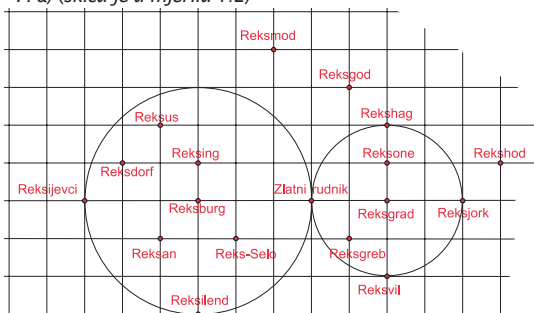
1. Okomiti su pravci na slikama a), c) i f).
 2. a) međusobno su usporedni pravci j , m , n , k i q ; i pravci a , o i p ; b) Na pravac o okomiti su pravci j , m , n , k i q ; c) Na pravac a okomiti su pravci j , m , n , k i q .
 5. a) b) c) d)

6. a) Ima ih beskonačno mnogo;
 b) Postoji samo jedan takav pravac.
 12. Poluprijer unutar-njeg otvora je 3 dm, a promjer 6 dm.
 14. a) Kružni isječak; b) Kružni odsječak; c) Kružni vijenac i krug; d) Polukrug.
 18. Dvije kružnice mogu imati zajedničke dvije, jednu ili niti jednu točku.

7. 8.
 10. a) b)
 13. $a \parallel c$. 14. $a \perp c$.

3.5. Kružnica i krug

3. Kružnice a) i f) imaju jednake polumjere. Kružnice a) i f) imaju jednake polumjere.
 5. a) C, F i J; b) F, C, J, H, G, D, K, i L; c) Točka D.
 6. Središte nije dio kružnice, ali jest dio pripadajućeg kruga.
 7. a) (skica je u mjerilu 1:2)



- b) Više zemlje dobio je stariji sin; c) Starijem sinu pripadaju: Reksburg, Reksijevci, Reksdorf, Reksing, Reksus, Reksan, Reks-Selo, Reksilend i Zlatni rudnik. Mlađem sinu pripadaju: Reksgrad, Reksgreb, Reksvil, Reksjork, Reksag, Reksone i Zlatni rudnik; d) Svađat će se oko Zlatnog rudnika.

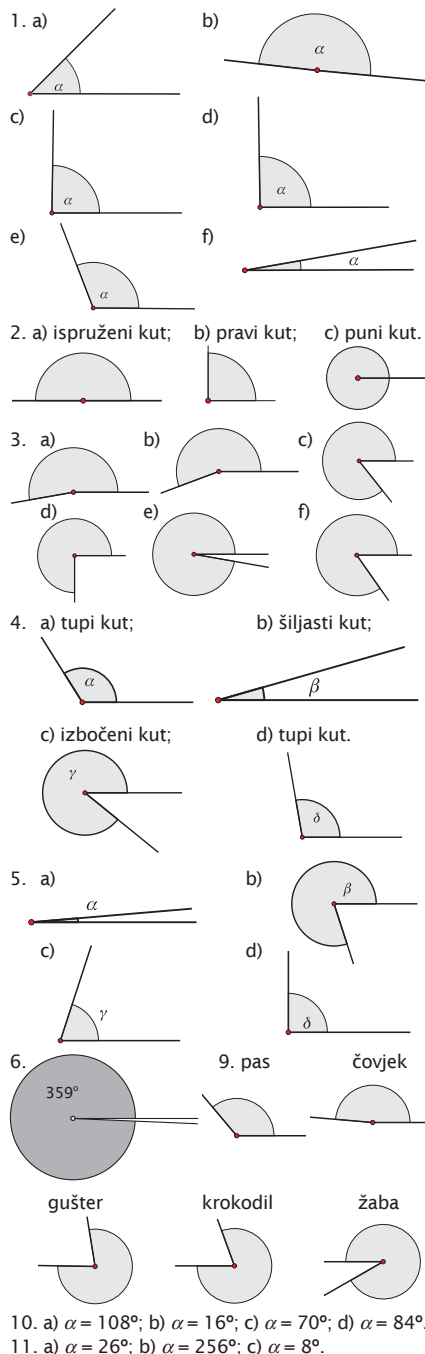
9. a) 46 cm; b) 26 cm; c) 84 dm; d) 112 m; e) 52 km.
 10. a) 14 cm; b) 66 cm; c) 21 dm; d) 28 m; e) 13 km; f) 105 dm.

11. a) b) c) d) e) f)
 12. Poluprijer unutar-njeg otvora je 3 dm, a promjer 6 dm.
 14. a) Kružni isječak; b) Kružni odsječak; c) Kružni vijenac i krug; d) Polukrug.
 18. Dvije kružnice mogu imati zajedničke dvije, jednu ili niti jednu točku.

13. 19. 21. 23. a) 24. a) b) c)
 22. 24. a) b) c)
 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612.

4. a) 144° ; b) 65° ; c) 85° ; d) 44° ; e) 30° ; f) 149° .

3.8. Crtanje kutova



3.9. Sukuti i vršni kutovi

1. a) Vršni kutovi su α i γ , β i δ . Sukuti su α i β , α i δ , β i γ , γ i δ ; b) Sukuti su β i δ ; c) i d) nema sukuta ni vršnih kutova.
2. $\alpha = \beta = 38^\circ$, $\gamma = \delta = 142^\circ$. $\alpha = \gamma = 122^\circ$, $\beta = \delta = 58^\circ$.
4. Kutovi su veličina 75° ili 105° .
5. Svi kutovi su pravi.

3.10. Ponavljanje

Zadaci za ponavljanje

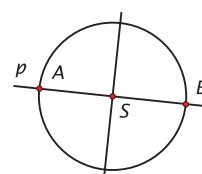
3. a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l) m) n) o) p) q) r) s) t) u) v) w) x) y) z) 4. a) $k(A, 4 \text{ cm})$; b) $k(V, 22 \text{ mm})$. 5. a) 9 cm ; b) 21 cm ; c) 24 dm . 6. a) b) c) d) e) f) 8. Primjerice: a) b) c) d) e) 9. a) šiljasti kut; b) pravi kut; c) izbočeni kut; d) tupi kut. 10. a) 11. Točke A, E, H i C pripadaju dužini $\overline{AC}$, a točke D, F i G joj ne pripadaju. 12. Da. 13. Na slici je 18 dužina i 9 sjecišta. 14. Točne su rečenice: $7 \text{ cm} = 70 \text{ mm}$; Palac je otprilike dug 5 cm ; $18 \text{ dm} = 180 \text{ cm}$; Ako je $|AB| = 12 \text{ cm}$, onda je $|BA| = 120 \text{ mm}$. Ostale rečenice su netočne i one ispravljene glase: Duljina dužine $\overline{CD}$ je 7 cm (m, dm, mm...); Duljina dužine $\overline{CD}$ je 7 cm ; $200 \text{ mm} = 20 \text{ cm}$; Pravac nema duljinu; Duljina dužine je 5 cm ; Duljina nije isto što i dužina, duljina je broj koji opisuje veličinu dužine; Palac je dug otprilike 5 cm ; Polupravac nema duljinu. 15. Duljina dužine $\overline{BC}$ je 4 cm ako se točke B i C nalaze s različitih strana točke A, ili 2 cm ako se točke B i C nalaze s iste strane na pravcu kao i točka A. 16. Zadatak ima jedno rješenje. $|BC| = 18 \text{ mm}$. 17. $|CX| = |EX| = 18 \text{ mm}$. 18. $|AD| = 10 \text{ mm}$. 20. a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l) m) n) o) p) q) r) s) t) u) v) w) x) y) z) 21. a) b) c) d) e) f) g) h) i) j) k) l) m) n) o) p) q) r) s) t) u) v) w) x) y) z) 22. 23. 24. 25. 26. Tupi kut. 27. a) 120° ; b) 90° ; c) 126° ; d) 19° ; e) 255° ; f) 180° . 30. a) $\alpha = 108^\circ$; b) $\alpha = 16^\circ$; c) $\alpha = 70^\circ$; d) $\alpha = 84^\circ$. 31. a) b) 32. $a \parallel c$ 33. a) $\alpha = 26^\circ$; b) $\alpha = 256^\circ$; c) $\alpha = 8^\circ$. 34. 3 sjecišta, 4 sjecišta, 5 sjecišta, 6 sjecišta. 35. Jedan pravac ima beskonačno mnogo okomica.

22. 23. 24. 25. 26. Tupi kut. 27. a) 120° ; b) 90° ; c) 126° ; d) 19° ; e) 255° ; f) 180° . 30. a) $\alpha = 108^\circ$; b) $\alpha = 16^\circ$; c) $\alpha = 70^\circ$; d) $\alpha = 84^\circ$. 31. a) b) 32. $a \parallel c$ 33. a) $\alpha = 26^\circ$; b) $\alpha = 256^\circ$; c) $\alpha = 8^\circ$. 34. 3 sjecišta, 4 sjecišta, 5 sjecišta, 6 sjecišta. 35. Jedan pravac ima beskonačno mnogo okomica.

Rješenja oglednog testa

1. 2. 3. 400 mm , 250 dm , 1000 m , 700 cm , 30 dm , $10\,000 \text{ mm}$. 4. $d = 6 \text{ cm}$. 5. 6. 7. a) 150° ; b) 65° ; c) 302° . 8. a) šiljasti kut; b) tupi kut; c) izbočeni kut. 9. a) $\alpha = 111^\circ$; b) $\alpha = 22^\circ$. 10. $\alpha = \gamma = 49^\circ$, $\beta = \delta = 131^\circ$.

11. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice.



Kazalo pojmova

A

alfa, 145
aritmetika, 116
asocijativnost množenja
prirodnih brojeva, 57
asocijativnost zbrajanja
prirodnih brojeva, 38

B

beta, 145
brojevni pravac, 21
brojka, 15

C

crtanje kutova, 144

D, Dž

dekadska jedinica, 15
delta, 145
diferencija brojeva, 40
dijametar kružnice, 131
dijeljenje prirodnih brojeva, 63
distributivnost, 59
djelitelj, 63, 79, 82
djeljenik, 63
djeljivost razlike, 86
djeljivost s 10, 90
djeljivost s 2, 93
djeljivost s 3, 95
djeljivost s 5, 92
djeljivost s 9, 97
djeljivost sa 100, 91
djeljivost umnoška, 88
djeljivost zbroja, 85
duljina dužine, 120
dužina, 118
dvostruko, 52
džepno računalo, 10

E, F, G

Eratostenovo sito, 100
faktori, 49
gama, 145
geometrija, 116
geotrokut, 130

I, J, K

ishodište, 20
ispruženi kut, 139
izbočeni kut, 139
izlučivanje zajedničkog faktora, 62
jedinična dužina, 20
količnik brojeva, 63
komutativnost množenja
prirodnih brojeva, 56
komutativnost zbrajanja
prirodnih brojeva, 37
koncentrične kružnice, 136

krajnje točke dužine, 118
krak kuta, 138
krivulja, 131
krug, 131, 133
kružni isječak, 134
kružni luk, 134
kružni odsječak, 134
kružni vijenac, 136
kružnica, 131, 132
kut, 138
kutni stupanj, 141
kutomjer, 141
kvocijent brojeva, 63

M, N

mjera kuta, 141
mjerenje kutova, 141
mjerne jedinice za duljinu, 121
mjesna vrijednost broja, 16
množenje prirodnih brojeva, 49
najmanji zajednički
višekratnik, 111
najveći zajednički djelitelj, 106
neparni broj, 14
nula, 14

O, P

određenost pravca s
dvije točke, 118
oduzimanje prirodnih brojeva, 40
okomiti pravci, 128
ostatak pri dijeljenju, 67
paralelni pravci, 125
parni broj, 14
položaj dvaju
pravaca u ravnini, 125
položaj dviju
kružnica u ravnini, 136
položaj pravca i
kružnice u ravnini, 137
polukrug, 134
polukružnica, 134
polumjer kružnice, 132
polupravac, 119
poluravnina, 124
pravac, 118
pravi kut, 139, 142
prethodnik, 18
približna vrijednost, 28
približno jednako, 29
pribrojnik, 33
prijateljski brojevi, 84
prirodni broj, 11
procjena, 34
produkt brojeva, 49
promjer kružnice, 133
prost broj, 99
puni kut, 139

R

računska radnja ili operacija, 73
radijus kružnice, 132
rastav broja na proste faktore, 103
ravnina, 124
razlika brojeva, 40
redoslijed rješavanja računskih
operacija, 73
relativno prosti brojevi, 105
rubne točke dužine, 118

S, Š

savršen broj, 84
sjecište, 125, 136, 137
skup N, 13
skup N_0 , 14
skup prirodnih brojeva, 13
složeni broj, 99
sljedbenik, 18
središte kružnice, 131
stupanj, 141
sukuti, 146
suma brojeva, 33
susjedni kutovi, 146
šestar, 131
šiljasti kut, 139

T, U

tablica množenja, 50
tetiva, 133
točka, 117
tupi kut, 139
udaljenost točaka u ravnini, 120
umanjenik, 40
umanjitelj, 40
umnožak brojeva, 49
usporedni pravci, 125
usporednica, 125, 127
uspoređivanje
prirodnih brojeva, 23

V,

veličina kuta, 141
višekratnik prirodnog broja, 79
vrh kuta, 138
vrste kutova, 139
vršni kutovi, 146

Z

zgrade, 74
zajednički djelitelj, 105
zajednički višekratnik, 110
zaokruživanje prirodnih
brojeva, 29, 30
zbrajanje prirodnih brojeva, 33
zbroj brojeva, 33
znamenka, 13
zbroj brojeva, 27
znamenka, 13

